

Проектная работа на тему «Топология как раздел математики»

Выполнила ученица 11В класса:
Галиева Клара

Руководитель работы:
Афанасьева Е. А., учитель математики

Цель работы: ознакомить школьников с базовым понятием топологии, привить интерес к науке.

Задачи:

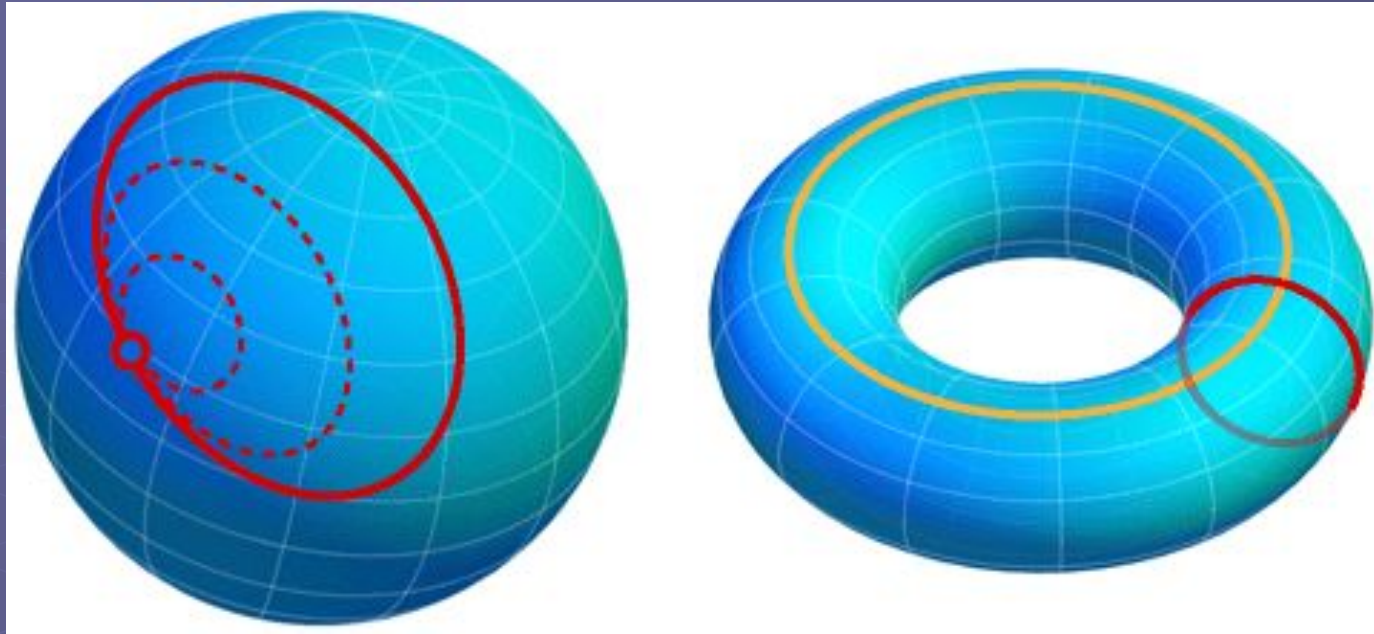
- дать определение термину «топология» и разобраться в нем
- ознакомиться с историей топологии
- рассмотреть несколько интересных топологических примеров
- узнать о необычных топологических объектах
- проделать опыты с лентой Мебиуса
- понять, чем полезна топология

Актуальность работы обусловлена очень быстрым развитием топологии как раздела математики. Еще приблизительно до конца 50-х годов, топология рассматривалась математиками других областей как красивая, но бесполезная игрушка, однако сейчас, наряду с алгеброй и геометрией, топологические методы широко используются в функциональном анализе, теории динамических систем и современной математической физике.

В этой работе я постараюсь показать, что топология может быть и красивой, и занимательной, и способной к применению в разных сферах науки и жизни.

Тополо́гия (от др.-греч. τόπος — место и λόγος — слово, учение) — раздел математики, максимально приближенный к геометрии, изучающий:

- в самом общем виде — явление непрерывности;
- в частности — свойства пространств, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях. Например, связность, ориентируемость, компактность.

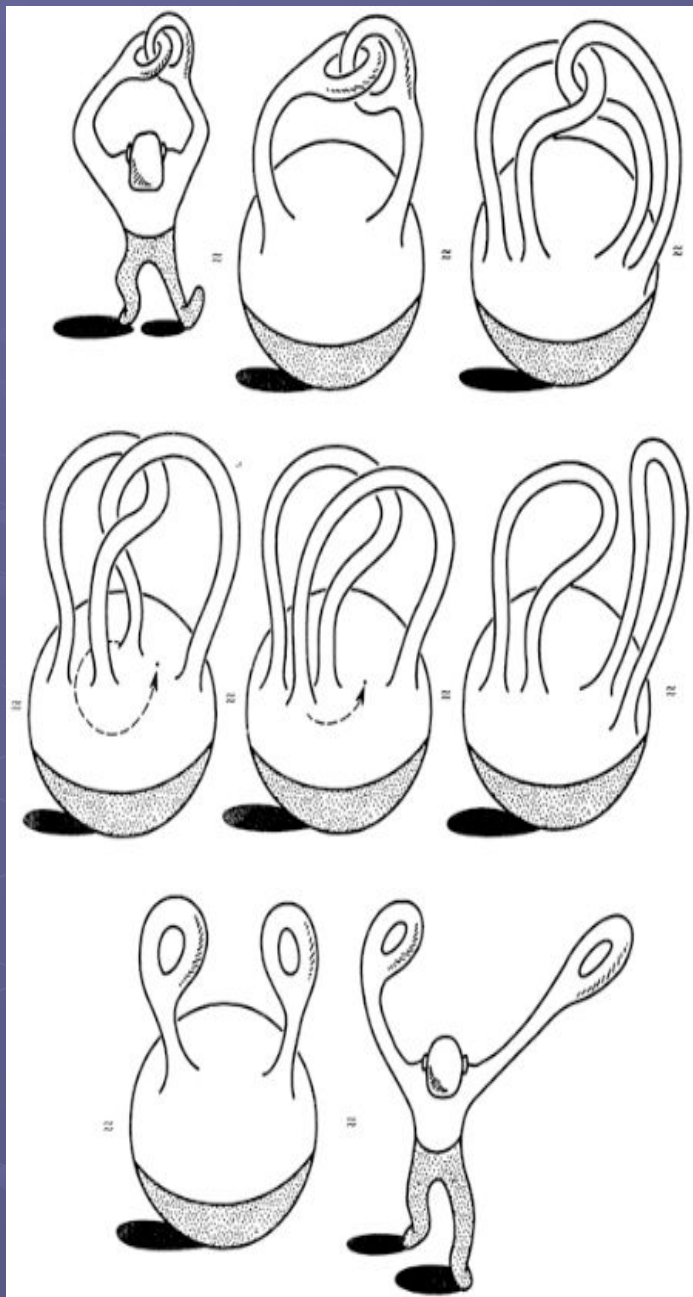


Также топология изучает свойства фигур, не изменяющиеся при любых деформациях, производимых без разрыва и склеивания.

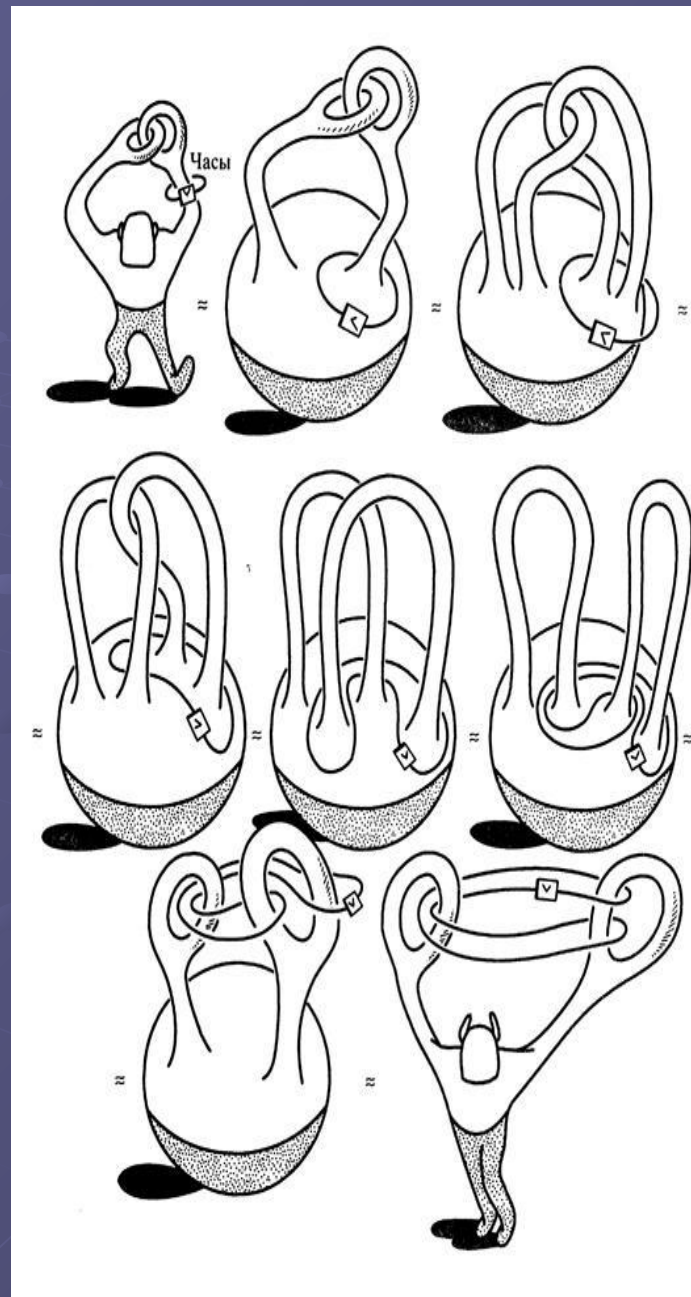
С точки зрения топологии именно дырки — одно из ключевых свойств поверхности. Если выложить на поверхности шара или цилиндра петлю из нитки, ее можно стянуть без узелка, и такое пространство называется односвязным. С бубликом такое не получится: мешает отверстие.

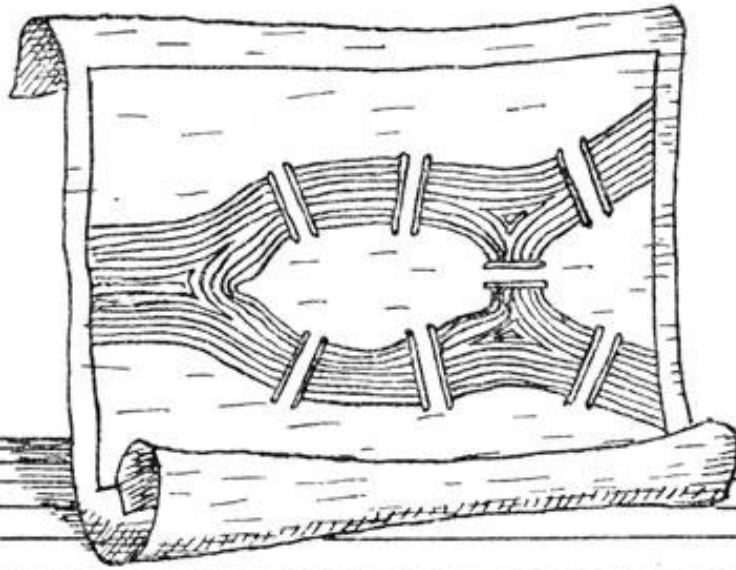
Нельзя превратить фигуры разной линейной связности одну в другую без разрывов или склеек. Топологические фигуры, для которых такое возможно, связываются гомеоморфными — как при игре с куском пластилина — преобразованиями. Чашка и бублик гомеоморфны, бублик и цилиндр — нет. На данном рисунке мы можем наблюдать это.





«Топологический человек» - наглядный пример деформации фигуры в топологии. При помощи различных преобразований мы можем распутать его пальцы. Однако если надеть на одну руку такого человека часы, распутать пальцы будет уже невозможно: часы будут играть роль наручников.





Различные источники указывают на первые топологические по духу результаты в работах Лейбница и Эйлера, однако термин «топология» впервые появился в 1847 году в работе Листинга.

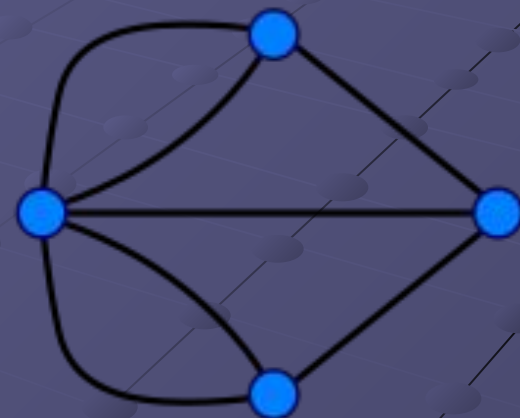
Так, однажды *Л. Эйлер* заинтересовался чисто игровой задачей о кенигсбергских мостах.

Река Мемель, протекающая в районе Кенигсберга (ныне Калининград), разделяется в устье на два рукава, которые то сходятся в один поток, то расходятся. Город соединен мостами. Задача формулировалась так: надо последовательно обойти все семь мостов, но при этом ни разу не возвратиться назад, то есть не проходить какой-либо отрезок пути дважды.

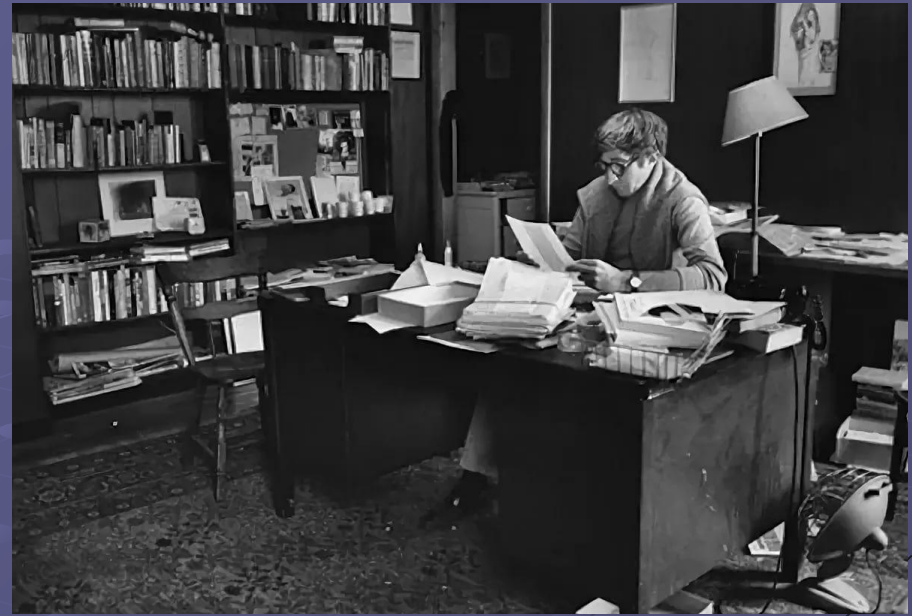
Впоследствии обнаружилось, однако, что эта была одна из первых задач с топологическим содержанием, учитывающим свойство непрерывности пространства. Так зарождались идеи новой науки – топологии. Задача о путешествии через кенигсбергские мосты предлагала найти "безразрывный" (топологически выверенный) маршрут.

Решение задачи:

На упрощённой схеме города мостам соответствуют линии а частям города — точки соединения линий В ходе рассуждений Эйлер пришёл к выводу, что подобный граф (схему) с более чем двумя нечётными вершинами (вершинами, к которым ведёт нечётное число рёбер) невозможно начертить одним росчерком. Следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

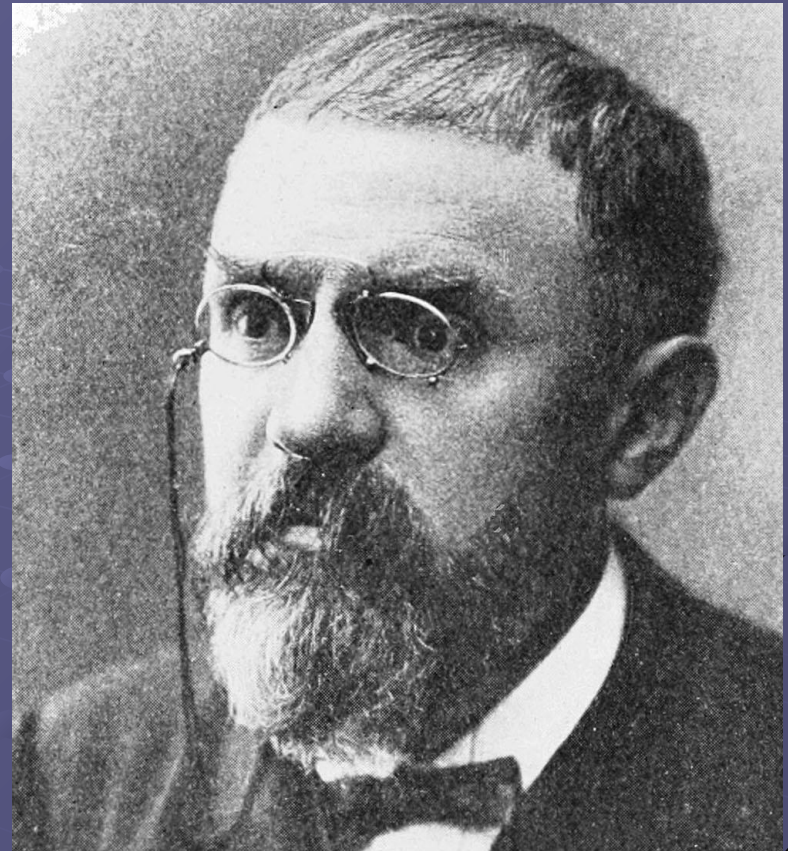


Общая топология зародилась в конце XIX века — и оформилась в самостоятельную математическую дисциплину в начале XX века. Процесс построения топологии и решения ее внутренних задач оказался трудным и длительным: он продолжался не менее 70—80 лет, наполненных глубокими открытиями и, в ряде случаев, даже пересмотром основ.

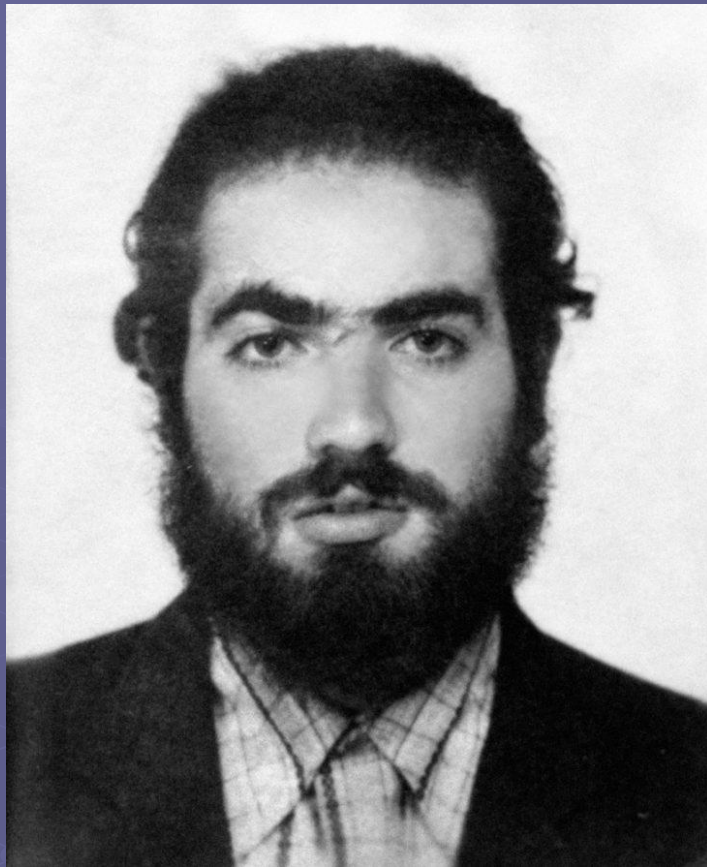


Фундамент этой науки, причём достаточно детально разработанный для пространства любого числа измерений, создал Пуанкаре. Его первая статья на эту тему появилась в 1894 году, она вызвала всеобщий интерес, и Пуанкаре в 1899—1902 годах опубликовал пять дополнений к этой пионерской работе. В последнем из этих дополнений содержалась знаменитая гипотеза Пуанкаре.

Является единственной решённой задачей тысячелетия и считается наиболее известной проблемой топологии. Пуанкаре изначально оставил такое утверждение: всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере. То есть каждый трёхмерный объект, обладающий некоторыми свойствами трёхмерной сферы (например, каждая петля внутри него должна быть стягиваема), обязан быть сферой с точностью до деформации.



В дальнейшем это утверждение было расширено и обобщено. И все же на протяжении длительного времени именно изначальная задача вызывала больше всего проблем, и была решена лишь через 100 лет после ее появления.

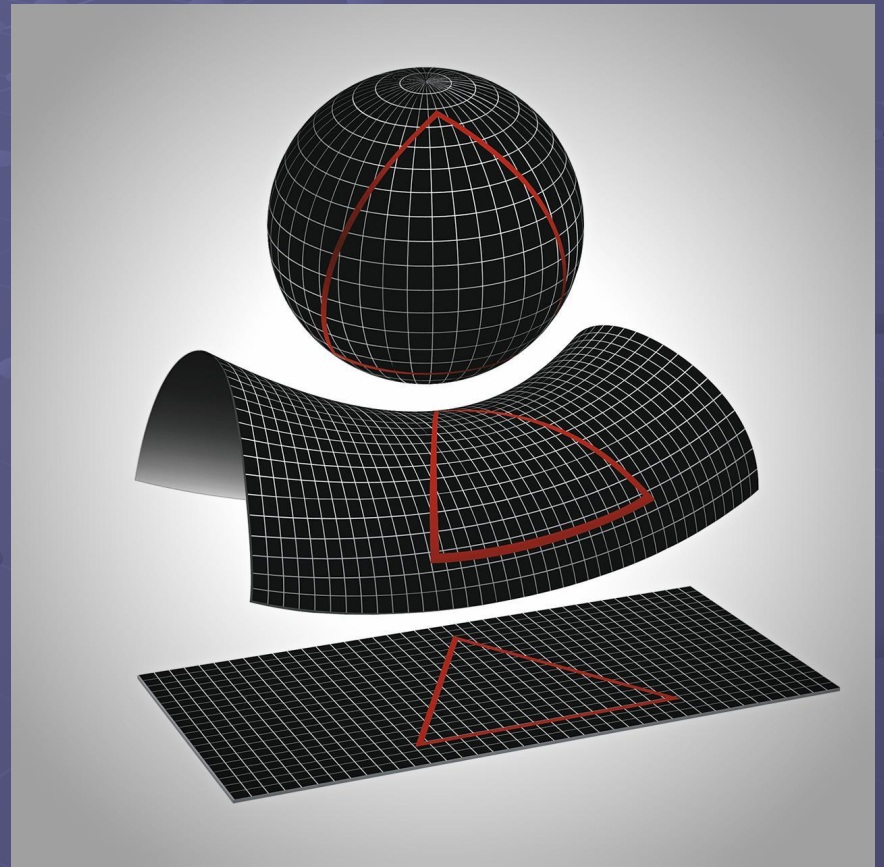


*Григорию Перельману удалось решить одну из семи задач тысячелетия и математически описать так называемую **формулу Вселенной**, доказать гипотезу Пуанкаре. Над этой гипотезой наиболее светлые умы бились более 100 лет, и за доказательство которой мировым математическим сообществом (математическим институтом имени Клэя) был обещан \$1 млн.*

В 2006 году за решение гипотезы Пуанкаре математику была присуждена высшая математическая награда - Филдсовская премия (медаль Филдса). Джон Болл лично посетил Санкт-Петербург с тем, чтобы уговорить принять премию. Её он принять отказался со словами: *«Общество вряд ли способно всерьёз оценить мою работу»*.

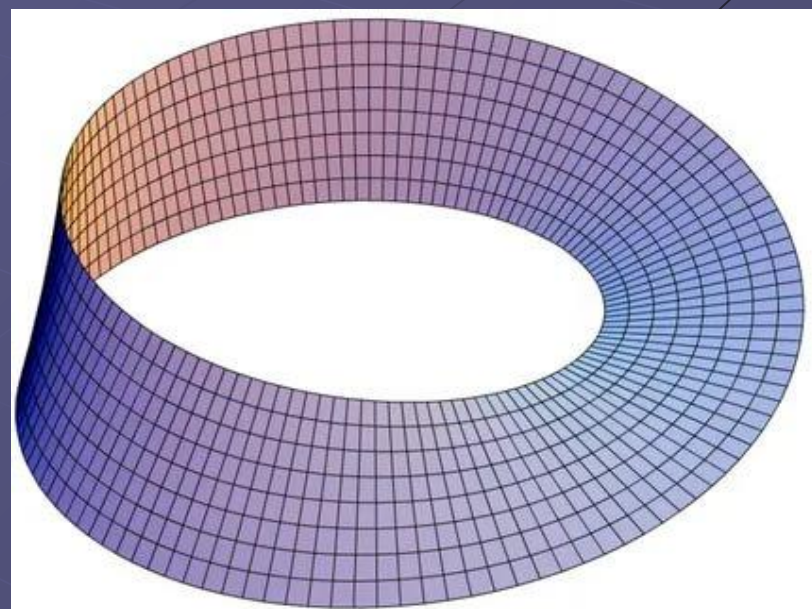
Что же касается приложения этой теории к жизни, Пуанкаре считал, что Вселенная в некотором смысле и является трехмерной сферой.

Маркус Дю Сотой из Оксфордского университета считает, что теорема Пуанкаре — «это центральная проблема математики и физики, попытка понять какой формы может быть Вселенная, к ней очень трудно подобраться».



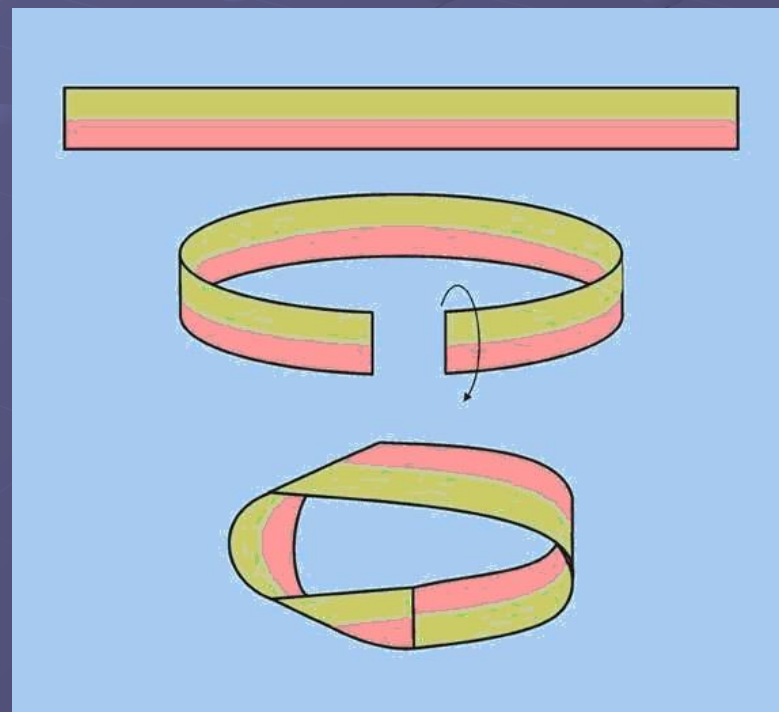


17 ноября 1790 года родился Август Фердинанд Мебиус, математик и астроном. Прославила его лента (лист) Мебиуса: объект, попасть из одной точки которого в другую можно, не пересекая края.



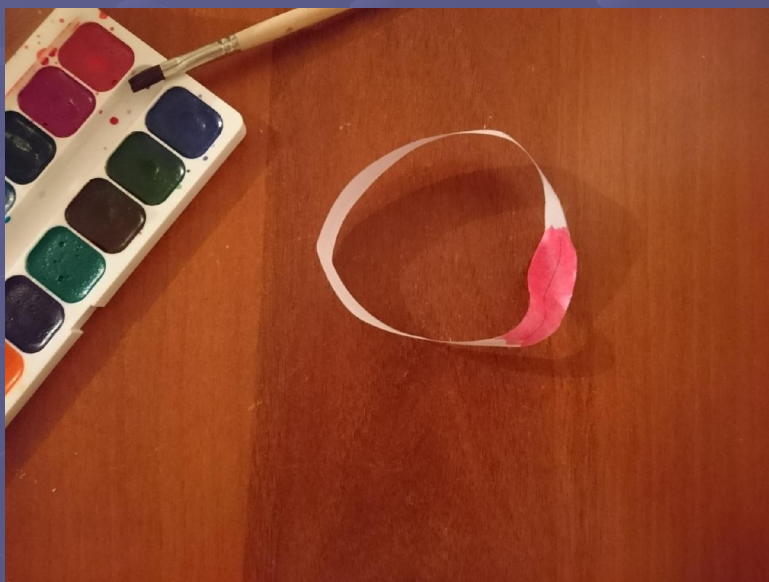
Согласно легенде, Мёбиус открыл этот объект после того, как служанка, работающая в его доме, сшила тканевую ленту в кольцо, перевернув по невнимательности один из ее концов. Увидев результат, вместо того, чтобы отругать незадачливую девушку Мёбиус произнес: «Ай да, Марта! Девочка не так уж глупа. Ведь это же односторонняя кольцевая поверхность. У ленточки нет изнанки!»

Чтобы сделать такую ленту дома, понадобится полоска бумаги и клей. Необходимо склеить противоположные концы полоски, перекрутив один конец в левую или правую сторону (получится правая или левая лента Мебиуса). С подобной лентой можно сделать несколько интересных опытов.



Если закрашивать обычный лист бумаги, то его можно окрасить в два цвета — каждую из поверхностей в свой цвет. Границей окрашивания будут края листа.

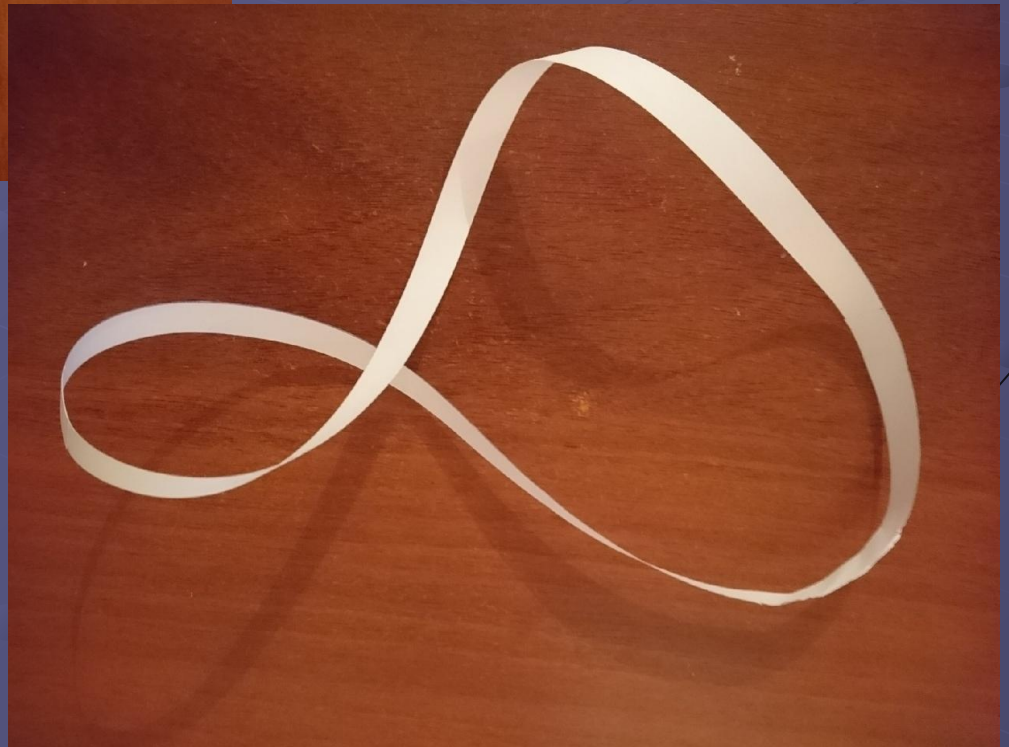
С лентой Мебиуса, склеенным из такого же листа, это не получится. При попытке окрасить одну ее поверхность, она оказывается закрашенной полностью. Несмотря на кажущееся наличие у листа Мебиуса двух сторон, на самом деле сторона всего одна.





Попробуем разрезать нашу ленту пополам вдоль ее краев. Можно предположить, что у нас получится две ленты, однако это не так.

В ходе эксперимента оказалось, что после разреза получается одна тонкая лента Мебиуса, только перекрученная уже дважды.





Проведем другой эксперимент. Увеличим количество разрезов на ленте на один.

Тогда после разрезания ленты мы получаем две маленькие перекрученные ленты, соединенные между собой как звенья в цепочке.



А если увеличить количество разрезов на два, в результате можно увидеть то же, что и в прошлом опыте.

Однако нельзя не заметить, что короткая лента окажется шире длинной.





Давайте теперь сделаем трижды перекрученную ленту Мебиуса. Для этого перекрутим конец ленты три раза, перед тем, как склеить его с другим.

Теперь разрежем трижды перекрученную ленту Мебиуса пополам вдоль края. Вопреки всем ожиданиям, в результате мы получаем одну ленту со сложным узлом на ней.



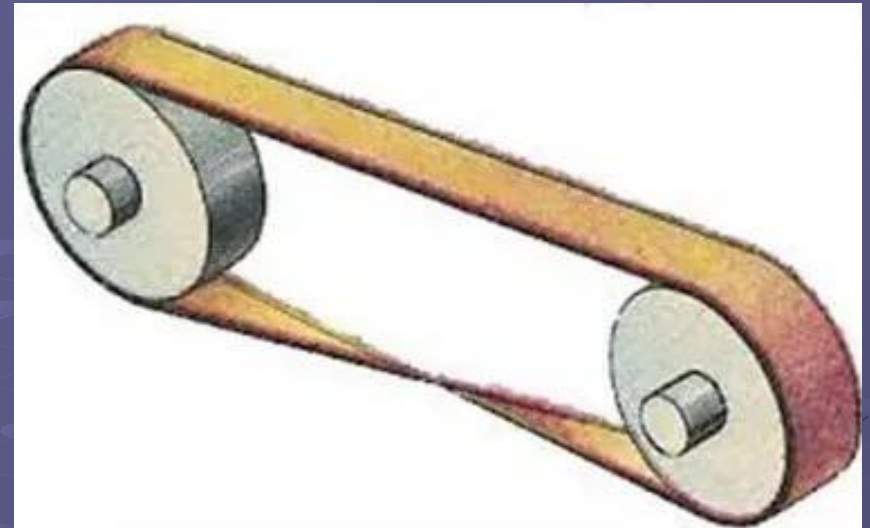


Проведем еще один опыт. Возьмем две ленты Мебиуса, склеим их под углом 90 градусов, разрежем каждый пополам и посмотрим, что же получится. Также для этого опыта нужно брать две разные (левую и правую) ленты Мебиуса.

В итоге мы получаем две соединенные ленты в форме сердец. Этот опыт показывает, что из ленты Мебиуса можно получить даже довольно сложную фигуру.



Красящая лента в матричных принтерах, скрученная в ленту Мёбиуса, служит гораздо дольше, поскольку износ в этом случае происходит равномерно по всей её поверхности.



А скрученные в форме этого геометрического объекта лопасти кухонного миксера или бетоносмесителя снижают энергозатраты на 20%, и при этом качество полученной смеси улучшается.



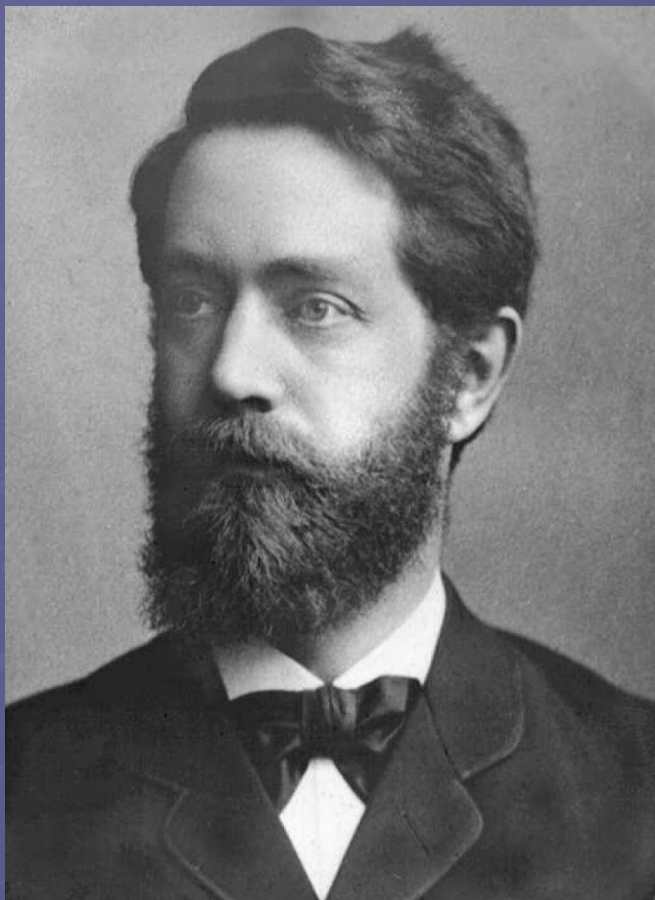
Трижды перекрученная лента, которую мы делали в ходе эксперимента, взята в основу дизайна международного символа переработки.



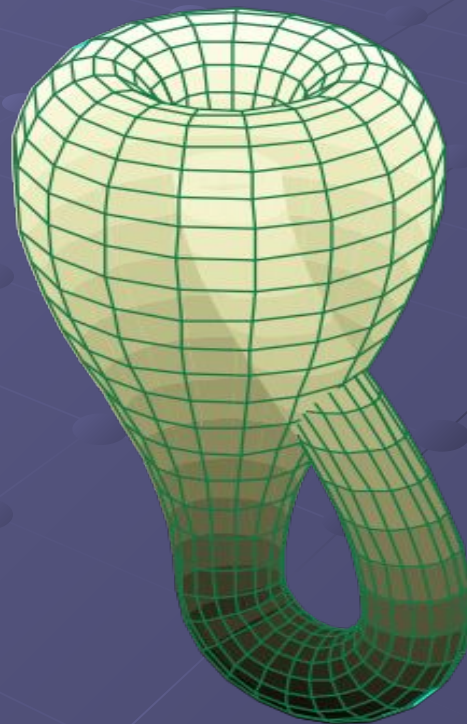


Давайте взглянем на наши ДНК. Они как раз таки представляют собой закрученные спирали, и иногда бывает, что они оказываются замкнутыми, то есть кольцевыми. И когда происходит репликация ДНК, эти спирали делятся пополам.

Но так как они являются много раз перекрученными лентами Мебиуса, то на них образуются узлы, как и в одном из предыдущих опытов. Это в некотором смысле объясняет сложность генетического кода для расшифровки и восприятия.

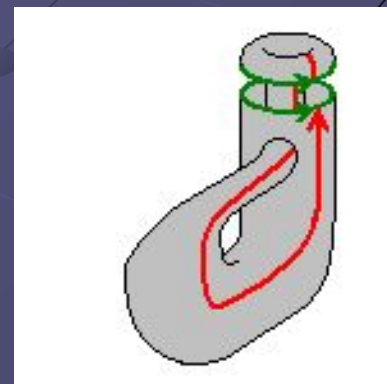
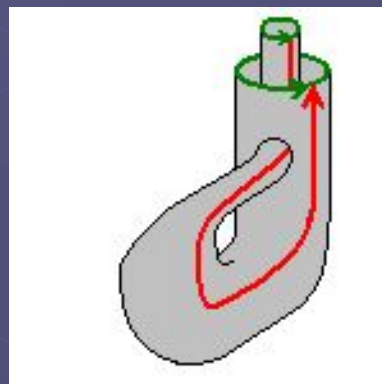
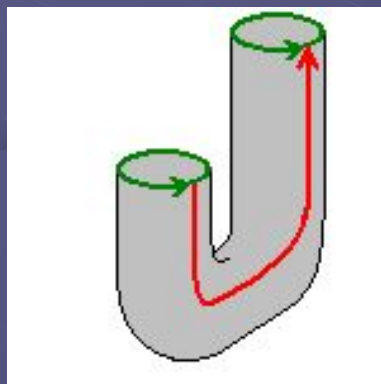
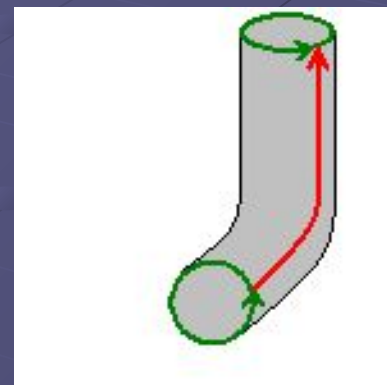
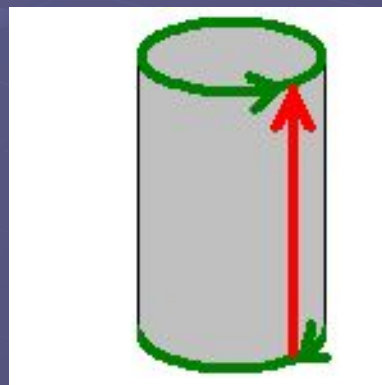
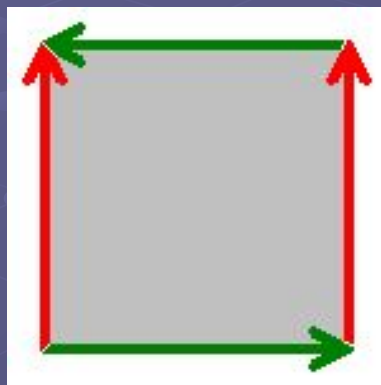


Бутылка Клейна — неориентируемая (односторонняя) поверхность, впервые описанная в 1882 году немецким математиком Ф. Клейном. Она тесно связана с лентой Мебиуса.

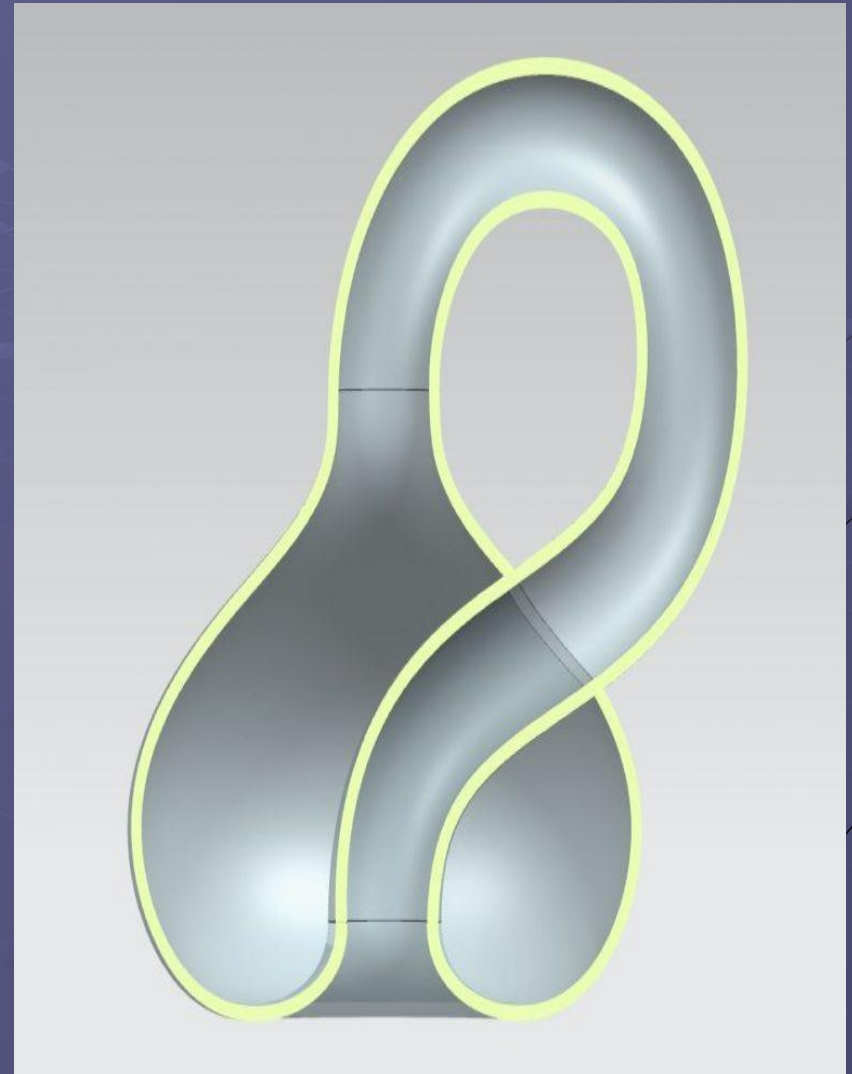


Чтобы построить модель бутылки Клейна, понадобится бутылка с двумя дополнительными отверстиями: в доньшке и в стенке. Горлышко бутылки нужно вытянуть, изогнуть вниз и, продев его через отверстие в стенке, присоединить к отверстию на дне бутылки.

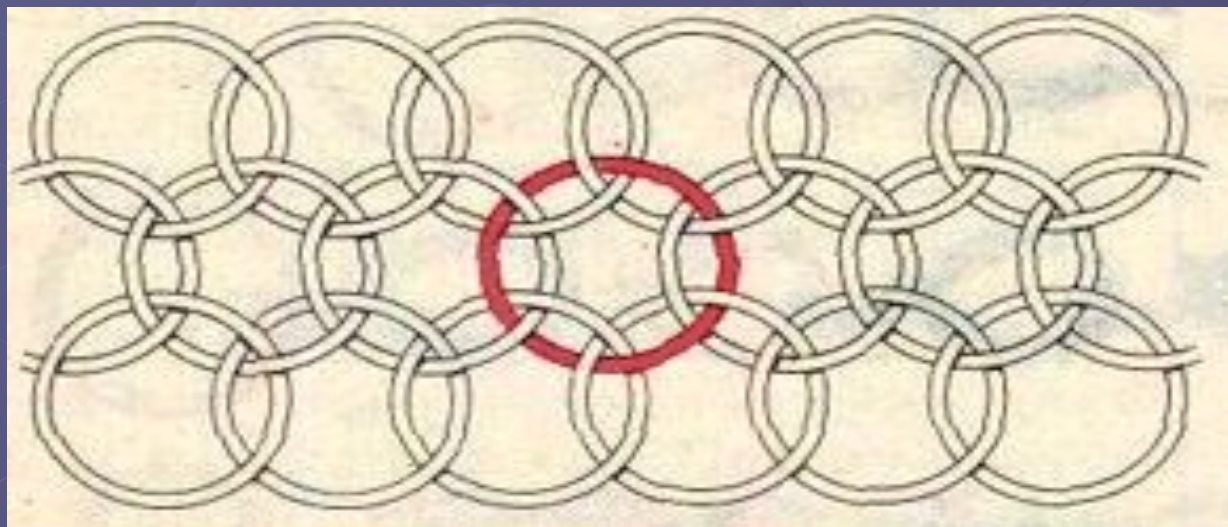
Для настоящей бутылки Клейна в четырёхмерном пространстве отверстие в стенке не нужно, но без него нельзя обойтись в трёхмерном евклидовом пространстве.



Бутылка Клейна, в отличие от обычного стакана, не имеет «края», где бы резко заканчивалась поверхность. Если сравнить ее с воздушным шаром, то путь изнутри наружу она проходит, не пересекая поверхность. Значит, в действительности объект не имеет ни внутренней, ни внешней поверхности.



Топология, а вернее, ее раздел – теория узлов и зацеплений, имеет прикладное значение даже в текстильной промышленности (задача о нерасползаемой дырке). Здесь нельзя не вспомнить трикотажные изделия или капроновые чулки – разорвалась петелька и по ткани поползла стрелка. Как хорошо было бы женщинам, если бы капроновые чулки делали не из одной нитки, а из множества мелких колечек, как на изображенной кольчуге. Удаление одного колечка приводит не к полному распадению кольчуги, а всего лишь к небольшой дырке.



Заключение

Итак, в ходе этой работы я познакомила вас с основами такой занимательной и полезной науки как топология. Она во многом отличается от традиционной геометрии, и несмотря на то, что это достаточно молодая дисциплина, я считаю, что она будет быстро развиваться в будущем как самостоятельный раздел математики, а также как прикладные знания в других сферах науки и жизнедеятельности.

- https://www.syl.ru/article/164199/mod_gipoteza-puankare-istoriya-problemyi-dokazatelstvo-smysl
- <http://nplit.ru/> **'Библиотека юного исследователя'**
- <https://ru.wikipedia.org/wiki>
- <https://www.youtube.com/watch?v=oYoqNPlayXg>
- <https://naukatehnika.com/kolczo-mebiusa-pervyj-shag-v-sistemu-chast-1.html>
- https://zen.yandex.com/media/just_science_chanel/lenta-mebiusa-5c2122a6386e1300aa807479
- <https://www.ufa.kp.ru/daily/26159/3047368/>
- <https://www.popmech.ru/science/417112-chelovek-gomeomorfen-spinneru-kak-eto-obyasnit/#part0>
- <https://forkettle.ru/vidioteka/estestvoznanie/matematika/53-geometriya/113-geometriya-i-topologiya>
- <https://allatra-science.org/publication/teorema-puankare-gregory-perelman>
- <http://lavant.moscow.ru/1081/00/eto-udivitelnoe-uznaniye-kolco-htm>