Неопределённый интеграл.

Вопросы лекции

- Свойства неопределенного интеграла
- Метод интегрирования по частям
- Интегрирование рациональных дробей
- Интегрирование тригонометрических функций

Свойства неопределенного интеграла

- Производная из неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то и

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$$

Свойства неопределенного интеграла

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\,dx$$

Свойства неопределенного интеграла

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла

$$\left(\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left(\int \left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

Свойства неопределенного интеграла

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла

$$\left(\int a \cdot f(x)dx\right)' = a \cdot f(x)$$

$$\left(a\int f(x)dx\right) = a\left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x)$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть $u = u(x), \quad v = v(x)$ дифференцируемые функции

известно $\quad d(uv) = (uv)'dx$

тогда $\quad d(uv) = (u'v + uv')dx$

проинтегрируем $\quad \int d(uv) = \int (u'v + uv')dx$

$$\int d(uv) = \int u'v\,dx + \int uv'dx$$

$m.k. \quad u'dx = du; \quad v'dx = dv$

то
$$\int d\,(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$uv + C = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Если интеграл, стоящий справа, проще интеграла, стоящего слева, то применение формулы имеет смысл.

Некоторые типы интегралов, решаемые методом интегрирования по частям.

$1^0.\quad \int P(x)\underbrace{\ln x}_{u}\,dx \qquad \int P(x)\underbrace{\arcsin x}_{u}\,dx \qquad \int P(x)\underbrace{\arctan x}_{u}\,dx$

$\int P(x)\underbrace{\arccos x}_{u}\,dx \qquad \int P(x)\underbrace{arc\cot x}_{u}\,dx$

где P(x)- многочлен

2^0. $\int \underbrace{P(x)}_{u} e^{ax}\,dx \qquad \int \underbrace{P(x)}_{u} \sin ax\,dx \qquad \int \underbrace{P(x)}_{u} \cos ax\,dx, \quad a \neq 0$

u=P(x) - многочлен

Если $P(x)$ выше первой степени, то операцию интегрирования по частям следует применять несколько раз.

3^0. $\int e^{ax} \cos bx\,dx \qquad \int e^{ax} \sin bx\,dx \qquad , \quad a^2 + b^2 \neq 0$

Формула применяется два раза, причем оба раза за ***u*** выбирается либо показательная функция, либо тригонометрическая.

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 5x\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \left(2x - 5\right)\cos 2x\, dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = 2x - 5 & dv = \cos 2x\, dx \\ du = 2\, dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 5x\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(2x - 5\right)\sin 2x - \frac{2}{2}\int \sin 2x\, dx\right) =$$

$$= \frac{5x - x^2}{2}\cos 2x + \frac{2x - 5}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C =$$

$$= \frac{1 + 10x - 2x^2}{4}\cos 2x + \frac{2x - 5}{4}\sin 2x + C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int e^{3x} \sin 2x\,dx$

$$\begin{bmatrix} u = e^{3x} & dv = \sin 2x\,dx \\ du = 3e^{3x}dx & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$\int e^{3x} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = e^{3x} & dv = \cos 2x\,dx \\ du = 3e^{3x}dx & v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx$$

Пусть $\quad F(x) = \int e^{3x}\sin 2x\,dx$

тогда $\quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}F(x)$

$$\frac{13}{4}F(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x$$

$$F(x) = -\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x + C$$

Ответ:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = -\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}}dx$

$\sqrt{x}=t$

$x=t^2$

$dx=d\left(t^2\right)$

$dx=2t\,dt$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt=2\int te^t dt=$$

$$\begin{bmatrix} u=t & dv=e^t\,dx \\ du=dt & v=e^t \end{bmatrix}$$

$$=2\left(te^t-\int e^t dt\right)=2te^t-2e^t+C=2e^t\left(t-1\right)+C=$$

$$=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$$

Интегрирование рациональных дробей

- Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т.е. в виде отношения двух многочленов

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} \ldots . B_m}{A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots A_n}$$

Интегрирование рациональных дробей

- ***Правильные рациональные дроби*** вида:

$$\frac{A}{x-a} \qquad \frac{A}{(x-a)^k} \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

Интегрирование рациональных дробей

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a)+c$$

Интегрирование рациональных дробей

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{1}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$$

Интегрирование рациональных дробей

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Интегрирование рациональных дробей

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

$$\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C = \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}(1-k)}+C$$