ТЕМА ЛЕКЦИИ: ВВЕДЕНИЕ В КУРС МЕДИЦИНСКОЙ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЛЕКТОР: доцент кафедры медицинской информатики и физики МАЙОРОВ ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1 ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1.1 Определение производной, правила дифференцирования.
1.2 Механический и геометрический смысл производной.
1.3 Дифференциал функции, полный дифференциал.

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства.
2.2 Методы интегрирования.
2.3 Определенный интеграл, основные свойства.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1 Определение дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с частными производными.

1.1 Определение производной, правила дифференцирования.

Производная – это предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, характеризует скорость изменения функции.

Производной функции f(x) в точке x называется $f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Функция, которая имеет конеченую производную, называется дифференцируемой функцией. Процесс вычисления производной называется **дифференцированием.**

Из определения производной функции следуют **основные правила дифференцирования.**

1. (const)=c$^{/}$=0

Производная любого постоянного числа равна нулю.

Примеры:

(29)$^{/}$=0, (-1973)$^{/}$=0.

2. (x)$^{/}$=1

Производная аргумента функции равна единице.

3. $(c\,u)^{/}=c\,u^{/}$

Постоянное число можно выносить за знак производной.

Пример:

$$(7x)^{/}=7x^{/}=7*1=7.$$

4. $(u+v-w+\ldots+s)^{/}=u^{/}+v^{/}-w^{/}+\ldots+s^{/}$.

Производная алгебраической суммы любого числа слагаемых равна этой же алгебраической сумме производных слагаемых.

Пример:

$$(4x^2+8x-11x+17)^{/}=(4x^2)^{/}+(8x)^{/}-(11x)^{/}+(17)^{/}=8x+8-11+0=8x-3.$$

5. $(u^n)^{/}=nu^{n-1}$, где u – любая функция.

Производная степени функции u^n равна произведению показателя степени на функцию, в степени на единицу меньше, на производную самой функции.

Примеры:

$$(x^3)^{/}=3x^2,\ (x^{-7})^{/}=-7x^{-8}.$$

6. $(\sqrt{u})^{/}=\dfrac{u^{/}}{2\sqrt{u}}$

Примеры:

$$(\sqrt{x})' = \frac{x'}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{2x^5}+\sqrt{4x})' = \frac{(2x^5+4x)'}{2\sqrt{2x^5+4x}} = \frac{10x^4+4}{2\sqrt{2x^5+4x}}$$

7. (sin u)$'$=u$'$cosu.

Производная синуса сложной функции равна произведению производной этой сложной функции на косинус этой функции.

Если **u =x,** то **(sinx)$'$=cosx.**

Примеры:

(5sinx-6x^2)$'$= 5cosx-12x, [sin(2x^3+3x)]$'$=(2x^3+3x)$'$*cos(2x^3+3x)= (6x^2+3)*cos(2x^3+3x).

8. (cos u)$'$=-u$'$ sinu.

Производная косинуса сложной функции равна минус произведению производной этой сложной функции на синус этой функции.

Если **u =x,** то **(cosx)$'$=-sinx.**

Примеры:

(2sinx-4cosx)$'$=(2sinx)$'$-(4cosx)$'$=2cosx+4sinx, [cos(-x^3+8)]$'$=-(-x^3+8)$'$ *sin(-x^3+8)= 3x^2*sin(-x^3+8)

9. (u v)$'$=u$'$ v+v$'$ u.

Производная произведения равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый.

Примеры:

$$(3x^2*\sin x)=(3x^2)'*\sin x+3x^2*(\sin x)'=6x*\sin x+3x^2*\cos x,$$

$$(\sin 5x*\cos 2x)'=(\sin 5x)'*\cos 2x+\sin 5x*(\cos 2x)'=5\cos 5x*\cos 2x-2\sin 2x\sin 5x.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $y=f(g(x))=F(x)$ – сложная функция аргумента x. Считаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые по своим аргументам, тогда производная этой функции находится по следующей формуле:

$$y'=f'(g(x))*g'(x).$$

Примеры:

Найдите производную функции: $y=(3x^2-1)^5$.

Решение: $y'=((3x^2-1)^5)'=5(3x^2-1)^4*6x$

Найдите производную функции: $y=(x^2+3x+1)^5$.

Решение: $y'=((x^2+3x+1)^5)'=5(x^2+3x+1)^4*(2x+3)$.

ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(U + V)^{/} = U^{/} + V^{/}$ 2. $(U * V)^{/} = U^{/} * V + U * V^{/}$

3. $(U / V)^{/} = U^{/} * V – U * V^{/} / V^{2}$ 4. $(C)^{/} = 0$ 5. $(X^{1/2}) = 1/2 * X^{-1/2}$

6. $(1/X)^{/} = - 1/X^{2}$ 7. $(X^{n}) = n*X^{n-1}$ 8. $(e^{x})^{/} = e^{x}$ 9. $(a^{x})^{/} = a^{x}*\ln a$

10. $(\ln x)^{/} = 1/x$ 11. $(\log_{a}x)^{/} = 1/x*\ln a$ 12. $(\sin x)^{/} = \cos x$

13. $(\cos x)^{/} = - \sin x$ 14. $(tgx)^{/} = 1/\cos^{2}x$ 15. $(ctgx)^{/} = - 1/\sin^{2}x$

16. $(\arcsin x)^{/} = 1/(1-x^{2})^{1/2}$ 17. $(\arccos x)^{/} = - 1/(1-x^{2})^{1/2}$

18. $(arctgx)^{/} = 1/1+x^{2}$ 19. $(arcctgx)^{/} = - 1/1+x^{2}$

1.2 Механический и геометрический смысл производной

Механический смысл производной – это когда производная функции y=f(x) в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью y=f(x).

И. Ньютон впервые сформулировал, что с позиции механики мгновенная скорость прямолинейно движущейся точки есть первая производная от пути во времени, а её мгновенное ускорение есть первая производная от скорости по времени или вторая производная от пути по времени.

Пример:

Найти скорость спринтера через 2 сек. после старта, если его путь изменяется по формуле: $S(t)= t^2/2*(9/4 – t/3)$.

Решение

Воспользуемся следующей формулой: $(U * V)' = U' * V + U * V'$

$V= dS/dt = t*(9/4 – t/3)+t^2/2*(- 1/3) = - t^2/3+9/4*t-t^2/6=-t^2/2+9/4*t= t/4(9-2t)$.

$V(2)=2/4(9-2*2)=2{,}5$(м/с),

Таким образом, на 2-ой секунде бега спринтер имеет скорость 2,5 м/с.

Пример:

Теперь найдем ускорение спринтера в начале бега при t=0.

Решение

Воспользуемся следующей формулой: $(U + V)' = U' + V'$

$A=dV/dt =(-t^2/2+9/4*t)' = - t+9/4$, $a(0)= - 0+9/4=2{,}25$(м/с),

Таким образом, в начале бега спринтер имел ускорение 2,25м/с.

В медицине и биологии, используя производную, можно определить скорость изменения различных параметров системы или процесса в живом организме.

Пример:

При воздействии внешней среды давление на поверхность тела с течением времени меняется по закону: **$p = (3t^2 - t +2)$** мм. рт.ст. Определить с какой скоростью изменяется давление на 10-ой секунде.

Решение

$$p' = dp/dt = (3t^2 - t + 2)' = (6t - 1) \text{ мм. рт.ст./с}$$

$$p(10) = 6 * 10 - 1 = 59 \text{ мм. рт.ст./с}$$

Итак, в момент времени t=10с. давление изменяется со скоростью 59 мм. рт.ст. в секунду.

Геометрический смысл производной – это производная функции **y** в заданной её точке есть **тангенс угла наклона касательной,** проведенной в этой точке с положительным направлением оси ОХ. Как правило, при решении задач весь геометрический смысл производной сводится в составлении уравнения нормали и касательной к кривой **$y = f(x)$** в точке с абсциссой x_0.

Пример:

Задача: Составить уравнение нормали и касательной к данным кривым в точке с абсциссой x_0. $\mathbf{y = 2x^2 - 3x+1,\ x_0=1;\ y=(x^2 - 3x+3)/3,\ x_0=3.}$

Решение

Уравнение нормали имеет вид: $\mathbf{y - y_0 = - 1/y0 *(x - x_0)}$

Имеем: $y_0 = 2*1^2 - 3*1+1=0$

$y^/= (2x^2 - 3x+1)^/=4x - 3$

$y^/_0=4*1- 3=1$

Получаем уравнение нормали: **y = - (x -1)** или **y= - x+1.**

Уравнение касательной имеет вид: $\mathbf{y - y_0 = y^/_0*(x - x_0)}$

Имеем: $y_0 = (3^2 - 3*3+3).3=1$

$y^/= ((x^2 - 3x+3)/3)^/=(2x - 3)/3$

$y^/_0=(2*3- 3)/3=1$

Получаем уравнение касательной: **y – 1 = (x – 3)** или **y= x- 2.**

1.3 Дифференциал функции, полный дифференциал.

Если приращение функции y=f(x): dy=f(x+dx)-f(x), то соответствующее приращению аргумента dx, может быть представлено в виде dy=f(x+dx)-f(x)=

Adx + q(dx), где A не зависит от dx, но зависит от x, то функция y=f(x) называется дифференцируемой в точке x. Таким образом, q(dx) – бесконечно малая величина, а A = df(x)/dx – главная линейная часть приращения дифференцируемой функции и называется **дифференциалом.**

Дифференциал df(x) является функцией двух аргументов – x и dx. Рассмотрим функцию y=x , убедимся, что дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. Лейбниц предложил обозначить $dy/dx=y^{/}$ $dy/dx=y^{/}$ и назвать это **дифференциалом функции**.

Пример:

Найти дифференциал функции: y=2x + sinx.

Решение:

Подставив в формулу $dy/dx=y^{/}$ получим: dy=(2 + cosx)dx.

Итак, формулами для нахождения дифференциала будут формулы для нахождения производной, где вместо знака производной перед функцией будет стоять символ d.

Полный дифференциал функции – это дифференциал функции с несколькими независимыми переменными.

Имеет следующий вид: **df=df/dx*dx+df/dy*dy+df/dz*dz**

Пример:

Найти полный дифференциал следующей функции: $U(x,y,z)=\ln(x^3+y^2+z^2)$.

Решение

$$dU(x,y,z)= 3x^2/(x^3+y^2+z^2)*dx+ 2y/(x^3+y^2+z^2)*dy+ 2z/(x^3+y^2+z^2)*dz$$

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства.

Интегральное исчисление – раздел математики, в котором изучаются свойства и способы вычисления интегралов и их приложения к решению различных математических, физических и других задач. В систематической форме интегральное исчисление бюло предложено в 17 веке И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Функция F(x) называется **первообразной функцией для данной функции f(x),** если для любого x из области определения f(x) выполняется равенство: $F^{/}(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

Множество F(x) +C всех первообразных функций для данной функции f(x), где C принимает все возможные числовые значения, называется **неопределённым интегралом от функции f(x)** и обозначается символом:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, по определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

C – произвольная постоянная;

f(x) – подынтегральная функция;

f(x)dx – подынтегральное выражение.

Неопределённый интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подинтегральному выражению, производная равна подинтегральной функции.

Основные свойства неопределённого интеграла

1.Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d / dx(\int f(x)dx) = f(x).$$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтыгральному выражению:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от производной функции отличается от самой функции только на постоянную величину:

$$\int f^{/}(x)dx = f(x) + C.$$

4.Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

5. Неопределённый интеграл от суммы функции равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

6. Неопределенный интеграл от разности функции равен разности интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

Основные формулы неопределённых интегралов

$$1.\int k\,dx = kx + C$$

$$2.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,(n \neq -1)$$

$$3.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5.\int e^x dx = e^x + C$$

$$6.\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$7.\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$8.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$9.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$10.\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$$

$$11.\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$12.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$13.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$$

Пример:

Непосредственное интегрирование

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int (7\cos x - 3\sin x)dx = 7\sin x + 3\cos x + C$$

Пример:

Интегрирование разложением

$$\int \frac{3x^2 + 5x^3 - 4x^5}{x^3} dx = \int (\frac{3}{x} + 5 - 4x^2)dx = 3\ln x + 5x - 4\frac{x^3}{3} + C$$

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4-1}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int \frac{(1+x^2)(1-x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1-x^2)dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + arctgx + C$$

2.2 Методы интегрирования.

Рассмотрим два метода интегрирования: МЕТОД ПОДСТАНОВКИ, МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ.

Метод подстановки

Наиболее общим приёмом интегрирования функций является ***метод подстановки*** , который применяется тогда, когда искомый интеграл не является табличным, но путем ряда элементарных преобразований он может быть сведен к табличному.

Метод подстановки основан на применении следующей формулы:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

где x= φ(t) – дифференцируемая функция от t, производная которой $\varphi'(t)$ сохраняет знак для рассматриваемых значений переменных.

Сущность применения этой формулы состоит в том, что в данном интеграле переменную x заменяют переменной t.

Пример:

Найти интеграл

$$\int \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx$$

Применим подстановку: u=arctg(x), тогда du=dx/1+x^2

Подставляя полученные значения в искомый интеграл получим:

$$\int \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx = \int udu = \frac{u^2}{2}$$

Теперь подставив значение u в полученное выражение получим решение искомого интеграла:

$$\int \frac{arctg(x)}{1+x^2}dx = \frac{arctg^2(x)}{2} + C$$

Метод интегрирования по частям

Из дифференциального исчисления известно, что если u и v – дифференцируемые функции от x, то **d(uv) = udv+vdu.** Отсюда **udv= d(uv) - vdu.**

Интегрируя обе части этого равенства, имеем

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Интегрированием по частям называется интегрирование с помощью полученной формулы.

Основные случаи, когда применяется данный способ интегрирования:

1. Подынтегральная функция содержит произведение многочлена от x на показательную функцию от x или произведение многочлена от x на sin(x) или cos(x), или произведение многочлена от x на ln(x).
2. Подынтегральная функция представляет собой одну из обратных тригонометрических функций arcsin(x), arccos(x) и тд.
3. Подынтегральная функция есть произведение показательной функции на sin(x) или cos(x).

Пример:

Найти интеграл

$$\int x\sin(x)dx$$

Положим u = x, dv = sin(x)dx, тогда du = dx, v = - cos(x). Отсюда

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

2.3 Определенный интеграл, основные свойства

Приращение первообразных функций F(x)+C при переходе аргумента x от значения x=a к значению x=b, равное разности F(b)- F(a), называется определенным интегралом и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Данное равенство называется формулой Ньютона – Лейбница. Предполагается при этом, что подынтегральная функция f(x) непрерывна при всех значениях x, удовлетворяющих условиям a<x<b.

Основные свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = \int_b^a f(x)dx$$

$$2. \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$3. \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$4. \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$5. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример:

Найти определённый интеграл

$$\int_2^4 x\,dx$$

Решение

$$\int_2^4 x\,dx = \frac{x^2}{2} = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = 8 - 2 = 6$$

3.1 Определение дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения с частными производными.

Дифференциальным уравнением – называют уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y=f(x) и ее производные любых порядков y, $y^{/}$, $y^{//}$,$y^{///}$,…y^{n} или дифференциалы, т.е. уравнение вида: F(x, y, $y^{/}$, $y^{//}$,$y^{///}$,…y^{n})=0

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным,** если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Если функция U=f(x,y,z,…t) зависит от двух и большего числа независимых переменных, то уравнение будет содержать частные производные и называется **дифференциальным уравнением с частными производными**.

В дифференциальное уравнение могут входить производные разных порядков, в зависимости от этого различают уравнения 1-го, 2-го и т.д. порядков. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциальных уравнений называется любая функция y = f(x), обращающая это уравнение в тождество.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является разыскание всех решений данного уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла. Поэтому решение дифференциального уравнения называют также его интегралом, а процесс поиска всех решений – интегрированием дифференциального уравнения.

Запишем дифференциальное уравнение вида: $f(x)dx + g(y)dy = 0$

где $g(y)$ – функция только одной переменной y,

$f(x)$ - функция только одной переменной x.

Чтобы решить данное уравнение необходимо проинтегрировать обе части равенства: $f(x)dx = - g(y)dy$

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Пример:

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

$$\int y dy = -\int dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x + c$$

$$y = \sqrt{2(c - x)}$$

2. $$\frac{dy}{dx} = x^2 + \sin x$$

$$dy = (x^2 + \sin x)dx$$

$$y = \int (x^2 + \sin x)dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$$