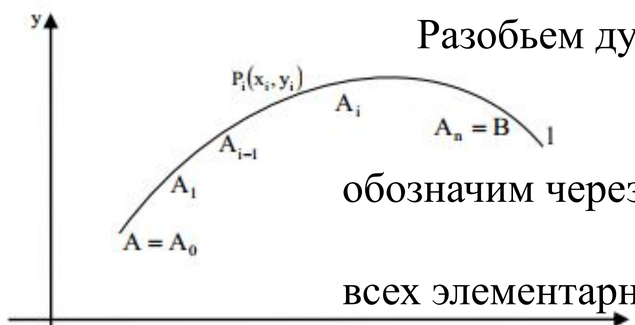
Лекция 3. Криволинейный интеграл по длине дуги

3.1. Определение криволинейного интеграла первого рода (или по длине дуги) и его свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривая линия L называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная прямая, непрерывно меняющаяся вдоль кривой линии. *Кусочногладкой* кривой называется непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кусков кривой линии.

Пусть на кусочно-гладкой кривой L взята дуга $\overset{\smile}{AB}$, вдоль которой определена функция f(P)=f(x, y).



Разобьем дугу $\overset{\smile}{AB}$ произвольн ɔбразом на n элементарных дуг $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}\ \left(i = \overline{1, n}\right)$, длины которых обозначим через ΔL_i . Пусть max ΔL_i -наибольшая из длин всех элементарных дуг. На элементарной дуге $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ ерем произвольную точку $P_i(\xi_i,\eta_i)$, вычислим значение функции в этой точке и умножим его на длину ΔL_i − меру элементарной дуги . Составим сумму таких произведений по всем элементарным дугам

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i . \qquad (1)$$

Сумму S_n называют *интегральной суммой* для функции f(x, y) по дуге $\overset{\smile}{AB}$. Каждому способу разбиения дуги на элементарные части и выбору в них точек P_i отвечает определенная интегральная сумма S_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при стремлении max ΔL_i к нулю, т.е. При неограниченном увеличении числа n элементарных дуг, интегральные суммы (1) стремятся к конечному пределу, который не зависит ни от способабразбиения дуги на элементарные части, ни от выбора точки P*i* в них, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции f(P) по дуге $\overset{\smile}{AB}$ и обозначается символом

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(P)dL \quad \text{или} \quad \int_{\overset{\smile}{AB}} f(x, y)dL .$$

3.1. Определение криволинейного интеграла первого рода (или по длине дуги) и его свойства. Продолжение

Таким образом, по определению $$\int\limits_{\smile{AB}} f(P)dL = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i \,. \qquad (2)$$

В выражении $\int\limits_{\smile{AB}} f(x,y)dL$ менные x и y не независимы, а связаны условием: точка (x, y) лежит на кривой AB.

***Теорема (**существования криволинейного интеграла первого рода**.)** Если функция f(x, y) непрерывна вдоль кусочно-гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл (2) существует.

Интеграл (2) в задачах физики и механики численно выражает массу материальной кривой AB, которая распределена вдоль нее с линейной плотностью ρ = f(P) = f(x, y). В самом деле, массу Δm_i

дуги $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ длины ΔL_i можно принять равной приближенно массе дуги с постоянной плотностью $f(P_i)$, такой, как в точке P_i , т.е. $\Delta m_i \approx f(P_i)\Delta L_i$. Суммируя по всем элементарным дугам найдем приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i \,.$$

$$m = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta L_i = \int\limits_{AB} f(x,y)dL \,. \qquad (3)$$

Свойства криволинейных интегралов аналогичны свойствам определенных интегралов. Выполняются свойства линейности, монотонности, аддитивности, оценка по модулю, теорема о среднем. Вместе с тем следует выделить особое свойство:

Теорема. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не меняет своего значения, т.е. $$\int\limits_{\smile{AB}} f(P)dL = \int\limits_{\smile{BA}} f(P)dL \,.$$

3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Так как дифференциал длины дуги в декартовых координатах имеет вид:

1) если дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана в двухмерном пространстве, т.е. на плоскости - $dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

2) если дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана в трехмерном пространстве - $dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

то вычисление криволин. интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла.

а) если гладкая кривая AB задана на плоскости параметрическими уравнениями

$x=x(t),\quad y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$ то $dx=x'(t)\cdot dt,\ dy=y'(t)\cdot dt,$ тогда $dL=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$

$$\int_{AB} f(x,y)dL=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt; \qquad (4)$$

б) если гладкая кривая AB задана явным уравнением

$y=\varphi(x),\ a\le x\le b,$ то $dL=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx=\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\cdot dx$

$$\int_{AB} f(x,y)dL=\int_{\alpha}^{\beta} f(x,\varphi(x))\cdot\sqrt{1+\varphi'(x)^2}dx; \qquad (5)$$

в) если гладкая кривая AB задана в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho(\phi)$, $\phi_1\le\phi\le\phi_2$, то

$dL=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\cdot d\varphi$ как $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, то

$$\int_{AB} f(x,y)dL=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi. \qquad (6)$$

При переходе от криволинейного интеграла к определенному переменная, выбранная в качестве основной, должна пробегать промежуток своего изменения в сторону возрастания, элемент dL длины дуги должен быть положительным.

Если линия AB кусочно-гладкая, то ее нужно разбить на отдельные части и интеграл вычислить, как сумму интегралов, взятых по этим частям кривой.

3.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Пример

ПРИМЕР. Найти массу дуги $\overset{\cup}{AB}$ цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ между точками с абсциссами $x_A = 0$, $x_B = a$, если в каждой точке линейная плотность $\rho(x, y) = \frac{a}{y}$.

Согласно формуле (3) имеем $m = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \frac{a}{y}\,dL$.

Исходя из данного уравнения кривой, преобразуем криволинейный интеграл в определенный с переменной x в соответствии с формулой (5):

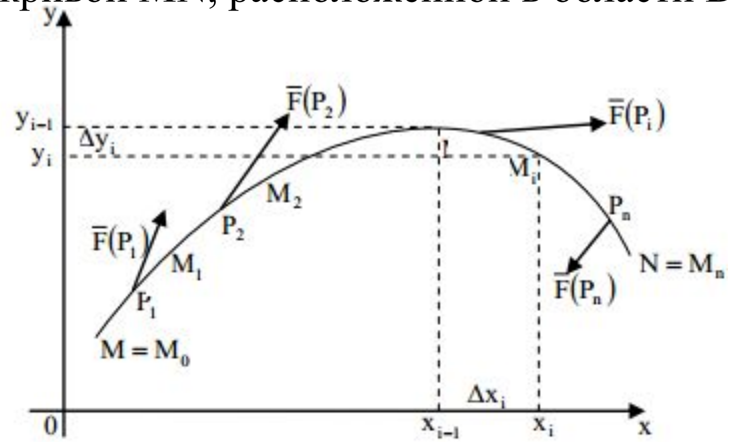
$$y'(x) = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}, \qquad dL = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}}\,dx = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx \quad (\text{т.к. } \mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1),$$

$$m = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \frac{a}{y}\,dL = \int\limits_{x_A}^{x_B} \frac{a}{a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = \int\limits_0^a dx = a.$$

3.3. Задача о работе силового поля. Определение криволинейного интеграла второго рода (или по координатам)

Рассмотрим плоское силовое поле, т.е. некоторую плоскую область D в плоскости xOy, к каждой точке P которой приложена сила $\vec{F}(P)$. Тот факт, что сила $\vec{F}$ зависит от точки ее приложения, записывают в виде: $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$. Проекции вектора силы $\vec{F}$ обозначим через X и Y; они также являются функциями переменных x и y. Тогда $\vec{F} = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$.

Определим работу этого силового поля при перемещении материальной точки вдоль некоторой кривой MN, расположенной в области D



Из физики известно, что если сила $\vec{F}$ постоянна (и по величине и направлению), а путь $\overline{MN}$ прямолинеен, то соответствующая работа равна произведению величины этой силы на косинус угла между силой и направлением $\overline{MN}$, т.е. работа A равна скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и MN , т.е. $\vec{F} \cdot \overline{MN}$.

Найдем теперь выражение для работы в общем случае, т.е. когда сила $\vec{F}$ переменна, а путь MN криволинеен.

Разобьем произвольным образом дугу $\breve{MN}$ на n малых дуг точками $M = M_0,\ M_1, \dots, M_i, \dots, M_n = N$, длины которых ΔL_i. Впишем в кривую MN ломаную $M_0, M_1, \dots, M_n$, заменив каждый криволинейный участок $M_{i-1}\overset{\cup}{}M_i$ прямолинейным вектором перемещения $\overline{M_{i-1}M_i}$. А силу $\vec{F}$, которая, вообще говоря, меняется и по величине и по направлению от точки к точке, условимся считать постоянной вдоль каждого звена ломаной и равной силе, приложенной в точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$ дуги $M_{i-1}\overset{\cup}{}M_i$:

$$\vec{F}(P_i) = X(\xi_i, \eta_i)\vec{i} + Y(\xi_i, \eta_i)\vec{j}.$$

3.3. Задача о работе силового поля. Определение криволинейного интеграла второго рода (или по координатам). Продолжение

Тогда работу силы вдоль дуги $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ можно принять приближенно равной работе силы $\vec{F}(P_i)$ вдоль вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$, которая, как было сказано, равна скалярному произведению $\overline{F(P_i)}\cdot\overline{M_{i-1}M_i}$.

Проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси координат соответственно равны $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Следовательно, имеет место представление

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \cdot \vec{i} + \Delta y_i \cdot \vec{j}.$$

Выражая скалярное произведение $\overline{F(P_i)}\cdot\overline{M_{i-1}M_i}$ в координатной форме, получаем

$$\overline{F(P_i)}\cdot\overline{M_{i-1}M_i} = X(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

Суммируя эти выражения по всем звеньям ломаной, найдем приближенное значение работы A вдоль кривой MN:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}\vec{F}(P_i)\cdot\overline{M_{i-1}M_i} = \sum_{i=1}^{n}\left[X(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]. \qquad (7)$$

За точное значение работы A принимают предел полученной суммы при стремлении к нулю $\max \Delta L_i$ - максимальной из длин дуг $\overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$.

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}\left[X(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right].$$

3.3. Задача о работе силового поля. Определение криволинейного интеграла второго рода (или по координатам). Продолжение

Тогда, в общем виде. Пусть на плоскости задана гладкая линия MN. Установим на ней определенное направление движения, которое происходит от M к N. Кривую с установленным на ней направлением движения назовем *ориентированной* кривой.

Пусть на кривой MN заданы две функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$,

Иначе, вектор-функция

$\overline{F}(x,y)=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$. Разобьем эту кривую на n участков точками $M=M_0, M_1, \ldots, M_n=N$ и в каждом из них выберем по произвольной точке $P_i(\xi_i, \eta_i)$ (в частности, эти точки могут совпадать с концами участков). Значения функции в точках P_i будем умножать теперь не на длины частичных дуг ΔL_i, а на их проекции на координатные оси: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ (рис. 1.28). (Если движение по проекции происходит в сторону увеличения x (или y), то проекцию Δx_i (или Δy_i) части ΔL_i считаем положительной, в противном случае – отрицательной).

Составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left[X(P_i)\Delta x_i + Y(P_i)\Delta y_i\right]. \qquad (8)$$

Эту сумму называют *интегральной* суммой для вектор-функции $\overline{F}(x,y)$ по линии MN.

3.3. Задача о работе силового поля. Определение криволинейного интеграла второго рода (или по координатам). Продолжение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при стремлении к нулю $\max \Delta L_i$ существует конечный предел интегральной суммы (8), не зависящий ни от способа разбиения дуги MN на элементарные части, ни от выбора в каждой из них точки P_i, то этот предел называют криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $\bar{F}(x,y)$ по линии MN и обозначают символом

$$\int\limits_{MN} X(P)dx + Y(P)dy \quad \text{или} \quad \int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy .$$

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta L_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n}\left[X(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]. \qquad (9)$$

Если кривая $L = MN$ замкнутая, то для обозначения интеграла используют символ $\oint\limits_{L} X(x,y)dx + Y(x,y)dy$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $Y(x,y) \equiv 0$, то интеграл принимает вид $\int\limits_{MN} X(x,y)dx$ и называется криволинейным интегралом по координате x. Если $X(x,y) \equiv 0$, то $\int\limits_{MN} Y(x,y)dy$ называют криволинейным интегралом по координате y.

Интеграл (9) можно записать в виде суммы двух криволинейных интегралов по координатам x и y

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{MN} X(x,y)dx + \int\limits_{MN} Y(x,y)dy,$$

то его называют еще *составным криволинейным интегралом по координатам*.

3.3. Задача о работе силового поля. Определение криволинейного интеграла второго рода (или по координатам). Продолжение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Этот интеграл называют также линейным интегралом вектора $\vec{F}(\vec{r})$. А если кривая L - замкнутая, то криволинейный интеграл $\oint\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$ называют *циркуляцией* вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру.

Работа силового поля при перемещении материальной точки по кривой MN выражается криволинейным интегралом второго рода

$$A = \int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy, \quad \text{в векторной форме} \quad A = \int\limits_{MN} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Если вектор $\vec{F}(x,y)$ задает силовое поле, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу этого поля вдоль линии MN. В этом состоит *физический смысл* криволинейного интеграла второго рода.

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода для вектор-функции

$$\vec{F}(x,y,z) = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k},$$

заданной вдоль пространственной кривой MN, записывают так:

$$\int\limits_{MN} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz = \int\limits_{MN} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

3.4. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема. Пусть кривая MN задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, причем функции $x(t),\ y(t)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка на отрезке $t \in [\alpha, \beta]$, где $\alpha = t_M$ и $\beta = t_N$ - значения параметра t, соответствующие точкам M и N. Тогда для всякой вектор-функции

$$\overline{F}(x, y) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j},$$

непрерывной вдоль кривой MN, существует криволинейный интеграл и имеет место равенство

$$\int_{MN} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[x(t), y(t)]x'(t) + Y[x(t), y(t)]y'(t)\}dt. \tag{10}$$

Сформулированная теорема обобщается аналогичным образом на пространственный случай, когда линия MN задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

В этом случае имеет место равенство

$$\int_{MN} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$

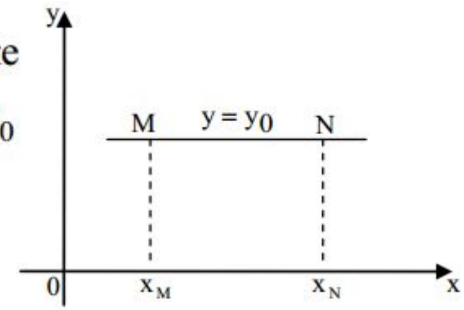
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{X[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Y[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + Z[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt \tag{11}$$

3.4. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода. Продолжение

Частные случаи формулы (10):

Если кривая MN задана уравнением $y = y(x)$, то

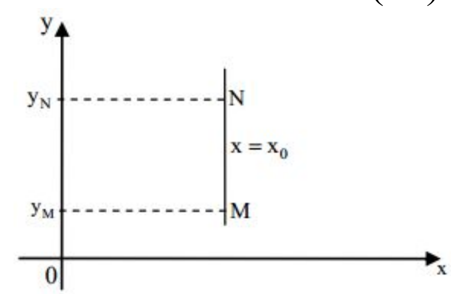
$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{x_M}^{x_N} \{X[x, y(x)] + Y[x, y(x)]y'(x)\}dx, \qquad (12)$$



где $x = x_M$ отвечает начальной точке M кривой, а $x = x_N$ - ее конечной точке N. Если, в частности, кривая MN – отрезок горизонтальной прямой $y = y_0$, то вдоль него $y' \equiv 0$ и $\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{x_M}^{x_N} X(x, y_0)dx$.

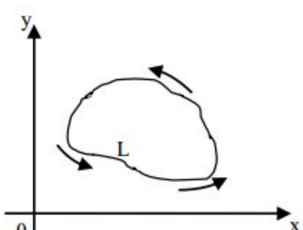
Если кривая MN задана уравнением $x = x(y)$, где y пробегает отрезок $[y_M, y_N]$, то

$$\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{y_M}^{y_N} \{X[x(y), y]x'(y) + Y[x(y), y]\}dy. \qquad (13)$$



В частности, когда MN – отрезок вертикальной прямой $x = x_0$, то $x'(y) \equiv 0$ и $\int\limits_{MN} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int\limits_{y_M}^{y_N} Y(x_0, y)dy$.

В случае замкнутого контура интегрирования условимся брать направление движения по кривой L так, чтобы область, ограниченная этой кривой, оставалась слева. Такое направление интегрирования называют *положительным*. Перемещение в противоположном направлении называют *отрицательным*.



3.5. Свойства криволинейного интеграла второго рода.

Криволинейный интеграл второго рода, наряду с теми свойствами, которые аналогичны свойствам интеграла первого рода, обладает следующим отличительным свойством:

при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл изменяет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int\limits_{MN} = -\int\limits_{NM} \quad \text{и} \quad \oint\limits_{L^+} = -\oint\limits_{L^-}$$

(здесь L^+ - замкнутый контур, обходимый в положительном направлении, L^- - контур, обходимый в отрицательном направлении).

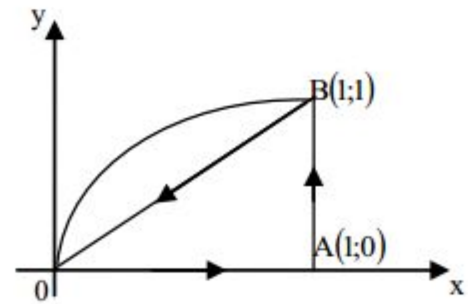
Пример

Вычислить $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, если в качестве пути интегрирования L берется одна из следующих линий, соединяющих точки $O(0;0)$ и $B(1;1)$:

а) отрезок прямой $y = x$;

б) дуга параболы $x = y^2$;

в) ломаная OABO, где $A(1;0)$



а) из уравнения линии OB y = x найдем dy = dx. Используя формулу (12), получим

$$\int\limits_{OB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{x_O}^{x_B}\left(x^2 + x^2\right)dx = 2\int\limits_0^1 x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

б) воспользуемся формулой (13), выбрав в качестве переменной интегрирования в определенном интеграле переменную y .

Из уравнения кривой OB $x = y^2$ находим $dx = 2ydy$; при движении от точки O к точке B y меняется в пределах от 0 до 1. Следовательно,

$$\int\limits_{\overset{\cup}{OB}} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{y_O}^{y_B}\left(y^2\cdot 2y + y^4\right)dy = \left(\frac{y^4}{2} + \frac{y^5}{5}\right)\bigg|_0^1 = \frac{7}{10};$$

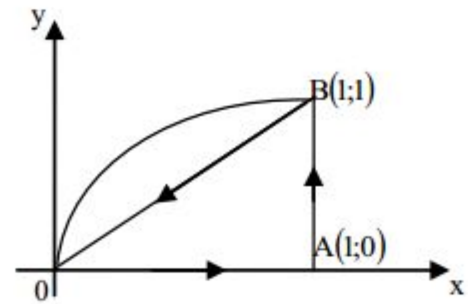
Пример

Вычислить $\int\limits_L y^2dx + x^2dy$, если в качестве пути интегрирования L берется одна из следующих линий, соединяющих точки $O(0;0)$ и $B(1;1)$:

а) отрезок прямой $y = x$;

б) дуга параболы $x = y^2$;

в) ломаная OABO, где $A(1;0)$



в) контур интегрирования разбиваем на три участка OA, AB, BO, обходя его против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении: $\oint\limits_{L^+} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$.

Вдоль OA имеем $y = 0,\ dy = 0,\ 0 \le x \le 1$, так что $\int\limits_{OA} y^2dx + x^2dy = 0$.

Вдоль AB имеем $x = 1,\ dx = 0,\ 0 \le x \le 1$, поэтому

$$\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} dy = \int\limits_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1.$$

Вдоль BO имеем $y = x,\ dy = dx$ и

$$\int\limits_{BO} y^2dx + x^2dy = \int\limits_{y_B}^{y_O} (x^2 + y^2)dx = \int\limits_1^0 2x^2dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^0 = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$\oint\limits_L y^2dx + x^2dy = 0 + 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$