ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- **Теория вероятностей -** раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: события, величины, их свойства и операции над ними.

- **Теория** вероятностей изучает вероятностные закономерности <u>массовых</u> <u>однородных</u> случайных событий.

- У неё нет цели что-либо предсказать!

- <u>Если в одинаковых условиях </u>проводить одно и тоже испытание сотни и тысячи раз, то в каждом конкретном случае будет прослеживаться чёткая закономерность, описываемая вполне жёсткими законами.

- ***Примеры применения теории вероятностей***
- Кидание монеты
- Стрельба по мишени
- «Вытягивание» экзаменационного билета
- Игра в лотерею
- Рождение ребенка (мальчик/девочка)

ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть ***испытанием***.
- Результат этого действия или наблюдения называется ***событием***.
- События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *А, В, С, Д, … .*
- **Достоверным** называют событие, которое в результате испытания (осуществления определенных действий, определённого комплекса условий) обязательно произойдёт.
- **Невозможным** называют событие, которое заведомо не произойдёт в результате испытания $\overline{A}$.
- **Случайным** называется событие, если в результате испытания оно может, как произойти, так и не произойти.
- Принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно.

- События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.
- События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.
- События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.
- События называются **попарно несовместными**, если любые два из них несовместны.
- ***Полной системой*** событий A_1, A_2, A_3, … , A_n называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.
- **Равновозможными** называются события если при условии симметрии опыта ни одно из этих событий не является объективно более возможным (т.е. все события имеют равные “шансы”).

- **Пример.** В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными:

-достали пронумерованный шар *(А)*;
-достали шар с четным номером *(В)*;
-достали шар с нечетным номером *(С)*;
-достали шар без номера *(Д)*.
-Какие из них образуют полную группу?

- **Решение.**

А - достоверное событие;
Д - невозможное событие;
В и *С* - противоположные события.
Полную группу событий составляют *А* и *Д*, *В* и *С*.

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

- **Вероятность** — степень (относительная мера, количественная оценка) объективной возможности наступления события.
- Число, являющееся выражением меры возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *P(A)*.
- **Классическое определение вероятности:**

Вероятностью наступления события в некотором испытании называют отношение

где: n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий; m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию.

- Вероятность <u>достоверного</u> события равна единице

$$P(A)=m/n = n/n =1$$

- Вероятность <u>невозможного</u> события равно нулю

$$P(A)= m/n = 0/n = 0$$

- Вероятность <u>случайного</u> события имеет величину от нуля до единицы

$$0<P(A)<1$$

- **Пример.** В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?
- **Решение.** Общее число различных исходов есть *n*=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

- ***Суммой*** конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.
- Сумму двух событий обозначают символом А+В, а сумму *n* событий символом $A_1+A_2+ \ldots +A_n$.

- **Теорема сложения вероятностей.**
- Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

- **Следствие 1.** Если событие A_1, A_2, … ,A_n образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

- **Следствие 2.** Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

- **Пример**. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 10 - по 15000 руб, на 15 - по 10000 руб., на 25 - по 2000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

- **Решение**. Пусть А, В, и С- события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. так как события А, В и С несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0{,}3$$

ПОНЯТИЕ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

- Когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого - простейший пример связи между двумя событиями.

- Пусть *A* и *B* - два случайных события одного и того же испытания. Тогда условной вероятностью события *A* или вероятностью события А при условии, что наступило событие В, называют

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (P(B) \neq 0)$$

- Событие *A* называется ***независимым*** от события *B*, если наступление события *B* не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события *A*.

Пример. Пусть брошены две монеты. Найдем вероятность появления двух гербов. Мы имеем 4 равновероятных попарно несовместных исхода, образующих полную группу:

Г-Г Г-Н Н-Г Н-Н

Таким образом, *P(герб,герб)=1/4*.

Пусть теперь нам стало известно, что на первой монете выпал герб.

Как изменится после этого вероятность того, что герб появится на обеих монетах?

Так как на первой монете выпал герб, то теперь полная группа состоит из двух равновероятных несовместных исходов:

Г-Г Г-Н

Поэтому *при сделанных предположениях P(герб,герб)=1/2*.

Обозначим через *A* появление двух гербов, а через *B* — появление герба на первой монете.

Видно, что вероятность события *A* изменилась, когда стало известно, что событие *B* произошло.

Новую вероятность события *A*, в предположении, что произошло событие *B*, обозначают *PB(A)*.

Таким образом, *P(A)=1/4; PB(A)=1/2*

Теорема умножения вероятностей

- Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

- **Пример.** В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
- **Решение.** Пусть - из первой урны извлечен белый шар; - из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события   и независимы.

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad P(A_2) = \frac{7}{12}$$

$$P(A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$$

Статистическая вероятность

- Статистическая вероятность вводится в случае, когда нельзя говорить о равновозможности элементарных исходов, соображений симметрии.

- **Статистическая вероятность** - это относительная частота, с которой событие появляется внутри класса событий.

- **Относительная частота** - это отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний

$$W(A)=m/n$$

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

- **Комбинаторика** - раздел математики, в котором решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.

- Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются **перестановками** (***P_n*** **-** от фр. *permutation*- перестановка, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку).

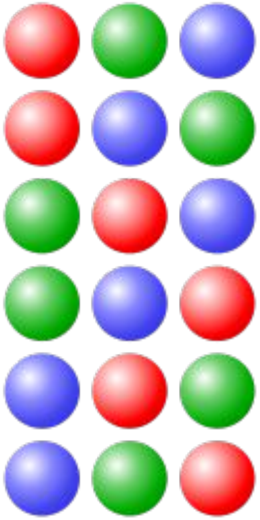
- Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!$$

0!=1 и 1!=1.

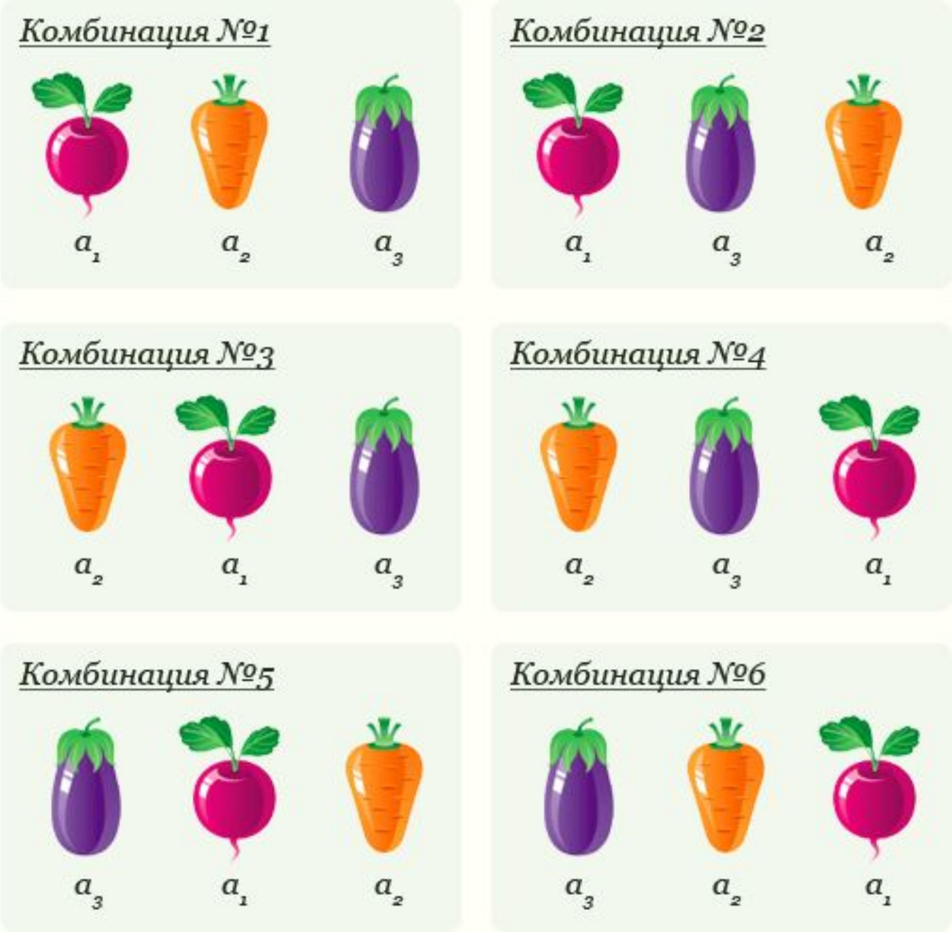


- **Пример.** Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

- **Решение.** Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$$

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$



- **Размещениями** A_m^n из *m* элементов в *n* в каждом называются такие комбинации, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения

- А - от фр. *Arrangement-* «размещение, приведение в порядок», где *m*- число всех имеющихся элементов, *n*- число элементов в каждой комбинации, полагают, что $n \leq m$.

- Число размещений можно вычислить по формуле

$$A_m^n = \underbrace{m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \ldots}_{n.множителей}$$

- т.е. число всех возможных размещений из *m* элементов по *n* равно произведению *n* последовательных целых чисел, из которых большее есть *m*.
- Или

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

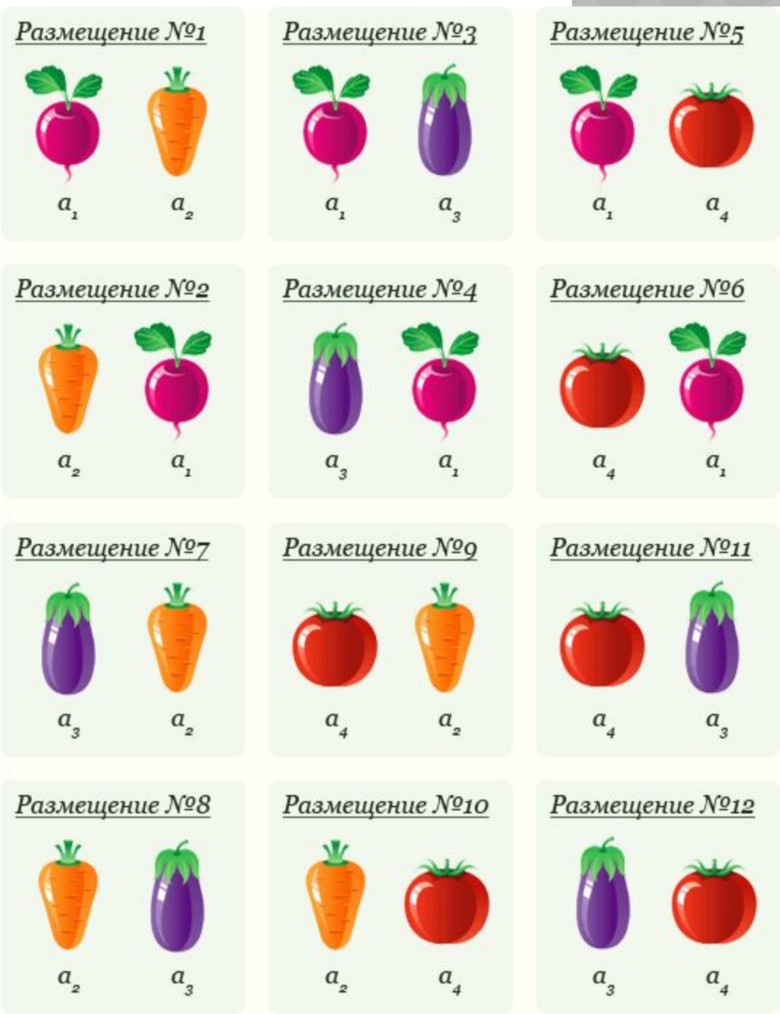
- Группы с одинаковым набором элементов расположенных в разном порядке считаются разными.

- **Пример.** Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

- **Решение.** Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$A_4^2 = 4 \cdot (4-1) = 12$$



- **Сочетаниями** C_m^n называются все возможные комбинации из *m* элементов по *n*, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

- (*C* - от фр. *combination*- сочетание, *m* и *n*-натуральные числа, причем *n* ≤*m*).

- В общем случае число сочетаний из *m* элементов по *n* равно числу размещений из *m* элементов по *n*, деленному на число перестановок из *n* элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

- Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

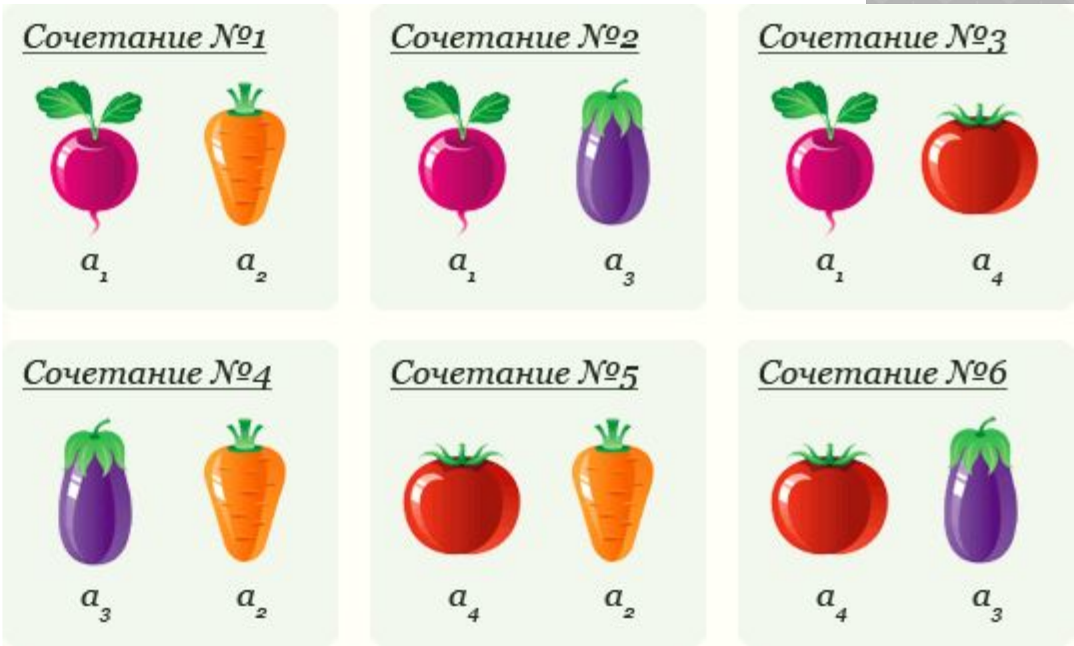
- Группы с одинаковым набором элементов расположенных в разном порядке считаются одинаковыми.

- **Пример.** В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

- **Решение.** Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^{4} способами.
- Находим по формуле

$$C_{25}^{4} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$$

$$C_{4}^{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}{(4-2) \cdot 1 \cdot 2} = 6$$



ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

- Если событие *A* может произойти только при выполнении одного из событий [illegible], которые образуют ***полную группу несовместных событий***, то вероятность события *A* вычисляется по формуле

[illegible]

- Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

- Рассмотрим полную группу несовместных событий [illegible], вероятности появления которых [illegible]. Событие *A* может произойти только вместе с каким-либо из событий [illegible], которые будем называть ***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности

[illegible]

- Если событие *A* произошло, то это может изменить вероятности гипотез [illegible].
- По теореме умножения вероятностей

[illegible]

- откуда [illegible]
- Аналогично, для остальных гипотез [illegible]

- Полученная формула называется ***формулой Байеса*** (***формулой Бейеса***).

- **Пример.** В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

- **Решение.** Обозначим через *B* событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через [illegible] обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.
- Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

предприятие	*доля продукции*	*высший сорт*
I	[illegible]	[illegible]
II	[illegible]	[illegible]
III	[illegible]	[illegible]

- Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

[illegible]

- **Пример.** Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность <u>попадания</u> в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень <u>не поражена</u>. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.
- **Решение.** Возможны три гипотезы:
- A_1 - на линию огня вызван первый стрелок,
- A_2- на линию огня вызван второй стрелок,
- A_3- на линию огня вызван третий стрелок.
- Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то

[illegible]

- В результате опыта наблюдалось событие *B* - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

[illegible]