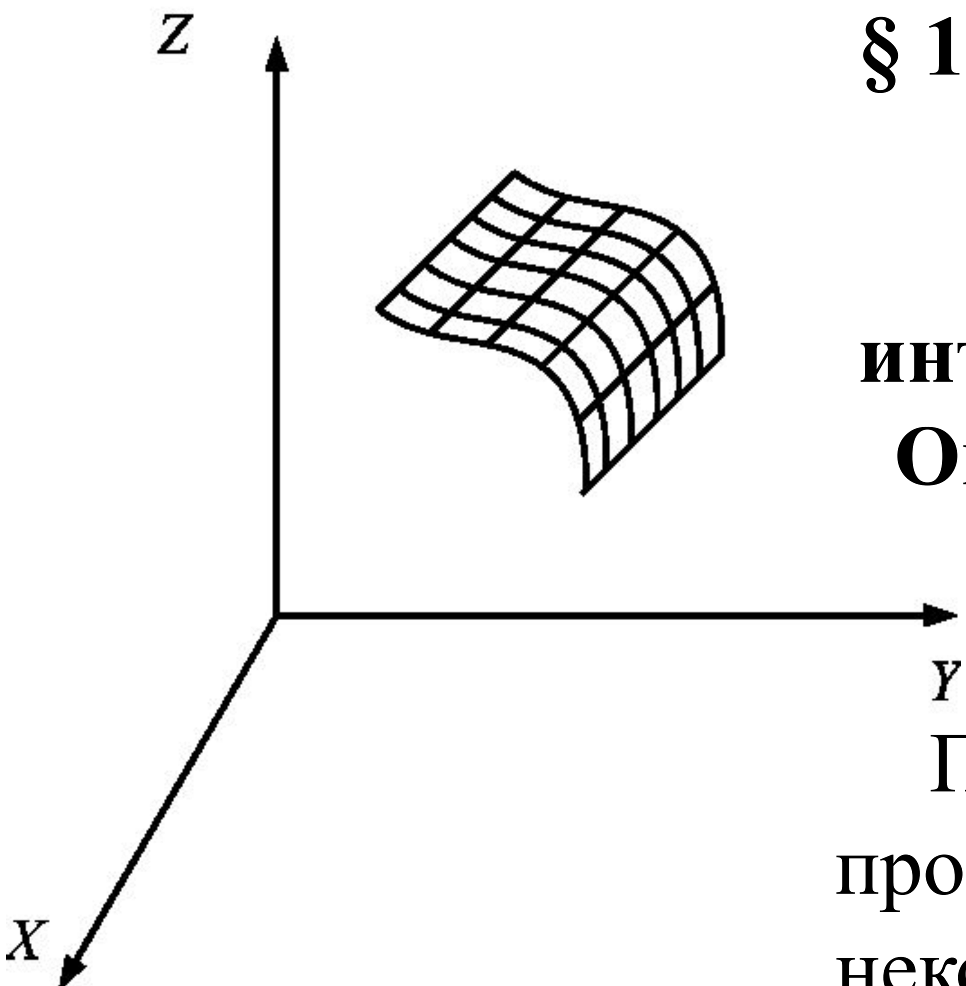
Лекция 29. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода, их свойства и вычисление. Связь между поверхностными интегралами 1 и 2 рода.

Поверхностные интегралы первого рода.



§ 1. Задача, приводящая к понятию поверхностного интеграла первого рода. Определение. Теорема существования. Свойства.

Пусть в трехмерном пространстве XYZ задана некоторая поверхность S.

На поверхности определена функция $f(x,y,z)$ – поверхностной плотности заряда.

Задача: найти заряд Q, который может находиться на поверхности S.

Для этого поверхность S разобьем на мелкие части $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ и диаметрами разбиения $d_1, d_2, \ldots, d_n$. В каждом из кусочков S_i возьмем точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ соответственно.

Найдем значение поверхностной плотности в этих точках: $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$.

Полный заряд, находящийся на поверхности

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

Сам заряд – физическая величина и не зависит от способности от способа разбиения и выбора точек P_i, а зависит от размеров поверхности и от функции плотности заряда. Поэтому вводят понятие поверхностного интеграла 1-го рода.

<u>Определение</u> (поверхностного интеграла 1-го рода). Число I такое, что для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ такое, что из неравенства $\max\limits_{i=1\ldots n} d_i < \delta_\varepsilon$ независимо от способа разбиения поверхности S и выбора точек $P_i \Rightarrow \left| I - \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \right| < \varepsilon$ называется поверхностным интегралом 1-го рода.

При этом само число I обозначается:

$$I=\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

Поверхностный интеграл равен заряду на поверхности S.

$$Q=\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS$$

<u>**Теорема**</u> **(существования).** Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке поверхности S, то существует $\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS$

При этом говорят, что функция $f\ (x,y,z)$ интегрируема.

Свойства поверхностных интегралов 1-го рода.

Будем считать, что интегралы стоящие в правых частях записанных ниже выражений существуют. Тогда выполняются следующие свойства.

1. **Однородность.**

$$\iint\limits_S c\cdot f(x,y,z)dS = c\cdot\iint\limits_S f(x,y,z)dS$$

c = const.

2. **Аддитивность относительно функции.**

$$\iint\limits_S \left[f_1(x,y,z)\pm f_2(x,y,z)\right]dS =$$

$$= \iint\limits_S f_1(x,y,z)dS \pm \iint\limits_S f_2(x,y,z)dS$$

3. **Аддитивность относительно поверхностей.**

$$\iint\limits_{S_1+S_2} f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS \pm \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)dS$$

4. Если функция $f(x,y,z) \geq 0$ и интегрируема на поверхности S, то:

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS \geq 0$$

5. Если функция $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iint\limits_{S} 1dS = S_{поверхности}$$

6. **Теорема о среднем.** Если $f\ (x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, то существует такая точка $\widetilde{P} \in S$, что:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = f\left(\widetilde{P}\right)\cdot S_{поверхности}$$

§ 2. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

<u>**Теорема**</u> **(о вычисление криволинейного интеграла первого рода).** Пусть $f\ (x,y,z)$ непрерывна на поверхности S, которая:

1. Задана уравнением $z = z(x,y)$ и однозначно проектируется в $D \in XOY$.

2. Имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в области D. Тогда:

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS =$$

$$= \iint_D f\big(x, y, z(x, y)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Доказательство.

Самостоятельно.

Замечание. В том случае, когда S однозначно проектируется в область D на плоскости XOZ и может быть выражена уравнением $y = y(x,z)$. Формула для вычисления интеграла имеет вид:

$$\iint_S f(x, y, z)dS =$$

$$= \iint_D f\big(x, y(x, z), z\big)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz$$

Если S однозначно проектируется в область D на плоскости YOZ и может быть выражена уравнением $x = x(y,z)$. Формула для вычисления интеграла имеет вид:

$$\iint_S f(x,y,z)dS =$$

$$= \iint_D f\big(x(y,z),y,z\big)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

Вычисление поверхностных интегралов 1-го рода сводится к вычислению двойных интегралов по области D в которую проектируется поверхность S.

§ 3. Применение поверхностных интегралов первого рода.

1. Для вычисления площади поверхности

$$\iint\limits_{S} dS = S_{поверхности}$$

2. Масса поверхности

$m = \iint\limits_{S} \mu(x, y, z) dS$, где: $\mu(x,y,z)$ – поверхностная плотность массы

3. Заряд на поверхности

$Q = \iint\limits_{S} q(x, y, z) dS$, где: $q(x,y,z)$ – поверхностная плотность заряда

4. Момент инерции поверхности относительно оси l.

$$J_l = \iint_S \mu(x,y,z) r^2(x,y,z)\,dS$$

где: $\mu(x,y,z)$ – поверхностная плотность массы,

$r(x,y,z)$ – расстояние от оси l.

5. Координаты центра тяжести поверхности.

$$X_C = \frac{\iint_S \mu(x,y,z)\,x\,dS}{m} \qquad Y_C = \frac{\iint_S \mu(x,y,z)\,y\,dS}{m}$$

$$Z_C = \frac{\iint_S \mu(x,y,z)\,z\,dS}{m}$$

где: m – масса поверхности.

§ 4. Ориентация поверхности. Ориентируемые поверхности.

Пусть в декартовой системе координат задана ограниченная поверхность S, такая что:

1) В каждой точке её существует касательная плоскость.

2) Она может быть задана функцией $z = z(x,y)$.

3) Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны.

Поверхности, обладающие свойством (3) называются гладкими поверхностями.

В силу задания поверхности каждой точкой $P_i \in S$, уравнение касательной плоскости имеет вид:

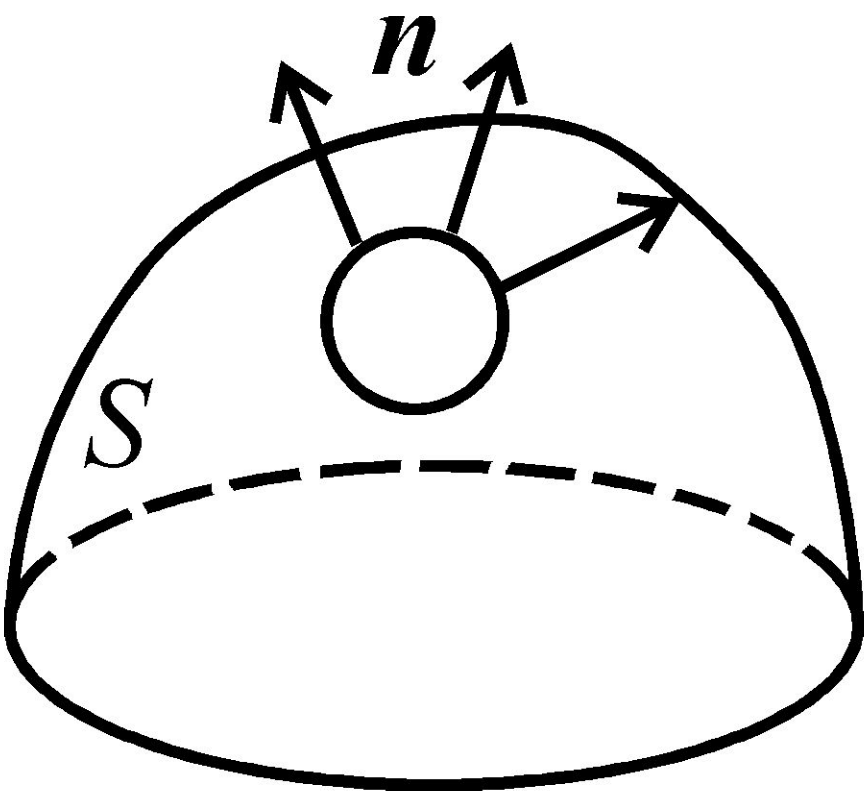
$$z - z_i = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i (y - y_i)$$

Нормаль к касательной плоскости является и нормалью к поверхности S в точке P_i. При этом единичная нормаль к поверхности может быть записана:

$$n = \frac{z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}}$$

<u>**Определение**</u> **(ориентируемой поверхности)**. Поверхность S, удовлетворяющая вышеуказанным свойствам, называется

ориентируемой, если обход по произвольному замкнутому контуру, лежащему на поверхности не меняет направление нормали.
При этом нормаль называют ориентацией поверхности.



- поверхность ориентируемая

Ориентируемые поверхности называются двусторонними поверхностями.
Нормалями к поверхности являются нормали, находящиеся по формуле:

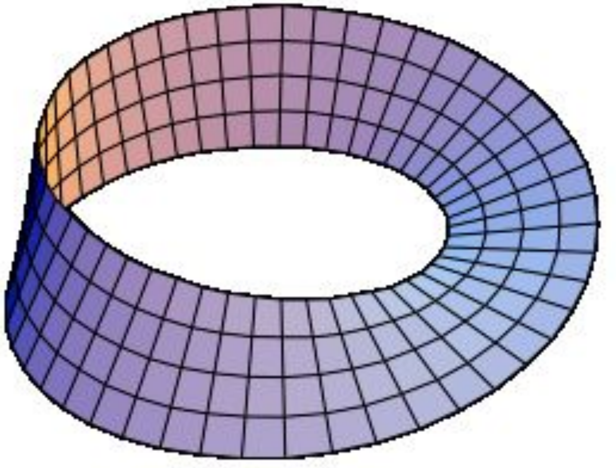
$$n_{\pm} = \pm \frac{z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j} - 1\vec{k}}{\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}}$$

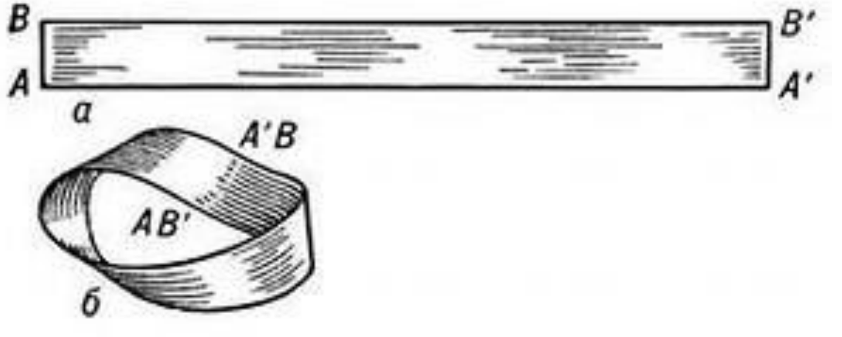
Знак «+» отвечает одной ориентации,
«-» противоположной ориентации.
Замечая, что $\left|\vec{n}\right| = 1; \quad \left(\vec{n} \cdot \vec{i}\right) = \left|\vec{n}\right|\left|\vec{i}\right|\cos\alpha$
легко видеть, что:

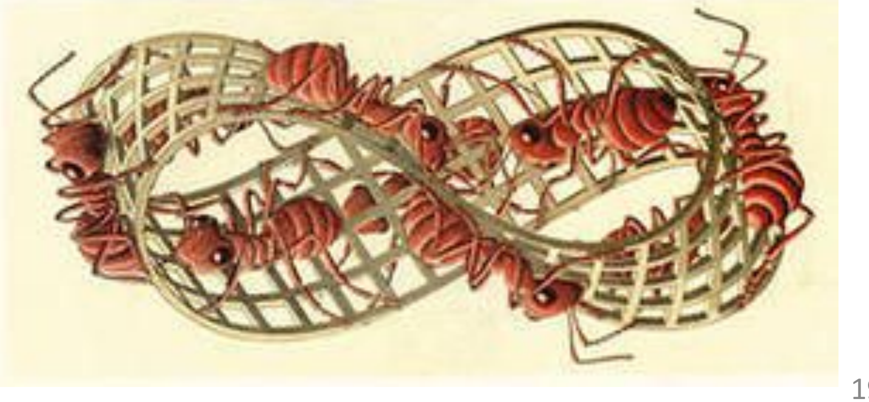
$$
\begin{cases}
\cos\alpha = \pm \dfrac{z'_x}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}} \\
\cos\beta = \pm \dfrac{z'_y}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}} \\
\cos\gamma = \pm \dfrac{z'_z}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}}
\end{cases}
$$

где: α, β, γ - углы, которые составляет вектор нормали с осями координат x, y, z.
cosα, cosβ, cosγ - направляющие косинусы нормали.

Неориентируемые поверхности являются односторонними, например лист Мёбиуса. Эта поверхность не является ориентированной. Такого типа поверхности рассматривать не будем.







Лист Мёбиуса (ле́нта Мёбиуса, петля́ Мёбиуса) — топологический объект, простейшая неориентируемая поверхность с краем, односторонняя при вложении в обычное трёхмерное Евклидово пространство . Попасть из одной точки этой поверхности в любую другую можно, не пересекая края.

Лента Мёбиуса была открыта независимо немецкими математиками Августом Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Бенедиктом Листингом в 1858 году. Модель ленты Мёбиуса может легко быть сделана: для этого надо взять достаточно вытянутую бумажную полоску и соединить концы полоски, предварительно перевернув один из них. В Евклидовом пространстве существуют два типа полос Мёбиуса в зависимости от направления закручивания: правые и левые (топологически они, однако, неразличимы).

Уравнения $x(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u, \quad y(u,v) = \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u, \quad z(u,v) = \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2},$

где $0 \leqslant u < 2\pi$ и $-1 \leqslant v \leqslant 1$. Эти формулы задают ленту Мёбиуса ширины 1, чей центральный круг имеет радиус 1, лежит в плоскости *x* - *y* с центром в (0,0,0). Параметр *u* пробегает вдоль ленты, в то время как *v* задает расстояние от края. В цилиндрических координатах $(r,\ \theta,\ z)$, неограниченная версия листа Мёбиуса может быть представлена уравнением:

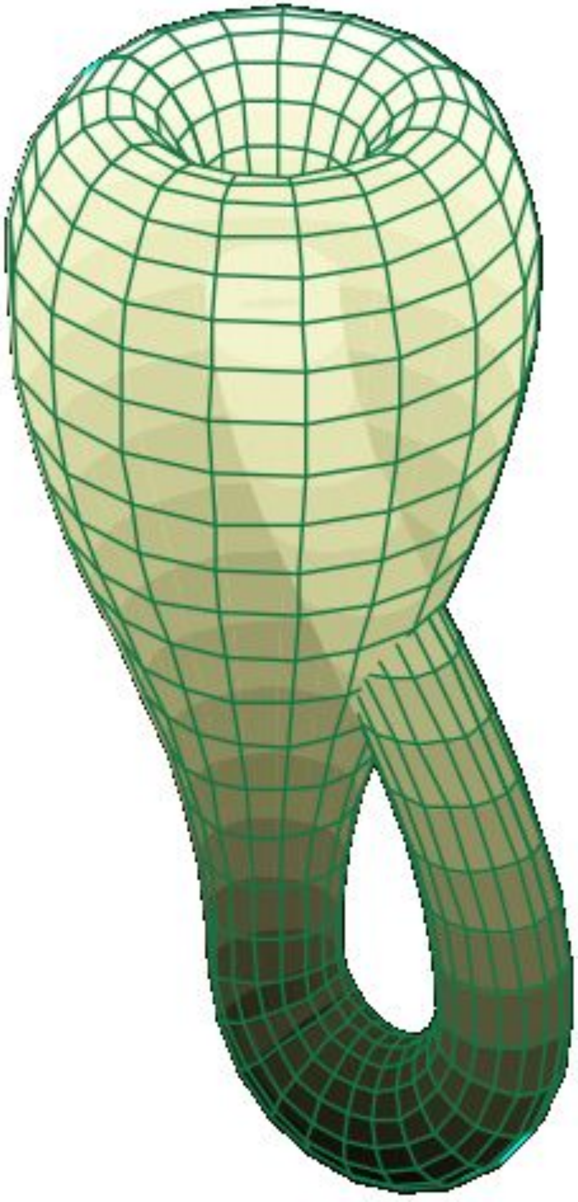
$$\log r \sin(\theta/2) = z \cos(\theta/2),$$

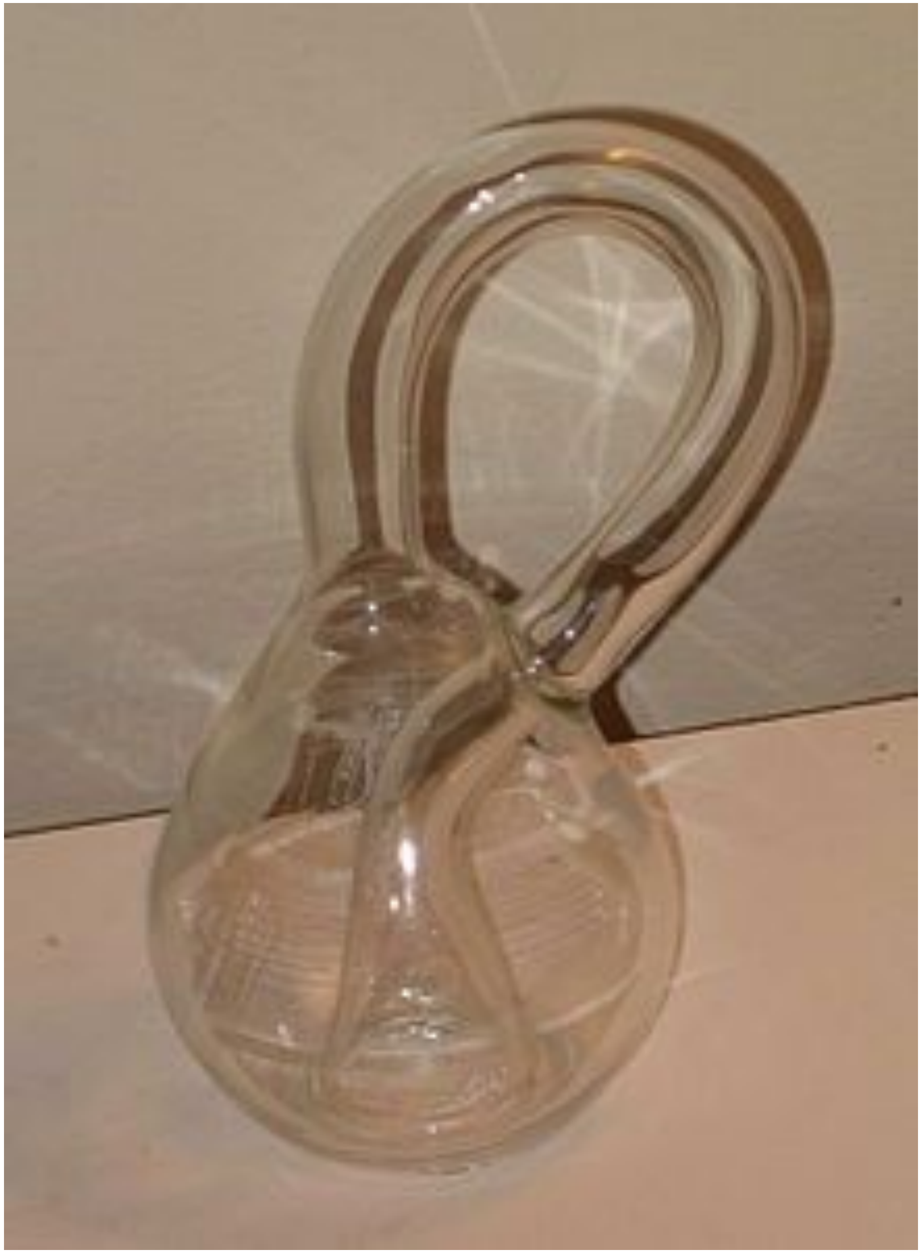
где функция логарифма имеет произвольное основание.

Бутылка Клейна — неориентируемая (односторонняя) поверхность, впервые описанная в 1882 г. немецким математиком Ф. Клейном. Она тесно связана с лентой Мёбиуса и проективной плоскостью. Название, по-видимому, происходит от неправильного перевода немецкого слова Fläche (поверхность), которое в немецком языке близко по написанию к слову Flasche (бутылка); затем это название вернулось в таком виде в немецкий.

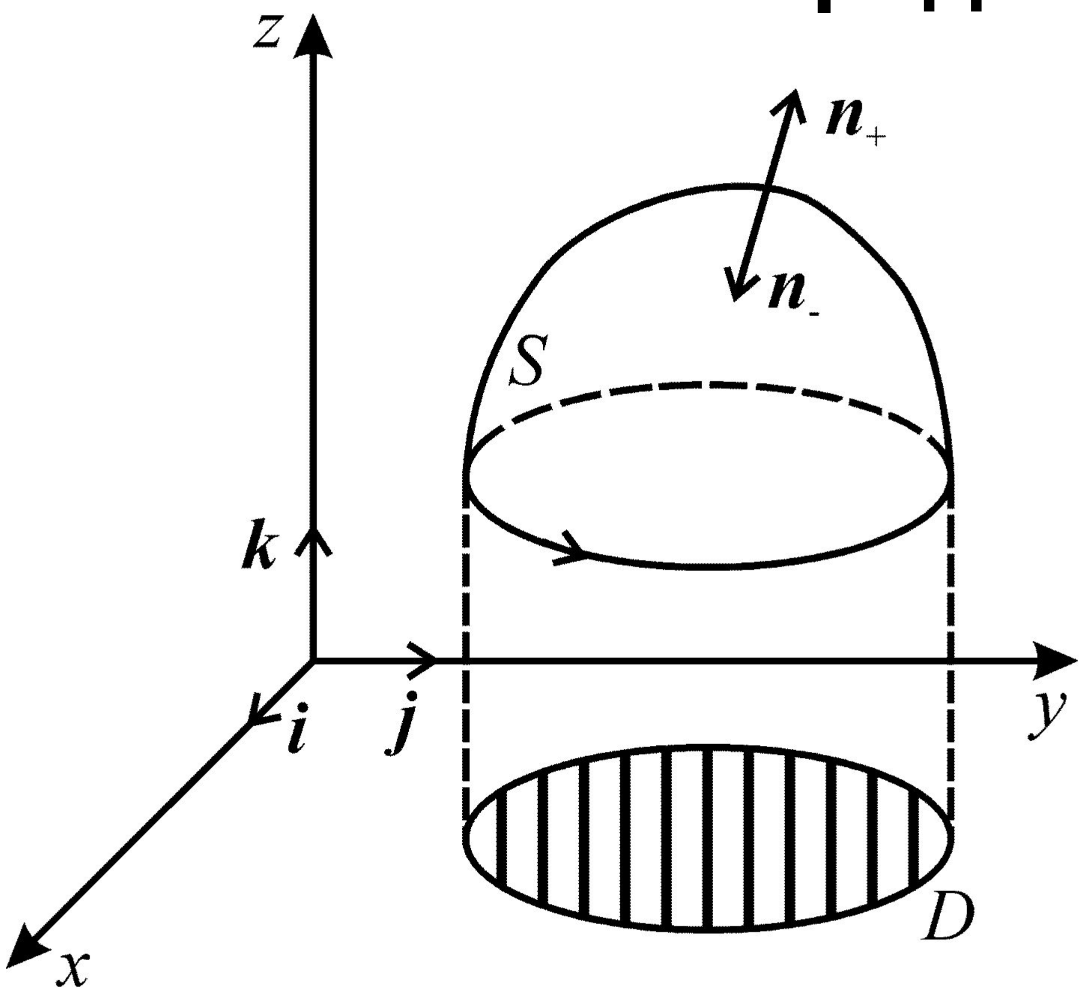
Чтобы построить модель бутылки Клейна, понадобится бутылка с двумя дополнительными отверстиями: в донышке и в стенке. Горлышко бутылки нужно вытянуть, изогнуть вниз, и продев его через отверстие в стенке, присоединить к отверстию на дне бутылки. Для настоящей бутылки Клейна в четырёхмерном пространстве отверстие в стенке не нужно, но без него нельзя обойтись в трёхмерном евклидовом пространстве.

В отличие от обыкновенного стакана, у этого объекта нет «края», где бы поверхность резко заканчивалась. В отличие от воздушного шара можно пройти путь изнутри наружу не пересекая поверхность (то есть на самом деле у этого объекта нет «внутри» и нет «снаружи»).





Поверхностные интегралы второго рода.



§ 5. Определение поверхностного интеграла второго рода.

Пусть в трехмерном пространстве в декартовой системе координат *XYZ* задана поверхность S, обладающая свойствами:

1) ограниченная, гладкая, ориентируемая
2) однозначно проектируется в область D на плоскости XOY.
3) имеющая уравнение: $z = z(x,y)$.

В силу ориентируемости поверхности S, каждой стороне поверхности можно поставить нормаль

$$\vec{n}_{\pm} = \pm \frac{-z'_x\vec{i} - z'_y\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}}$$

Сторону поверхности, отвечающую нормали $\boldsymbol{n}_+$ обозначают S_+, $\boldsymbol{n}_- \to S_-$.

Заметим, что нормали $\boldsymbol{n}_{+}$ и $\boldsymbol{n}_{-}$ составляют с осью z острые и тупые углы соответственно.

Направление нормали $\boldsymbol{n}$ согласовано с положительным обходом края поверхности S и её проекции D по правилу буравчика.

<u>**Определение**</u> **(поверхностных интегралов второго рода).** Символы

$$\iint\limits_{S_+} f(x,y,z)\,dxdy \qquad \& \qquad \iint\limits_{S_-} f(x,y,z)\,dxdy$$

называются поверхностными интегралами второго рода и задаются формулами:

$$\iint\limits_{S_+} f(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{S} f(x,y,z)\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right)dS$$

$$\iint\limits_{S_-} f(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{S} f(x,y,z)\cos\left(-\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right)dS$$

где: $\widehat{\vec{n},\vec{k}}$ и $-\widehat{\vec{n},\vec{k}}$ - углы между направлением нормали $\vec{n}$ и единичным вектором $\vec{k}$, нормали - $\vec{n}$ и единичным вектором $\vec{k}$.

Таким образом, поверхностные интегралы второго рода определяются через поверхностные интегралы первого рода с учетом ориентации поверхности. Учет ориентации поверхности производится направляющими косинусами нормали.

Если поверхность однозначно проектируется на плоскость *XOZ* или *YOZ* и удовлетворяет перечисленным свойствам, можно ввести следующие поверхностные интегралы второго рода:

$$XOZ:\ \iint\limits_S f(x,y,z)\,dxdz = \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right)dS$$

$$YOZ:\ \iint\limits_S f(x,y,z)\,dxdz = \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right)dS$$

Если поверхность однозначно проектируется на все три плоскости, то имеет место обобщенный интеграл второго рода.

В силу определения поверхностных интегралов для каждой координатной поверхности можно получить, что обобщенный интеграл связан с поверхностным интегралом первого рода формулой:

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx =$$

$$= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right) + Q(x,y,z)\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{i}}\right) + \right.$$

$$\left. + R(x,y,z)\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right) \right] dS =$$

$$= \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS$$

где: P, Q, R – функции, непрерывные на поверхности S.

§ 6. Свойства поверхностных интегралов второго рода.

Свойства такие же, как и у поверхностных интегралов первого рода. Кроме того, они обладают специфическими свойствами:

1. Пусть функция $f(x,y,z)$ и поверхность S таковы, что поверхностный интеграл второго рода существует. Тогда:

$$\iint\limits_{S_+} f(x, y, z)dxdy = -\iint\limits_{S_-} f(x, y, z)dxdy$$

2. Если поверхность S такова, что её образующая параллельна оси z, то:

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = 0$$

§ 7. Вычисление поверхностных интегралов второго рода.

Пусть поверхность S удовлетворяет сформулированным выше свойствам:

1) ограниченная, гладкая, ориентируемая
2) однозначно проектируется в область D на плоскости XOY.
3) имеющая уравнение: $z = z(x,y)$.

Считаем, что на S определена непрерывная функция $f(x,y,z)$. Тогда поверхностный интеграл второго рода вычисляется так:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

Знак «+» берется, если S – положительно ориентированная поверхность (нормаль составляет острый угол с осью z).

Знак «-» берется, если S – отрицательно ориентированная поверхность (нормаль составляет тупой угол с осью z).

Доказательство.

Самостоятельно.

Аналогично формулы могут быть записаны для поверхностных интегралов 2-го рода для координатных плоскостей YOZ и XOZ.