3. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ПАР

3.1. Сложение параллельных сил

$\overset{\boxtimes}{P}_1 = -\overset{\boxtimes}{P}_2$

Пусть даны две параллельные силы $\mathbf{F_1}$ *и* $\mathbf{F_2}$, *которые надо сложить, пусть* $F_1 < F_2$. *Приложим их на одном уровне, перенося их точки приложения по их линиям действия, что позволяет Следствие Аксиомы 2.*

Воспользуемся Аксиомой 2 и приложим к АТТ уравновешенную систему двух сил, $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$

Используя Аксиому 3, сложим силы в точках A и B.

Перенесем силы Q_1 *и* Q_2 *в точку пересечения их линий действия, O.*

Разложим каждую из сил в точке O на две составляющие.

Очевидно, что эти составляющие будут равны силам F и P.

Поскольку силы P_1 *и* P_2 *образуют уравновешенную систему сил, постольку их можно снять (Аксиома 2), а оставшиеся силы* $\mathbf{F_1}$ *и* $\mathbf{F_2}$ *можно сложить, получив искомый результат суммирования:*

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Покажем силу $\mathbf{R}$ *на том же уровне, что и исходные силы* $\mathbf{F_1}$ *и* $\mathbf{F_2}$, *перенеся ее в точку C по линии действия*

Как видим, модуль равнодействующей $\mathbf{R}$ *равен сумме модулей слагаемых сил. Остается выяснить положение линии действия равнодействующей относительно линий действия слагаемых сил* $\mathbf{F_1}$ *и* $\mathbf{F_2}$.

Для этого используем подобие ΔAOC и ΔaOk, а также ΔOCB и ΔbOm.

$$AC / OC = P_1 / F_1$$

$$CB / OC = P_2 / F_2$$

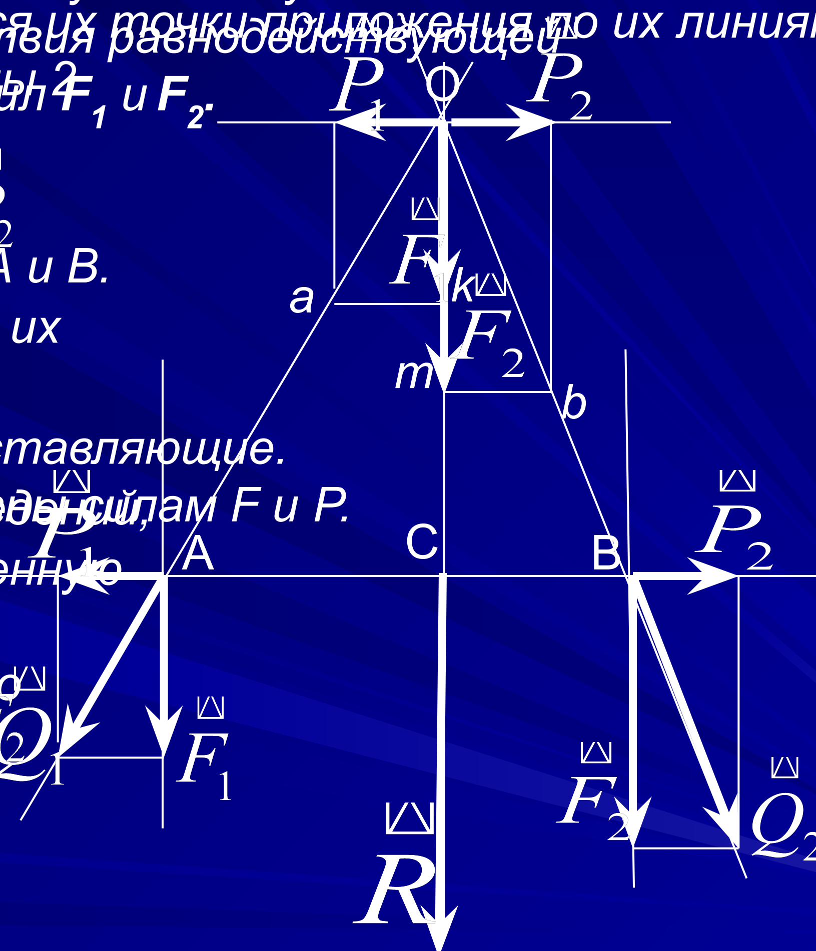
Перепишем эти соотношения в виде произведений:

Получим:

$$\left.\begin{aligned} AC \cdot F_1 &= P_1 \cdot OC \\ CB \cdot F_2 &= P_2 \cdot OC \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC \cdot F_1 = CB \cdot F_2$$

или

$$\frac{CB}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}$$



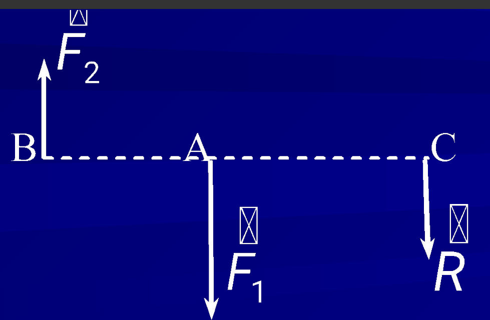
Таким образом, мы получили правило сложения параллельных сил

Сложение двух сил, направленных в одну сторону

равнодействующая двух параллельных и направленных в одну сторону сил, действующих на АТТ, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных их модулям

Сложение двух сил, направленных в противоположные стороны

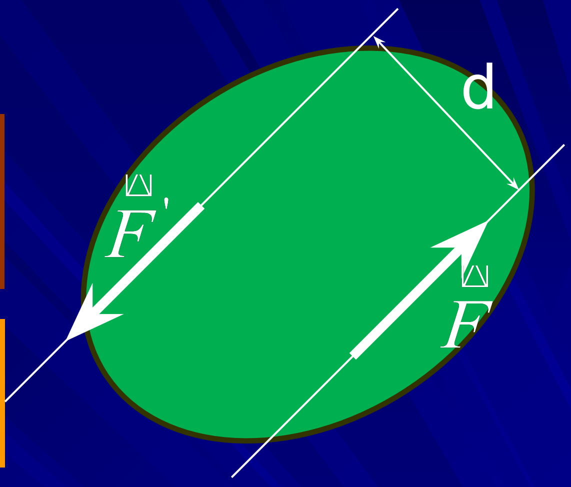
равнодействующая R двух параллельных, направленных в разные стороны, сил равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам



$$R = F_1 - F_2$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R} = \frac{AC}{F_2}$$

3.2. Пара сил



<u>Парой сил</u> называется система двух равных по модулю параллельных и противоположно направленных сил, приложенных к АТТ

<u>Плоскостью действия пары</u> называется плоскость, в которой находятся силы пары

<u>Моментом пары</u> называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля сил пары на ее плечо

$$m(\vec{F},\vec{F}') = \pm F \cdot d$$

Скобки в формуле – это не математическое действие, они просто указывают какие силы создают пару.

Знак момента пары выбирается так же, как и знак момента силы:
«+» - при “вращении” сил против часовой стрелки, «-» – по часовой стрелке.
В приведенном на рисунке примере момент пары (F,F') положительный.

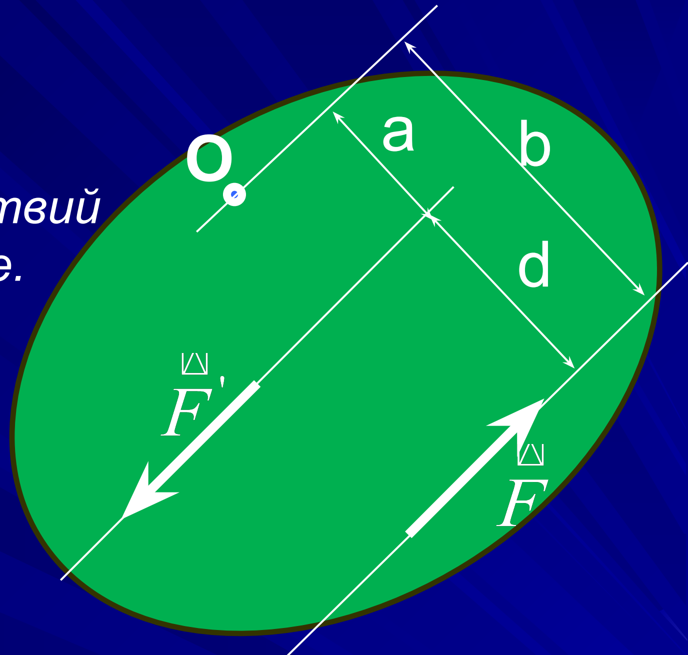
d - <u>плечо пары</u>, равное кратчайшему расстоянию между линиями действия сил пары

<u>Действие пары сил на тело определяется</u>:

1) величиной момента пары;
2) положением в пространстве ее плоскости действия;
3) направлением вращения пары.

Теорема: **алгебраическая сумма моментов сил пары относительно произвольного центра, лежащего в ее плоскости действия, не зависит от положения центра и равна моменту пары**

Приложим к АТТ пару сил (F, F') на плече d.



*Докажем эту теорему относительно произвольно расположенной точки **O**, отстоящей от линий действий сил на расстоянии **a** и **b**, как это показано на рисунке.*

Найдем сумму моментов сил пары относительно точки O, т.е.

$$m_o(\vec{F}) + m_o(\vec{F}') = F \cdot b - F' \cdot a$$

Учитывая, что $b = a + d$ и $F = F'$,

после подстановки получим

$$m_o(\vec{F}) + m_o(\vec{F}') = F(a+d) - F \cdot a = F \cdot d$$

Поскольку момент данной пары сил равен $m(\vec{F}, \vec{F}') = F \cdot d$

постольку можно сделать вывод о том, что

$$m_o(\vec{F}) + m_o(\vec{F}') = m(\vec{F}, \vec{F}')$$

3.3. Эквивалентность пар

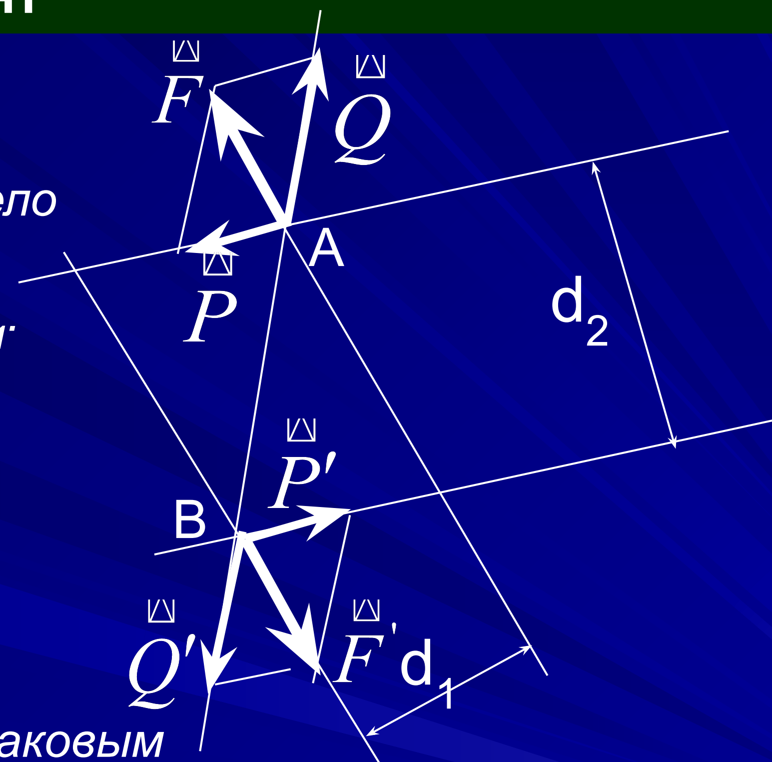
не изменяя оказываемого на тело действия, можно пару сил, приложенную к телу, заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент

*Пусть к телу приложена пара сил **(F, F')** на плече **d$_1$**. Покажем линии действия этих сил. Покажем, что не изменяя оказываемого на тело действия, данную пару можно заменить на другую пару с другим плечом, **d$_2$**. Пусть **d$_2$ > d$_1$**.*

*Воспользуемся Следствием Аксиомы 2 и перенесем силы исходной пары **(F, F')** в точки пересечения линий действия **A** и **B**.*

*Разложим силы пары **(F, F')** на составляющие, как это показано на рисунке*

*Очевидно, что поскольку мы в обоих случаях раскладывали равные по модули силы по одинаковым направлениям, постольку в результате мы получили одинаковые по модулю, но противоположные по направлениям составляющие: **Q=Q', P=P'**. Силы **(P,P')** можно рассматривать как пару сил, т.к. они полностью соответствуют определению пары. Возникает вопрос: будет ли пара **(P,P')** эквивалентна по действию паре **(F, F')**. Их плоскости действия и направления совпадают, осталось установить равны ли по величине их моменты*



Запишем теорему Вариньона относительно точки B, рассматривая силу F как равнодействующую сил Q и P, т.е.:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} \qquad \vec{F}' = \vec{P}' + \vec{Q}'$$

Получим:

$$m_B(\overline{F}) = m_B(\overline{P}) + m_B(\overline{Q})$$

Имеем:

$$m_B(\overline{F}) = F \cdot d_1; \quad m_B(\overline{P}) = P \cdot d_2; \quad m_B(\overline{Q}) = 0.$$

Сила Q создать момент относительно точки B не может, т.к. ее линия действия пересекает точку B и плечо равно нулю. Что приводит к равенству моментов пар:

$$F \cdot d_1 = P \cdot d_2 \quad или \quad m\left(\vec{F}, \vec{F}'\right) = m\left(\vec{P}, \vec{P}'\right)$$

Доказанная теорема позволяет сформулировать полезные для практики *<u>свойства пар сил:</u>*

<u>не изменяя оказываемого на тело действия</u> можно:

а) переносить пару в любое место ее плоскости действия;

б) изменять модуль сил или плечо пары, оставляя неизменным ее момент

Таким образом,

две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты эквивалентны, т.к. указанными выше действиями они могут быть преобразованы одна в другую.

3.4. Сложение пар. Условия равновесия пар

Рассмотрим вопрос о сложении пар, основой которого является следующая

<u>теорема о сложении пар</u>: **система пар, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одной паре, лежащей в той же плоскости и имеющей момент, равный алгебраической сумме моментов пар системы**

Пусть на АТТ действует плоская система пар (m_1…m_k…m_n)

Представим эти пары в виде сил с одинаковым плечом d.

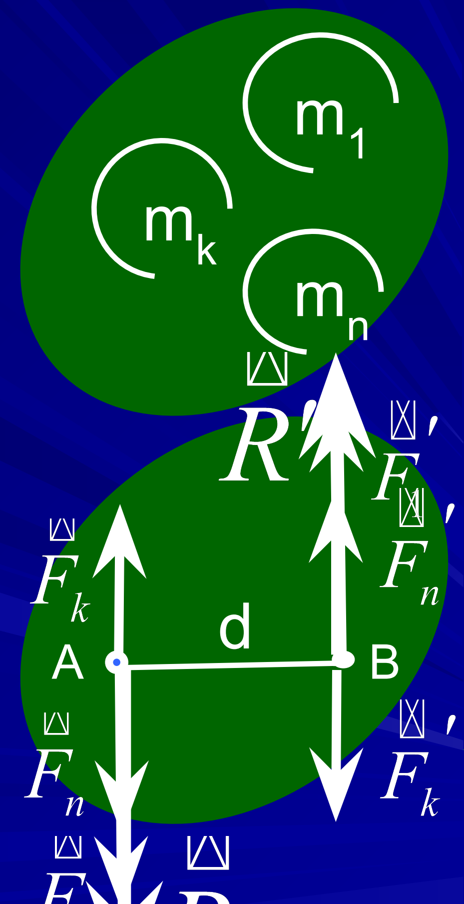
Модули сил можно определить по формуле $\boldsymbol{F_k = m_k/d}$

Таким образом мы получили 2 системы сходящихся сил в точках ***A*** *и* ***B****, по* ***n*** *векторов в каждой.*

Найдем векторы суммы каждой системы $R = R' = \sum\limits_n F_k$

Векторы R и R' образуют пару, момент которой равен

$$M(\overline{R}, \overline{R}') = R \cdot d = \sum_n m_k$$



<u>Отсюда следует правило сложения пар сил</u>: **чтобы сложить систему пар, лежащих в одной плоскости, необходимо произвести алгебраическое сложение моментов этих пар**

<u>Условие равновесия плоской системы пар</u> $\sum\limits_n m_k = 0$

для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов этих пар была равна нулю