ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре.
Тема: понятие логарифма, основные свойства логарифмов.

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Решите уравнение.

Решить уравнение $a^x = в$, где $a > 0$ и $a \neq 1, b > 0$ значит, найти показатель степени, в который надо возвести основание a, чтобы получить число b

1) $0,5^x = 32,$

$x = -5.$

Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание **0,5** , чтобы получить **32**.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27,$

$x = -3.$

Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание $\left(\frac{1}{3}\right)$, чтобы получить **27**.

3) $4^{x+1} + 4^x = 320,$

$4^x(4+1) = 320,$

$4^x = 64,$

$x = 3.$

Мы искали показатель степени, в который надо возвести основание 4, чтобы получить 64.

Показатель степени – это и есть логарифм (при определенных условиях).

Определение.

Логарифмом числа b $(b > 0)$ по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b , т.е. если $a^c = b$, то можно записать $\log_a b = c$.

Примеры.

1) $\log_2 32$, здесь $b = 32$, $a = 2$, $c = 5$.

$\log_2 32 = 5$, т. к. $2^5 = 32$.

2) $\log_5 0{,}04$,

здесь $b = 0{,}04$, $a = 5$, $c = -2$.

$\log_5 0{,}04 = -2$, т. к. $5^{-2} = 1/25 = 0{,}04$.

3) Найти x, такое, что $\log_8 x = 1/3$.

По определению логарифма

$x = 8^{1/3} = 2$.

Основное логарифмическое тождество.

$$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$$

Откуда получаем основное логарифмическое тождество

$(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$

$$a^{\log_a b} = b$$

Примеры.

$$1)\ 0{,}5^{\log_{0,5} 6} = 6\ .$$

$$2)\ \sqrt{5}^{\,2\log_5 3} = ((\sqrt{5})^2)^{\log_5 3}$$

$$= 5^{\log_5 3} = 3.$$

Свойства логарифмов.

1) $\log_a 1 = 0.$

2) $\log_a a = 1.$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5.1) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x.$

5.2) $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$

6) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$$

$Следствие:$ 1) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$Следствие:$ 2) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$

$Следствие:$ 3) $\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$

Свойства логарифмов, примеры.

$$1)\ \log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 3^3 - 2\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 3 =$$

$$= 3\log_2 3 - 2\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 3 = \log_2 2 = 1$$

Использовались свойства 4 , 5.1 и 2.

$$2)\ \log_{\frac{1}{3}} 2 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}}(4\sqrt{18}) = \log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 8^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}}(4\sqrt{18}) =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}}(2\cdot 8^{\frac{1}{2}}) - \log_{\frac{1}{3}}(4\cdot\sqrt{18}) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2\cdot 8^{\frac{1}{2}}}{4\cdot\sqrt{18}} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2\cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$$

Использовались свойства 5.1, 3, 4 и 2.

Свойства логарифмов, примеры.

$$3)\ \log_9(\log_4 \sqrt[3]{4}) = \log_9\left(\frac{1}{3}\cdot\log_4 4\right) = \log_{3^2}(3^{-1}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\log_3 3 = -\frac{1}{2}$$

Свойства 5.1, 2 , следствие 2 .

Логарифмы по основанию 10 называют десятичными логарифмами:

$1)\ \log_{10} a = \lg a$

Действия с десятичными логарифмами.

$$4)\ \frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt[3]{10^5} = \frac{2}{3}\cdot(-3) \ldots \frac{3}{5}\lg 10^{\frac{5}{3}} =$$

$$= -2+1-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\lg 10 = -2+1-1 = -2$$

Примеры: 1) lg100=2

2) lg0,0001= - 4

3) lg100000000= 8

Формула перехода от одного основания логарифма к другому, примеры.

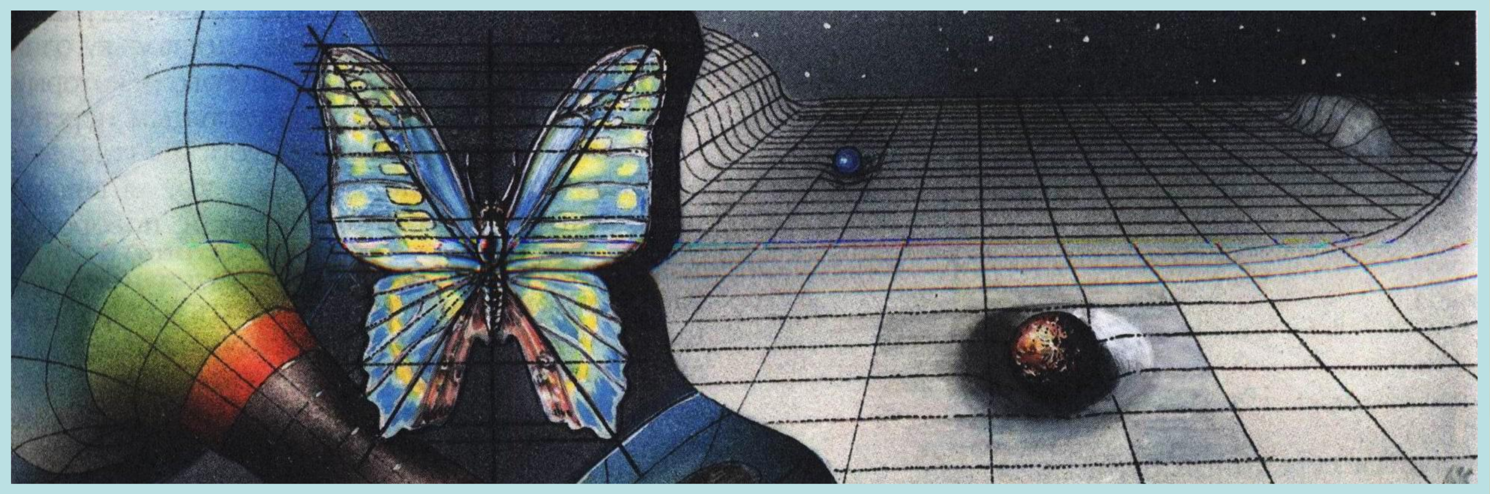
$$1)\ \frac{\log_5 0{,}5}{\log_5 24 - \log_5 3} = \frac{\log_5 0{,}5}{\log_5 \frac{24}{3}} = \frac{\log_5 0{,}5}{\log_5 8} = \log_8 0{,}5 =$$

$$= \log_{2^3} 2^{-1} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$2)\ \log_3 10 \cdot \lg 27 + \log_{27} 1 = \frac{\lg 10}{\lg 3} \cdot \lg 3^3 + 0 = \frac{1}{\lg 3} \cdot 3 \lg 3 = 3$$

Домашнее задание.

1) Разобрать и выучить лекцию.
2) Никольский, 10 кл., п.5.1, 5.2
   № 5.4, 5.8(а, б, в, е, и), 5.9(1,2 стр.)



Свойства логарифмов.

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

$$\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$$

1) $\log_a 1 = 0.$

2) $\log_a a = 1.$

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5.1) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x.$

5.2) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \log_a b.$

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Следствия :

1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b.$

3) $\log_a b = \log_{a^\gamma} b^\gamma$