- Геологический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова
- Кафедра геофизики

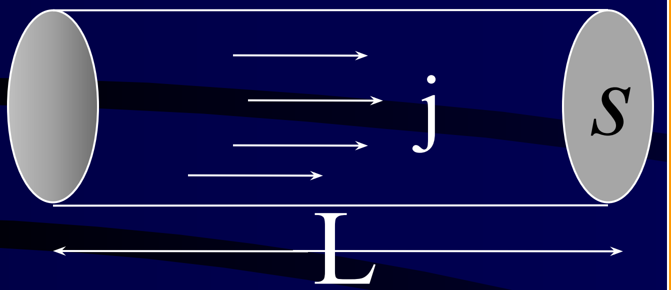
- Лекция 4.

Профессор И.Н.Модин

Законы постоянного тока

Постоянный ток: Закон Ома

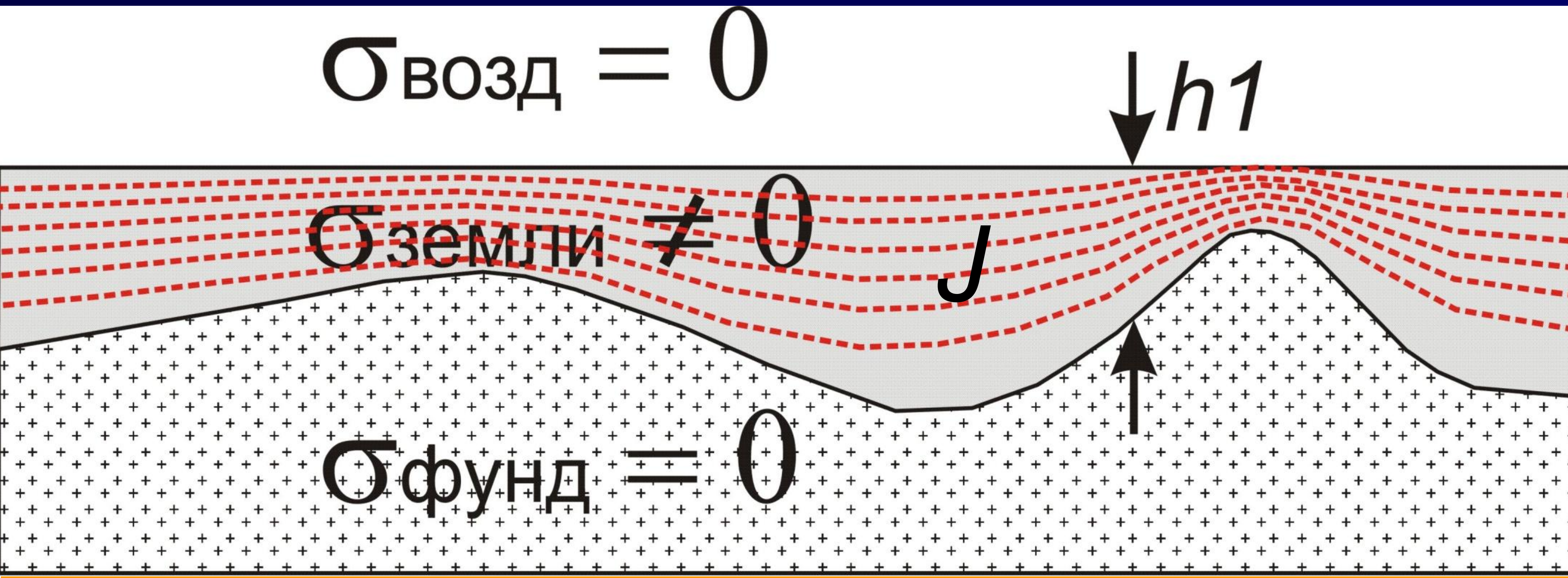
- ЗО в дифференциальной форме $\vec{j}=\sigma\cdot\vec{E}$, где $\sigma=1/\rho$; ρ - удельное электрическое сопротивление



$$I = j\,s = \sigma\,E\,s = \frac{\frac{\Delta U}{L}}{\rho}\,s = \frac{\Delta U}{\frac{\rho L}{s}} = \frac{\Delta U}{R}$$

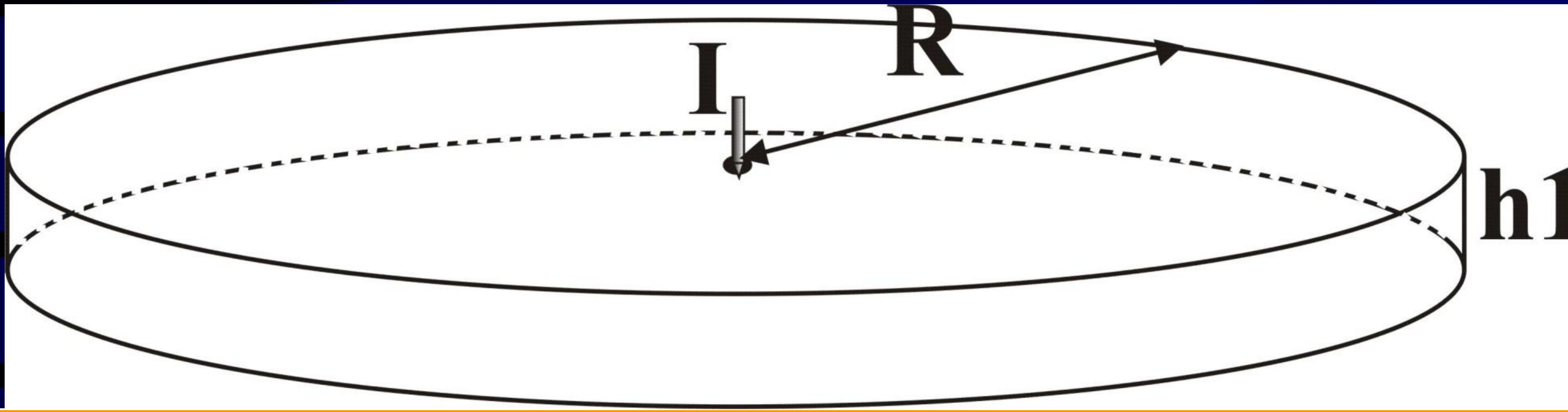
$$IR = \Delta U$$ - закон Ома в интегральной форме (или закон Ома для участка цепи)

Пример 1: электрическое поле в верхнем слое



$$j = \frac{J}{h_1} = \sigma_0 E \qquad E = \rho_0 \frac{J}{h_1}$$

Пример 2: Растекание тока в верхнем слое



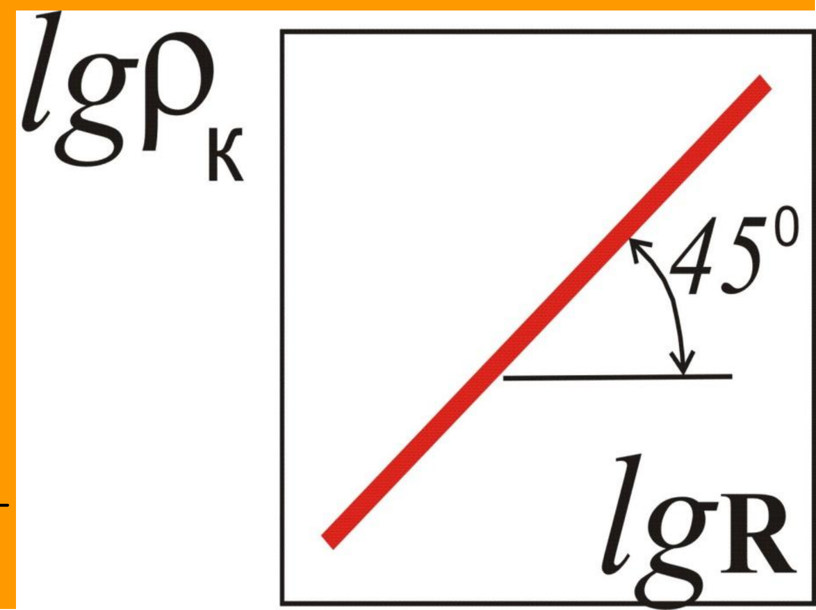
Электрическое поле цилиндра

$$E = j\rho_1 = \rho_1 \frac{J}{s} = \rho_1 \frac{J}{2\pi R h_1}$$

Нормальное электрическое поле

$$E = j_0\rho_1 = \rho_1 \frac{J}{2\pi R^2}$$

Кажущееся сопротивление $\rho_к = \rho_1 \frac{E}{E_0} = \rho_1 \frac{R}{h_1}$



Вывод уравнения Лапласа

$$RotH = j$$

$$divRotH = divj = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta U = 0$$

- Используем 1-ое уравнение Максвелла
- **div j = 0** – закон Кирхгофа
  div rot A = 0 всегда

$$\int_V divj\, dv = \oint_S j\, ds = I_S = 0$$

- **div j = 0** путем последовательных подстановок при $\sigma x = \sigma y = \sigma z$ превращается в **Δ U = 0**

Граничные условия

$$U_1 = U_2$$

1-ое ГУ

$$j_n^1 = j_n^2 \qquad \frac{1}{\rho_1} E_n^1 = \frac{1}{\rho_2} E_n^2 \qquad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial n}$$

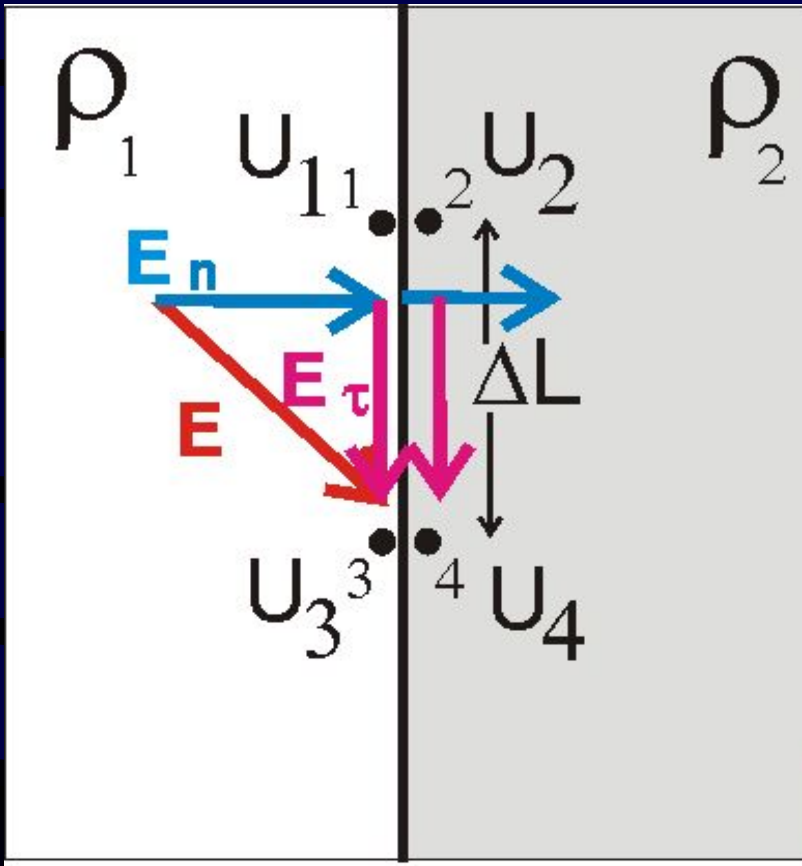
2-ое ГУ

$$E_\tau^1 = E_\tau^2$$

3-ье ГУ

- 1- Электрические потенциалы равны на границе двух сред
- 2- Нормальные компоненты плотности тока равны
- 3- Тангенциальные компоненты электрического поля равны

Замечание 1. 3-е граничное условие



$$
-\;\frac{\begin{matrix} U_1 = U_2 \\ U_3 = U_4 \end{matrix}}{U_1 - U_3 = U_2 - U_4}
$$

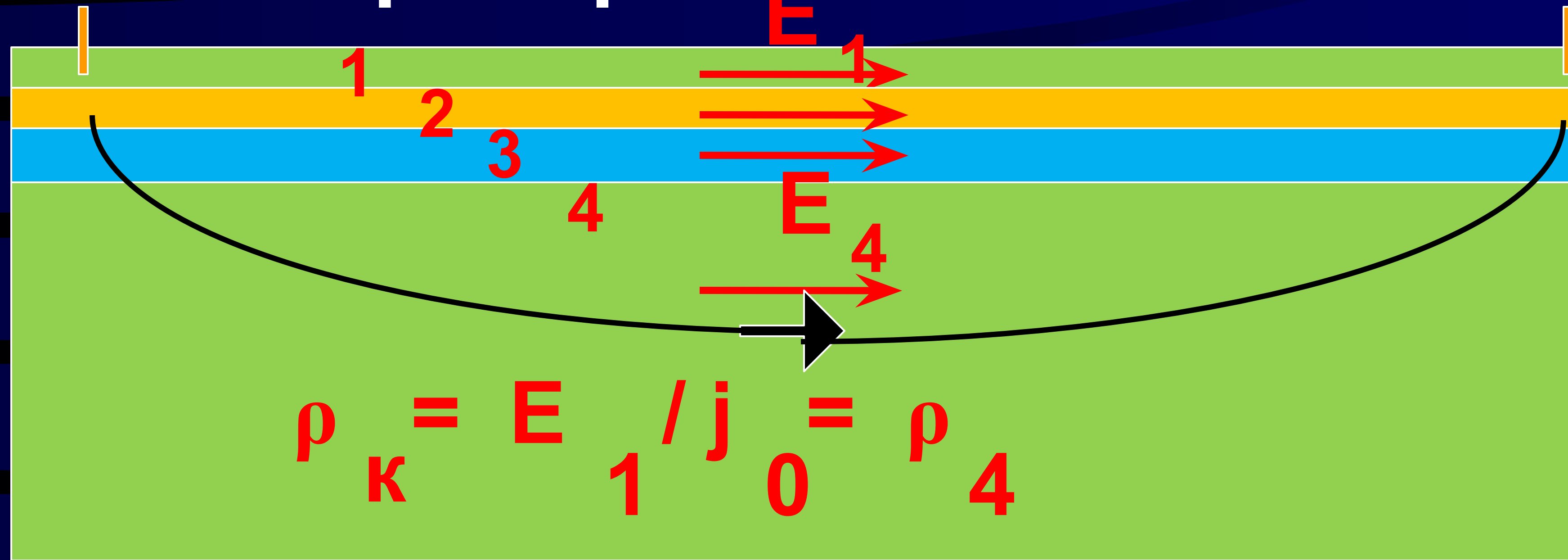
$$\Delta U_{13} = \Delta U_{24}$$

$$E_\tau^1 = \frac{\Delta U_{13}}{\Delta L} = \frac{\Delta U_{24}}{\Delta L} = E_\tau^2$$

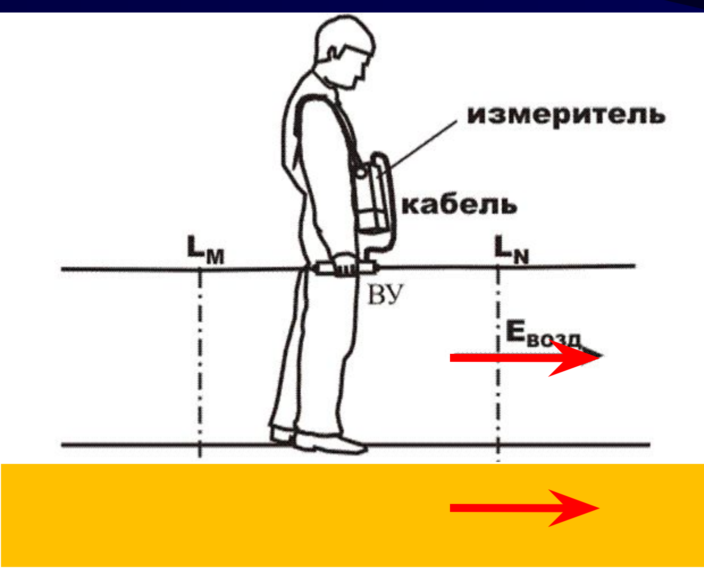
$$E_\tau^1 = E_\tau^2$$

Тангенциальная компонента электрического поля пересекает границы без изменения амплитуды

2 Примера

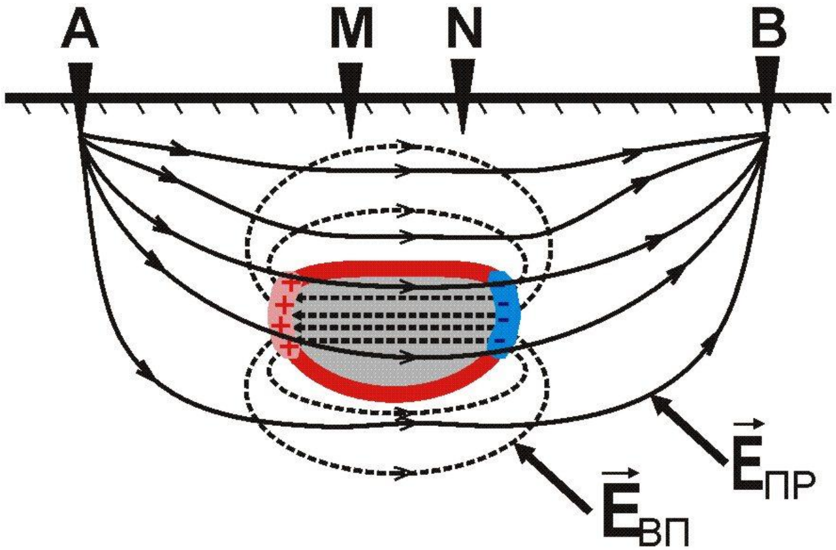


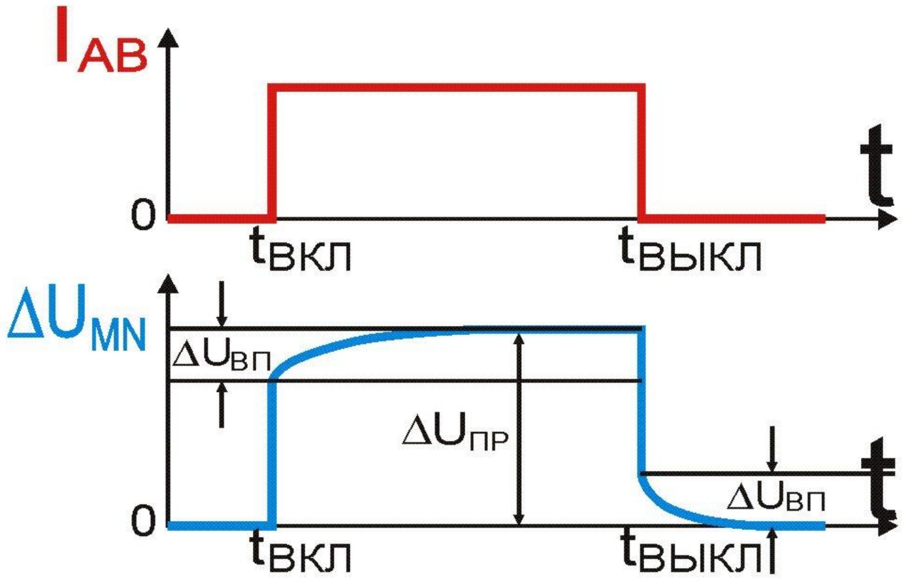
1- электрическое поле передается через разрез наверх

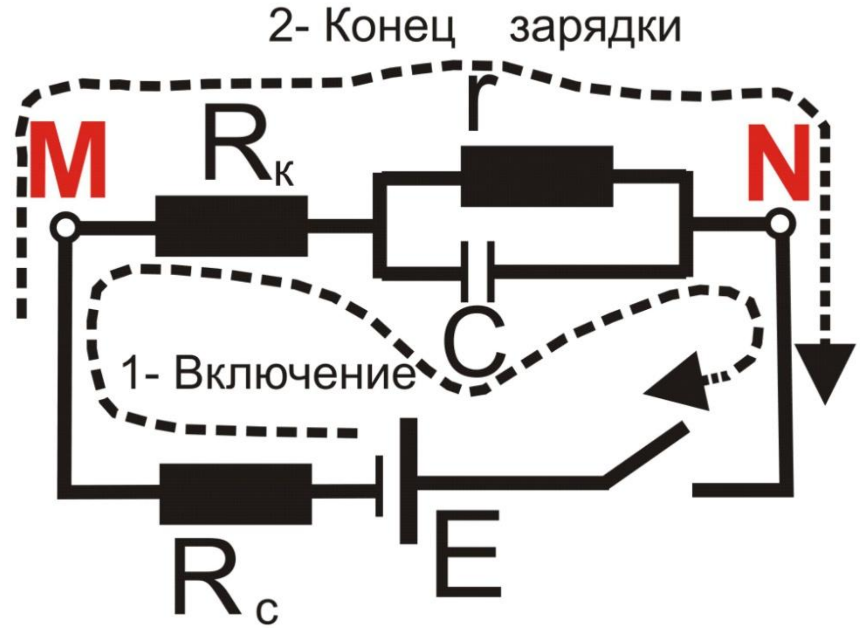


2 – можно измерять электрическое поле в воздухе

Замечание 2. Если среда поляризуется,







$R_с > R_к \gg r$

$\Delta U1 = E \cdot R_к / (R_к + R_с)$

$\Delta U2 = E \cdot (R_к + r) / (R_к + R_с)$

то меняется сопротивление среды

Граничные условия с ВП

$$\eta = \frac{E_{вп}}{E_{проп}} \cdot 100\% = \frac{E_{проп} - E_0}{E_{проп}} \cdot 100\%$$

$$\eta = \frac{j\rho^* - j\rho}{j\rho^*} \qquad \rho^* = \frac{\rho}{1-\eta}$$

Первый тип *граничных условий при объемной поляризации*

$$U_1^* = U_2^* \qquad \frac{1-\eta_1}{\rho_1}\frac{\partial U_1^*}{\partial n} = \frac{1-\eta_2}{\rho_2}\frac{\partial U_2^*}{\partial n}$$

Граничные условия с ВП

<u>Второй тип</u> *граничных условий при поверхностной поляризации - на поверхности проводников в результате протекания тока образуются мощные электрические заряды :*

$$U_1^* - U_2^* = \lambda \frac{\partial U}{\partial n}$$

1-ое граничное условие

$$\frac{1-\eta_1}{\rho_1} \frac{\partial U_1^*}{\partial n} = \frac{1-\eta_2}{\rho_2} \frac{\partial U_2^*}{\partial n}$$

2-ое граничное условие

Поле на «бесконечности» при r → ∞

$$r \to \infty \qquad z \to \infty \qquad E \to 0$$

$$r \to \infty \qquad z \to \infty \qquad U \to 0$$

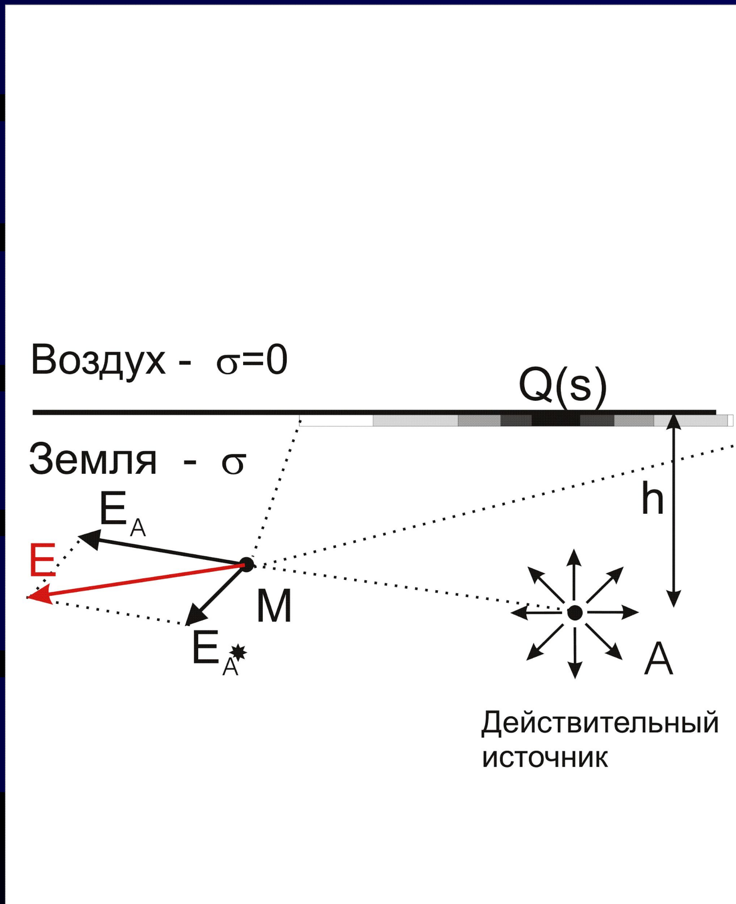
Электрическое поле и его потенциал стремятся к нулю на больших расстояниях от источника поля

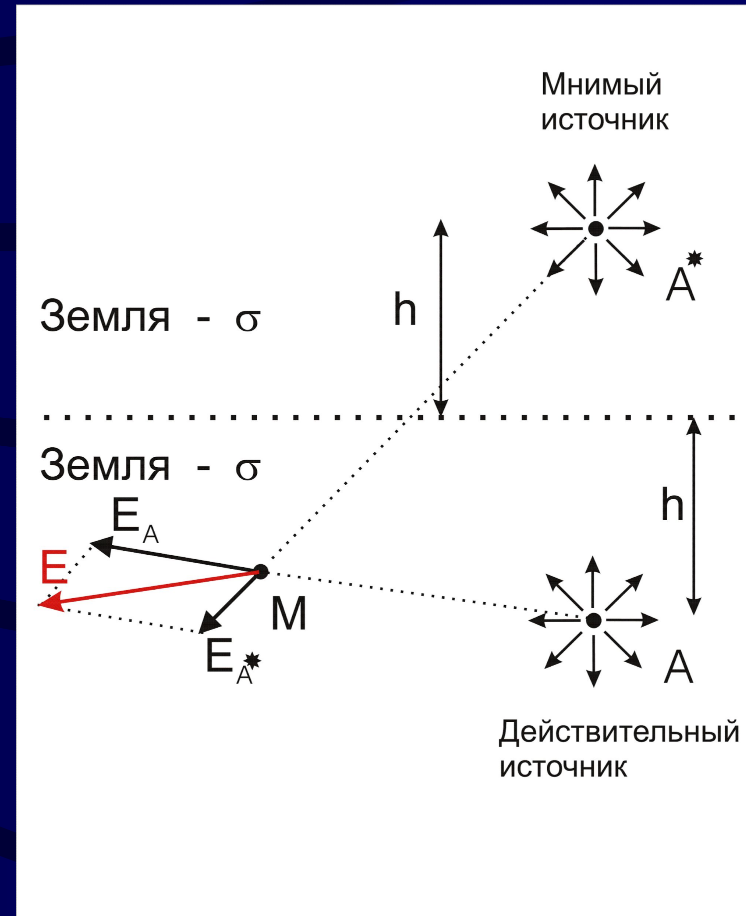
З а м е ч а н и я:

- В природе источники тока всегда бывают в паре « + - » и это обеспечивает убывание поля для любых типов источников не медленнее, чем 1/r или Ln(Ra/Rb)

- Все источники физически имеют конечные размеры и на «бесконечности» всегда превращаются в точку

Влияние поверхности Земли



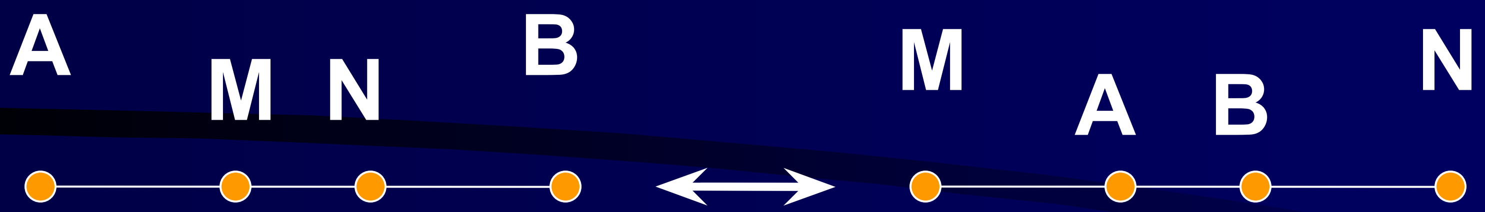


- Влияние зарядов, индуцированных на поверхности Земли, можно заменить мнимым источником, расположенным в однородном проводящем пространстве

$$U = U_A + U^*_A = I\rho /((x_m - x_a)^2 + (z_m - z_a)^2)^{1/2} + I\rho /((x_m - x_a)^2 + (z_m + z_a)^2)^{1/2}$$

Принцип взаимности

U am / Ia = U ma / Im



1. <u>Использование полевых инверсных установок</u> приводит к автоматизации процесса сбора данных и дает возможность использовать многоканальные установки. Полезный сигнал не меняется, а пропорционально длине линии MN возрастают помехи.

2. Принцип взаимности активно используется <u>при решении прямых задач,</u> когда при одной поляризации поля можно сразу получить множество решений для целого набора разносов.

Теорема суперпозиции

U = U a + U b + U c + …..

E = E a + E b + E c + …..

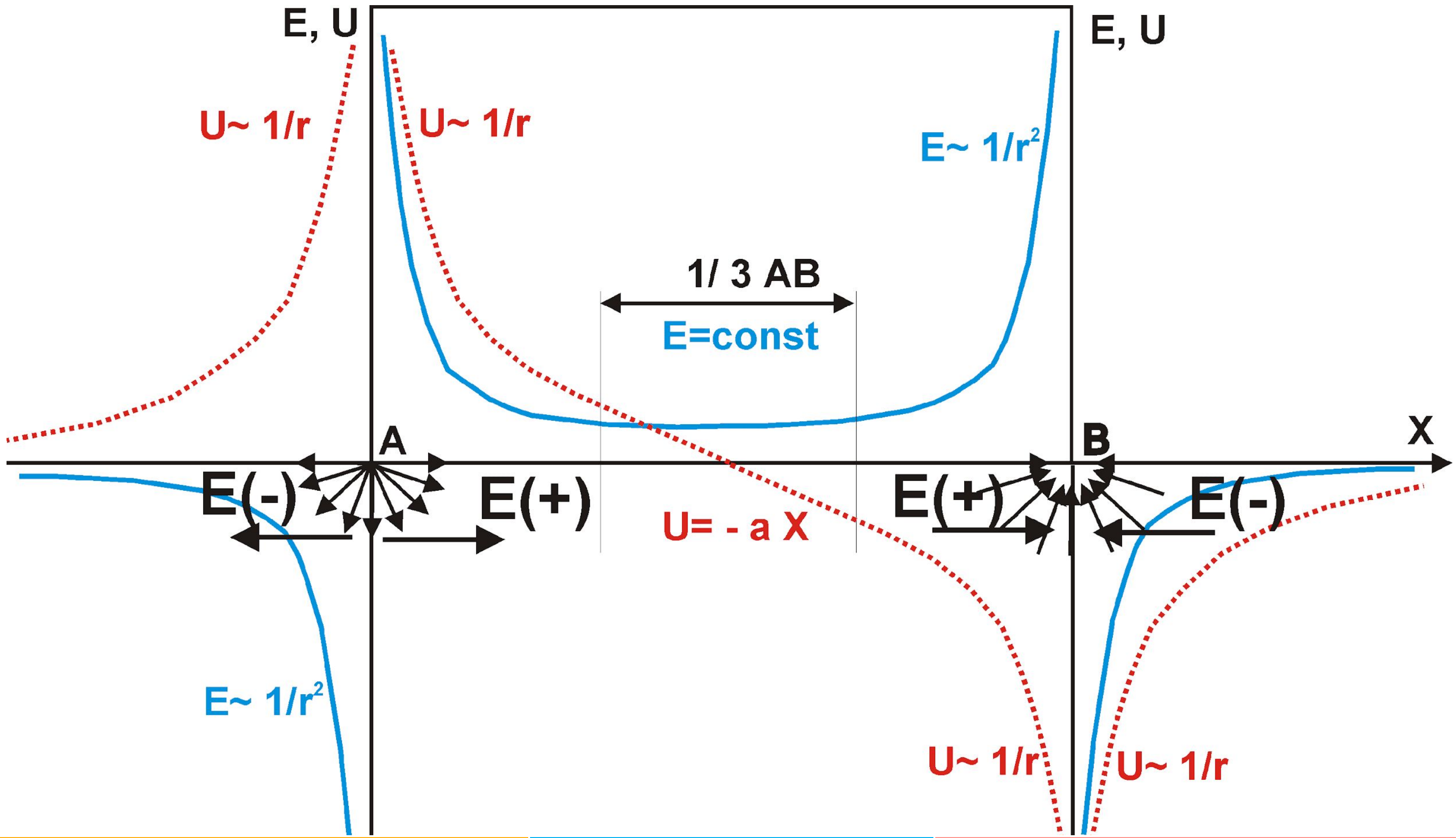
j = j a + j b + j c + …..

Теорема суперпозиции активно используется при расчетах полей от разного рода источников : искусственных, естественных, вторичных , ВП и т.д.

Теорема позволяет всегда использовать соотношение для любой среды

$$\rho_{\kappa}^{AmnB} = \frac{\rho^{Amn} + \rho^{mnB}}{2}$$

E и U вблизи двух электродов



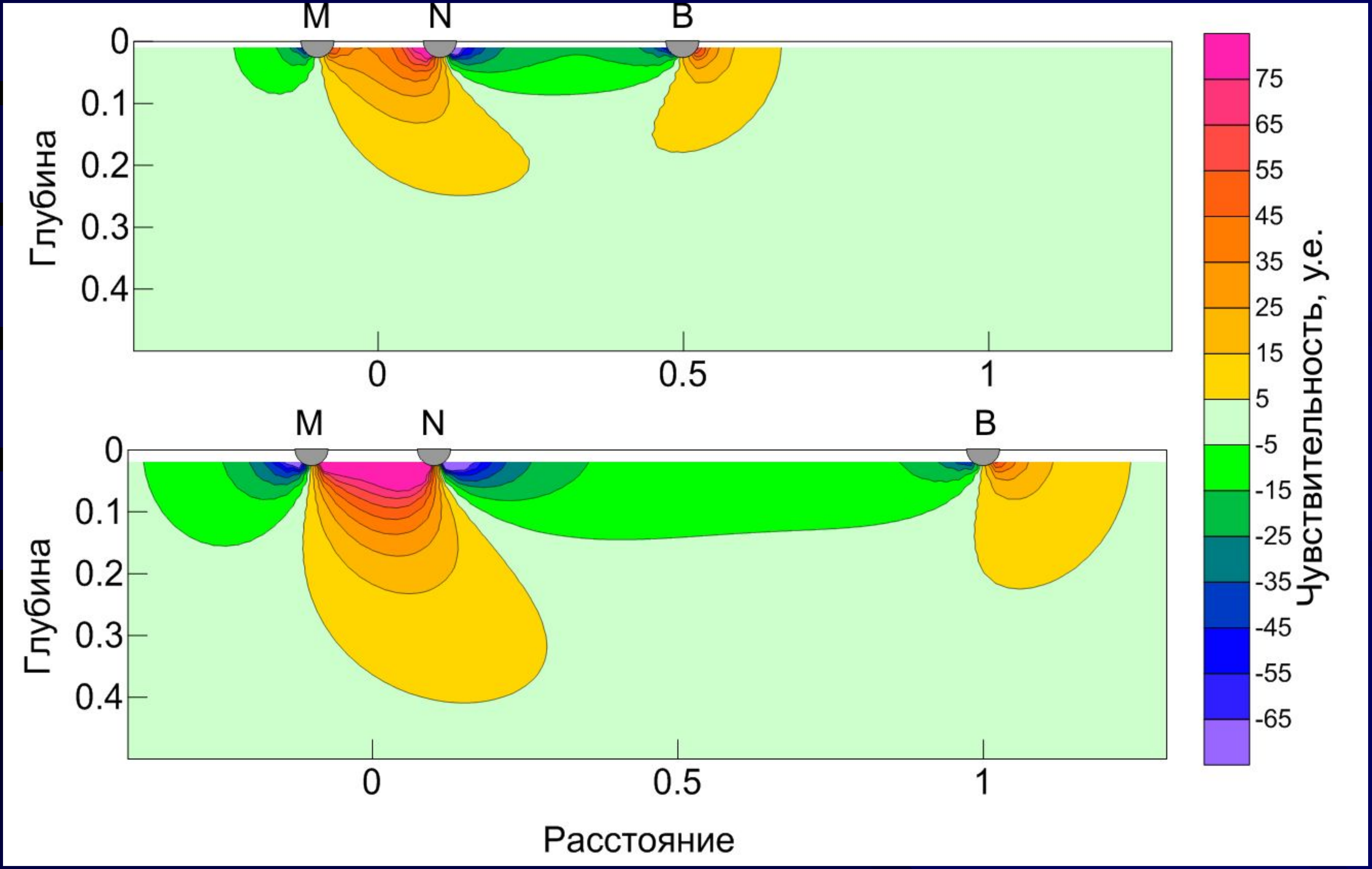
$$Uab = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{Ram} - \frac{1}{Rbm}\right)$$

$$Eab = -\frac{\partial Uab}{\partial x}$$

$$Eab = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{x_m - x_a}{(Ram)^3} - \frac{x_m - x_b}{(Rbm)^3}\right)$$

- Вблизи электродов E убывает как $1/r^2$
- Вблизи электродов U убывает как $1/r$
- Вне установки поле меняется как поле диполя
- В центре установки поле однородное не равно 0

Разрезы чувствительности для трехэлектродной установки

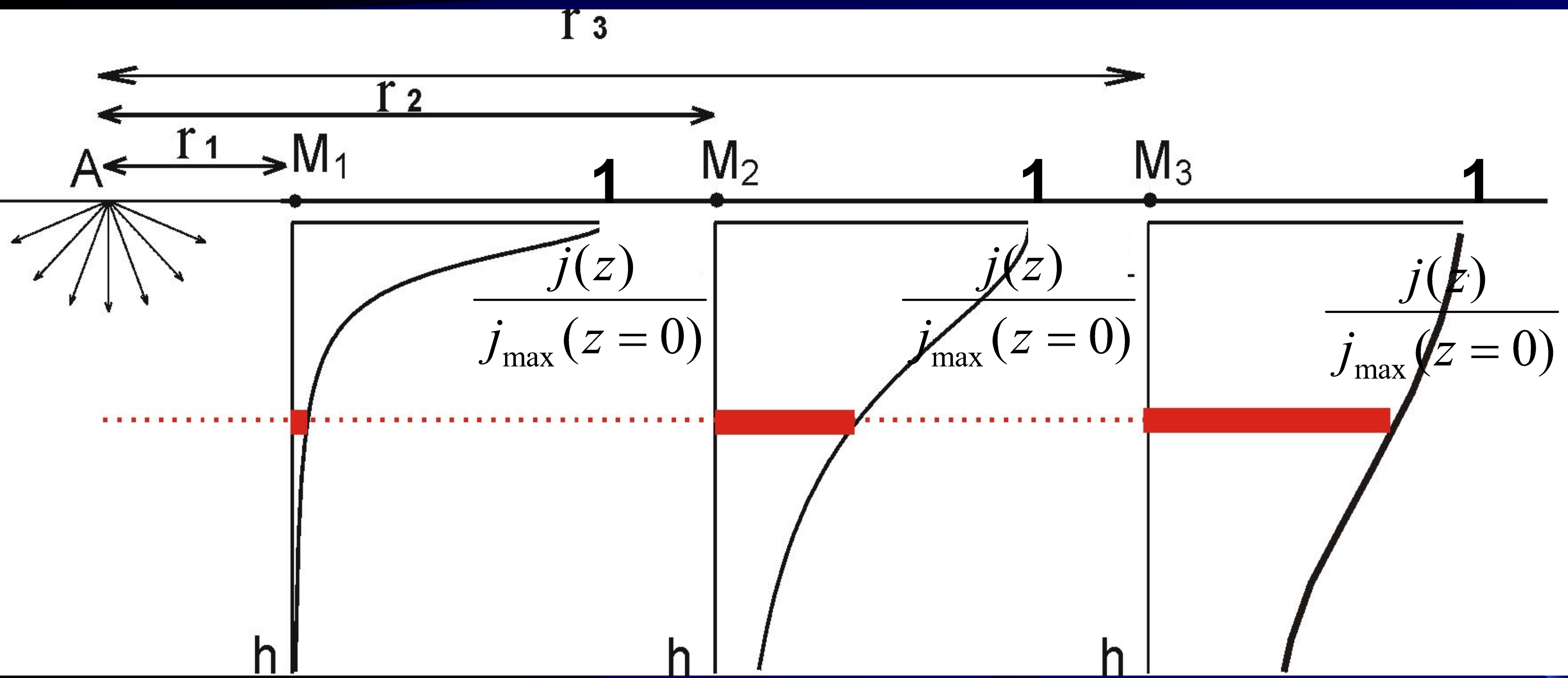


OB=0.5

OB=1.0

При увеличении разноса в два раза глубинность исследования возрастает в два раза

Зависимость глубины исследования от действующего разноса



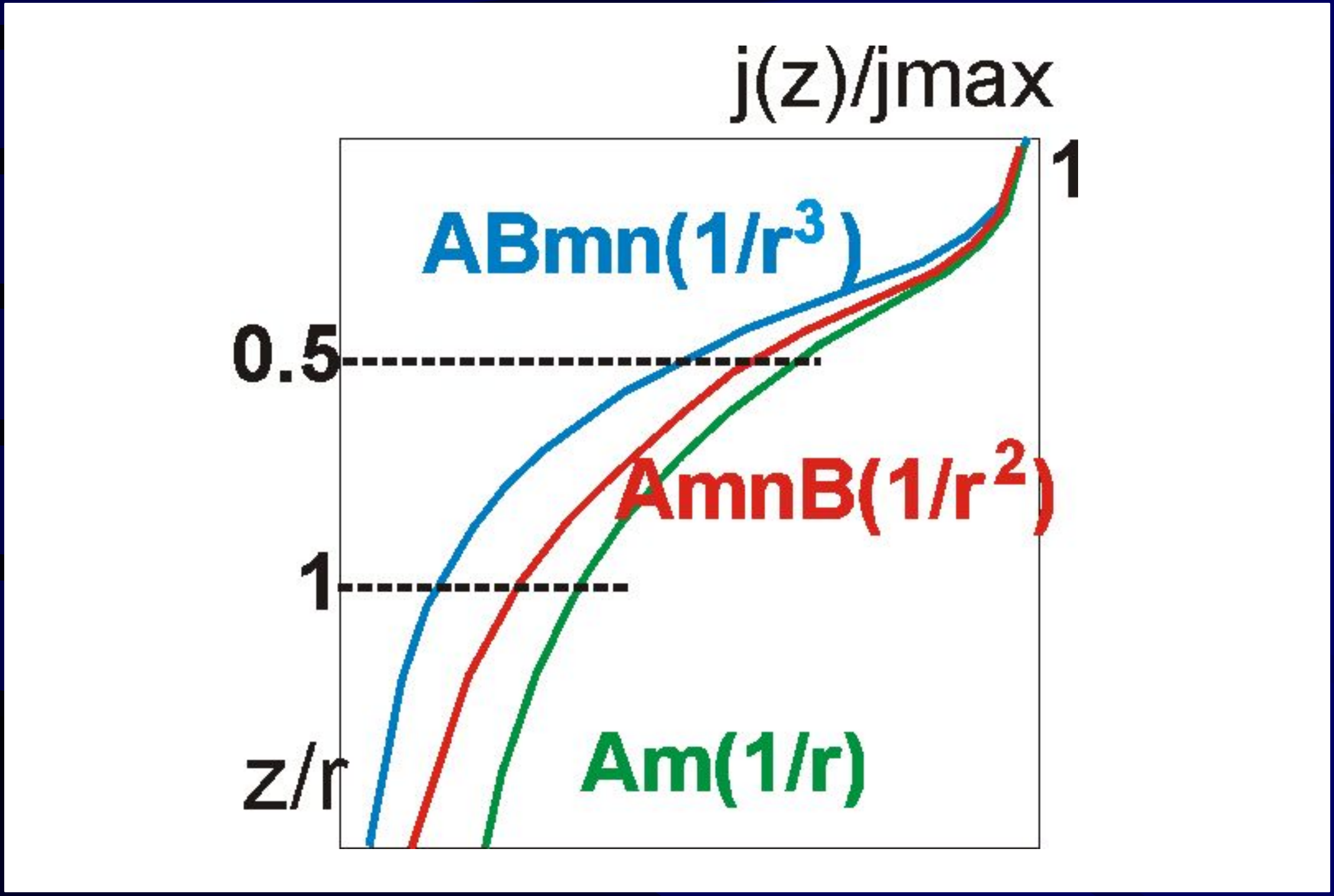
При увеличении расстояния до точки измерения от питающего электрода меняется нормированная плотность тока в разрезе

$$j(z) = \frac{J}{2\pi} \frac{1}{r^2 + z^2}$$

$$j_{max}(z=0) = \frac{J}{2\pi} \frac{1}{r^2}$$

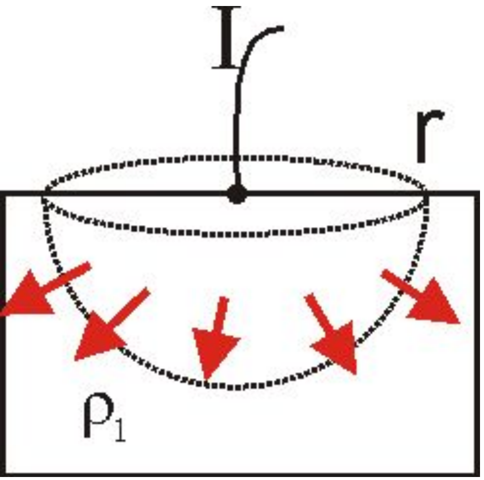
$$\frac{j(z)}{j_{max}(z=0)} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{r^2}}$$

Сравнительная глубинность установок



Чем быстрее затухает поле тем меньше глубинность

Нормальное поле и потенциал точечного источника над однородным полупространством



$$\Delta U = 0 \qquad U_{r\to\infty} \Rightarrow 0$$

$$\Delta U = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial U}{\partial R}\right) = 0$$

$$R^2 \frac{\partial U}{\partial R} = -C_0 \qquad E = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{C_0}{R^2}$$

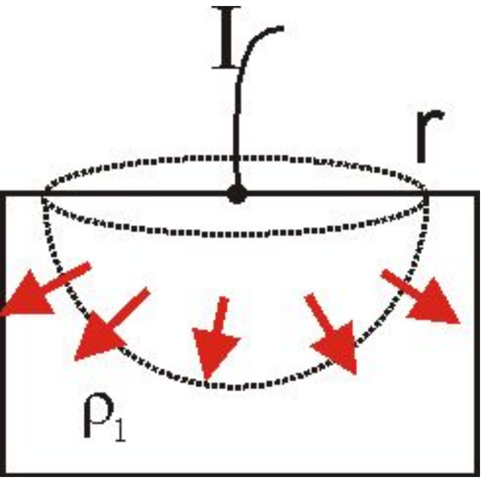
$U = \dfrac{C_0}{R} + C$ **Т.к.** $U_{r\to\infty} \Rightarrow 0$ **То** $C = 0$

Чему равно C_0 ?

Должен выполняться Закон Кирхгофа

$$\oint_S j\, ds = j 2\pi R^2 = I \qquad j = \frac{I}{2\pi R^2}$$

Нормальное поле и потенциал точечного источника над однородным полупространством



Должен выполняться Закон Ома

$$E = j\rho = \frac{I\rho}{2\pi R^2}$$

Отсюда следует , что $C_0 = \dfrac{I\rho}{2\pi}$

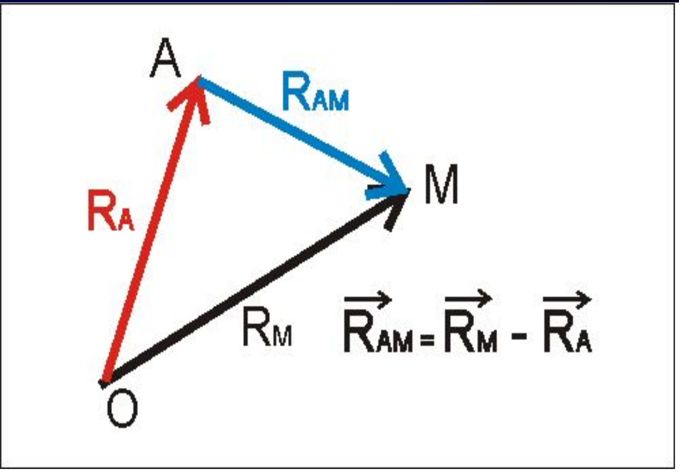
Потенциал и поле

$$U = \frac{I\rho}{2\pi R} \qquad \vec{E} = \frac{I\rho}{2\pi R^3}\vec{R}$$

Потенциал двух источников

$$U = Ua + Ub = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{Ram} - \frac{1}{Rbm}\right)$$

Нормальное поле и потенциал точечного источника над однородным полупространством



Поле двух источников

$$\vec{E} = \vec{E}a + \vec{E}b = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{\vec{R}am}{(Ram)^3} - \frac{\vec{R}bm}{(Rbm)^3}\right)$$

$$Ram = \sqrt{(x_m - x_a)^2 + (y_m - y_a)^2}$$

$$Rbm = \sqrt{(x_m - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2}$$

$$\vec{R}am = (x_m - x_a)\,\vec{1}_x + (y_m - y_a)\vec{1}_y$$

$$\vec{R}bm = (x_m - x_b)\,\vec{1}_x + (y_m - y_b)\,\vec{1}_y$$

Z=0

$$E_l = \vec{E}\cdot\vec{1}_l = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{\vec{R}am}{(Ram)^3} - \frac{\vec{R}bm}{(Rbm)^3}\right)\cdot\left(l_x\vec{1}_x + l_y\vec{1}_y\right)$$

Нормальное поле и потенциал точечного источника над однородным полупространством

Проекция поля двух источников на направление

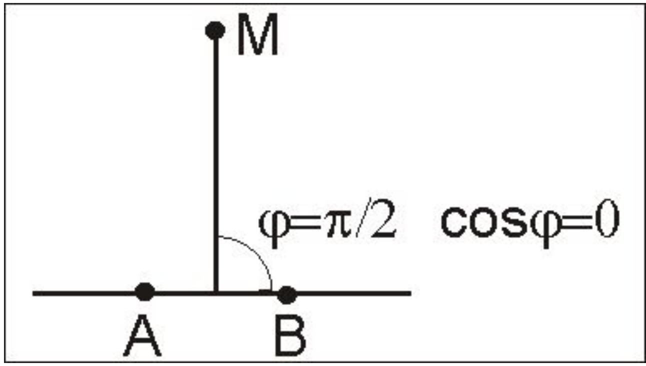
$$E_l = \vec{E} \cdot \vec{1}_l = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{(x_m - x_a)\cdot lx + (y_m - x_a)\cdot ly}{(Ram)^3} - \frac{(x_m - x_b)\cdot lx + (y_m - x_b)\cdot ly}{(Rbm)^3} \right)$$

Потенциал диполя

$$U = \frac{J\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{Ra} - \frac{1}{Rb} \right) = \frac{J\rho}{2\pi}\frac{(Rb - Ra)}{R^2}$$

$Rb\text{-}Ra=AB$ **– длина диполя**

$$U = \frac{J\rho}{2\pi}\frac{AB \cdot \cos\varphi}{R^2}$$



Очевидно , что

$$Er = -\frac{\partial U\partial}{\partial R} = \frac{J\rho}{2\pi}\frac{2\,AB \cdot \cos\varphi}{R^3}$$

$$E\varphi = -\frac{1}{R}\frac{\partial U\partial}{\partial\varphi} = \frac{J\rho}{2\pi}\frac{AB \cdot \sin\varphi}{R^3}$$