

Кубанский государственный технологический университет
Институт компьютерных систем и информационной безопасности
Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина
Электротехника

Лекция № 12

**Классический метод анализа
переходных процессов**

Учебные вопросы:

1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации.
2. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним реактивным элементом.
3. Разряд емкости на **RLC** - цепь.

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 234 – 249
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 103 – 117.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации.

При анализе процессов в ЭЦ приходится иметь дело с двумя режимами их работы: установившимся (стационарном) и переходном (динамическом).

Физической причиной возникновения переходных процессов в цепях является наличие реактивных элементов, в которых накапливается энергия магнитного и электрического поля.

При различного рода воздействиях (подключении к цепи или отключении источников энергии, изменении параметров цепи) изменяется энергетический режим работы цепи, причем эти изменения не могут осуществляться мгновенно в силу непрерывности изменения энергии электрического и магнитного полей, что и приводит к возникновению переходных процессов.



Переходные процессы в цепи описываются однородными (если цепь не содержит источников энергии) или неоднородными (если цепь содержит источник энергии) линейными дифференциальными уравнениями (ЛДУ).

Методы расчета переходных процессов

Классический

Сводится к решению
нлду (олду)

Классический метод обладает наглядностью и удобен для анализа и расчета простых цепей, *операторный* – упрощает расчет сложных цепей.

Операторный

Сводится к решению
алгебраических операторных
уравнений цепи

Частотный

Используются
частотные методы
анализа ЭЦ

□ Методика расчета переходных процессов классическим методом

1. Составить ЛДУ n – го порядка (в общем случае – неоднородное ЛДУ) относительно независимой переменной (в качестве которой может быть выбран ток i_L или напряжение u_C), описывающей состояние цепи после коммутации.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

где a_n – постоянные коэффициенты, $f(t)$ – внешнее воздействие (ЭДС, ток),
 n – порядок ЛДУ (равен числу разнородных реактивных элементов ЭЦ).

2. Составить общее решение неоднородного ЛДУ в виде суммы общего решения однородного ЛДУ и частного решения неоднородного ЛДУ.

$$y(t) = y_{CB}(t) + y_{УСТ}(t)$$

$y_{CB}(t)$ – свободная составляющая искомой функции, т.е. общее решение однородного ЛДУ, полученного при $f(t) = 0$ (содержит постоянные интегрирования).

$y_{УСТ}(t)$ – установившаяся составляющая, т.е. частное решение, представляющее собой вынужденный режим, задаваемый в цепи внешним источником.

3. В общем решении $y_{CB}(t)$ – следует найти постоянные интегрирования **из начальных условий**, т.е. условий цепи в начальный момент времени после ее коммутации на основании **законов коммутации**.

Законы коммутации утверждают, что *ток в индуктивности и напряжение на емкости не могут изменяться скачком.*

Первый закон коммутации связан с непрерывностью изменения магнитного поля катушки индуктивности $W_L = Li/2$ и гласит: *в начальный момент времени $t = 0_+$ непосредственно после коммутации ток в индуктивности имеет то же значение, что и в момент времени $t = 0_-$, до коммутации и с этого момента плавно изменяется*

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+)$$

Второй закон коммутации связан с непрерывностью изменения электрического поля емкости $W_C = Cu/2$ и гласит: *в начальный момент времени $t = 0_+$ непосредственно после коммутации напряжение на емкости имеет то же значение, что и в момент времени $t = 0_-$ до коммутации и с этого момента плавно изменяется*

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+)$$

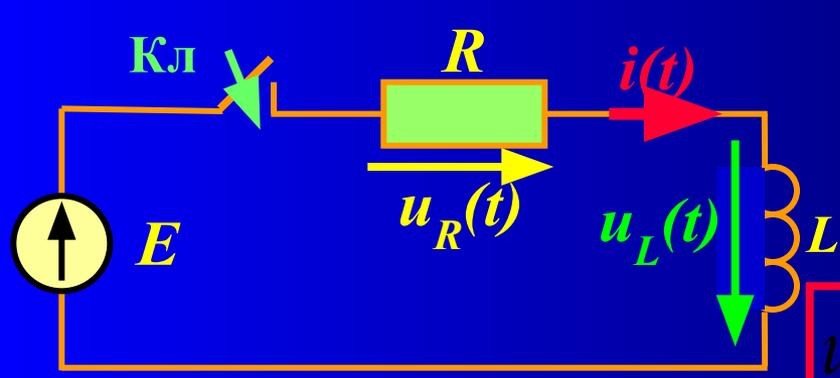
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

Производные могут изменяться скачком

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt}$$

2. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним реактивным элементом

2.1. Подключение источника постоянной ЭДС к RL - цепи

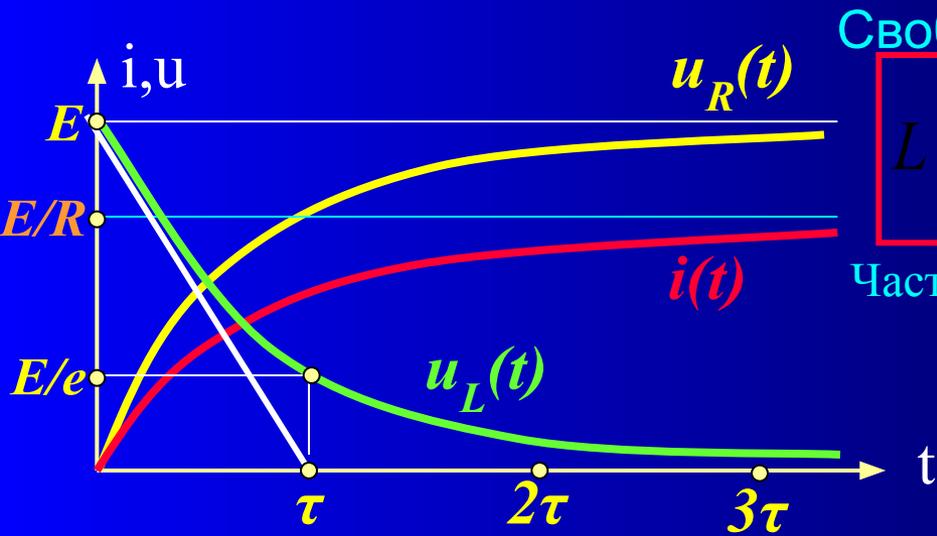


В момент времени $t = 0 \rightarrow$ коммутация и начало переходного процесса.
 В качестве независимой переменной выберем ток $i(t) = i_L(t)$

$$u_R(t) + u_L(t) = E$$



$$iR + L \frac{di}{dt} = E$$



Свободная составляющая – общее решение

$$L \frac{di_{CB}}{dt} + Ri_{CB} = 0; \Rightarrow i_{CB} = A \cdot e^{pt}, p = -\frac{R}{L}$$

Частное решение – ПОСТОЯННЫЙ ТОК $i_y = E/R$

Общее решение – неоднородного ЛДУ

$$i(t) = i_{CB}(t) + i_y(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

$$A = \frac{E}{R} - i(0)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = \frac{L}{R}, [c]$$

Чем больше постоянная времени τ , тем *медленнее затухает переходный процесс и наоборот.*

Постоянная времени служит практической мерой продолжительности переходного процесса, так как теоретически переходный процесс длится бесконечно долго и позволяет сравнивать различные цепи в отношении времени стационарного (установившегося) режима.

На практике считают переходный процесс законченным при $t = 3 \tau$, при этом напряжение или ток достигают **95% от своего установившегося значения**. Графически τ может быть определена как интервал времени на оси t от 0 до точки пересечения касательной к u_L , при этом напряжение на u_L уменьшится в e ($e = 2,7$) раз.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

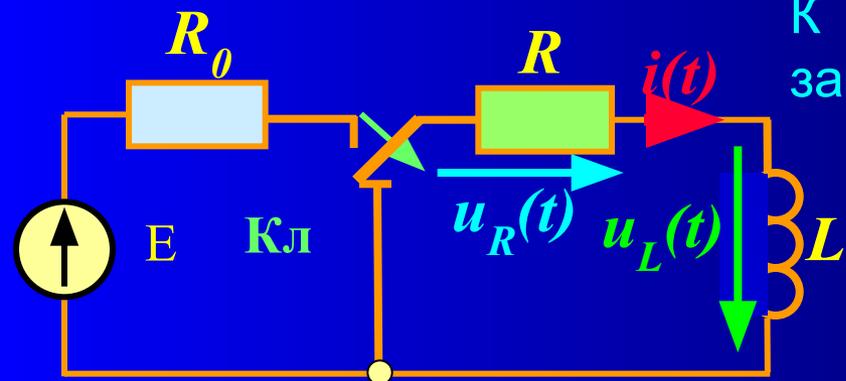
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

$$\tau = \frac{a_n}{a_0}$$

Вывод: В цепях постоянного тока при нулевых начальных условиях в момент времени $t = 0_+$ индуктивность ведет себя как бесконечно большое сопротивление (*аналог – разрыва цепи*), а при $t = \infty$ как бесконечно малое сопротивление (*короткое замыкание цепи*).

2.2. Короткое замыкание RL - цепи

К моменту коммутации в цепи была запасена энергия магнитного поля $W = Li^2/2$.



$$i(0) = \frac{E}{R_0 + R}$$

Ненулевые
начальные условия

Однородное ЛДУ

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$i(t) = i_{CB}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Постоянную интегрирования A находим из начальных условий и закона коммутации.

$$i(0_-) = i(0) = \frac{E}{R_0 + R} = i(0_+) = A; \Rightarrow A = \frac{E}{R_0 + R}$$

Решение ОЛДУ



Ток в цепи после коммутации

$$i_L(t) = \frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{t}{\tau}}; \rightarrow \tau = \frac{L}{R_0 + R}$$

Ток в катушке индуктивности после коммутации поддерживается за счет запасенной магнитной энергии

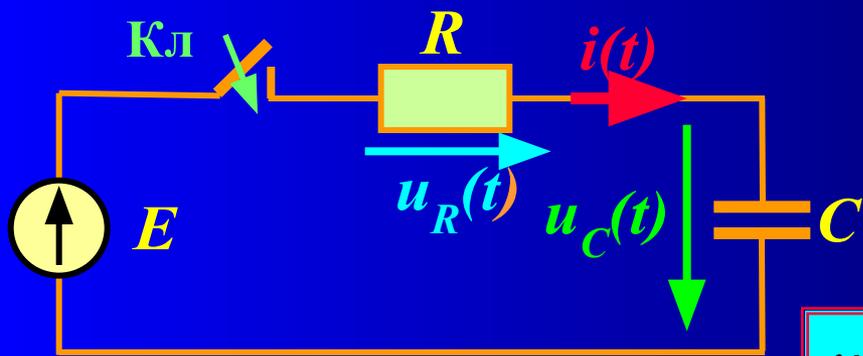
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Вывод: При ненулевых начальных условиях индуктивность ведет себя как источник тока

2.3 Подключение источника постоянной ЭДС к RC - цепи

В качестве переменной выберем напряжение на конденсаторе $u(t) = u_C(t)$

В момент времени $t = 0 \rightarrow$ коммутация и начало переходного процесса.



$$i(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_R(t) + u_C(t) = E$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

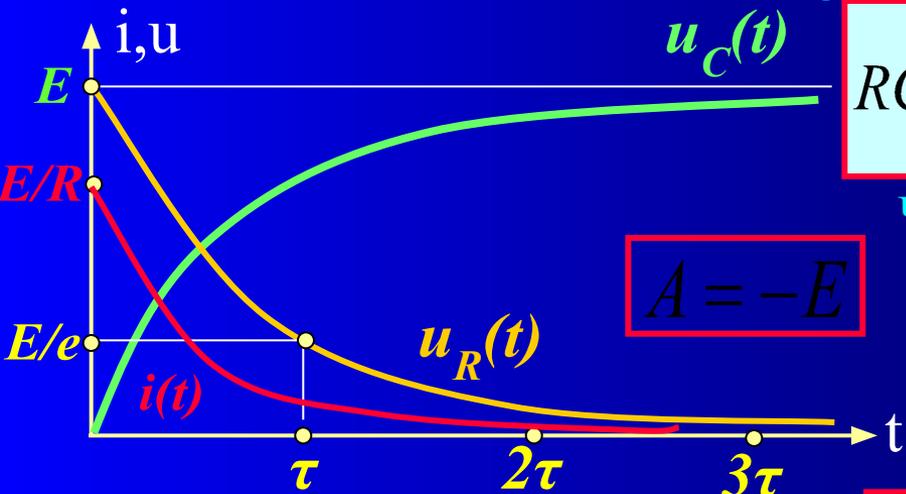
Свободная составляющая – общее решение

$$RC \frac{du_{CB}}{dt} + u_{CB} = 0; \Rightarrow u_{CB} = A \cdot e^{pt}, p = -\frac{1}{RC}$$

Частное решение – ПОСТОЯННЫЙ ТОК $u_y = E$

Общее решение – неоднородного ЛДУ

$$u_C(t) = u_{CB}(t) + u_y(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E$$



$$A = -E$$

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

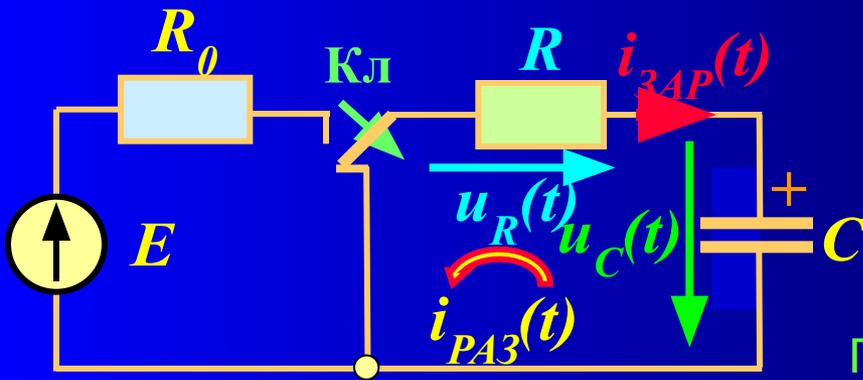
$$u_R(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC, [c]$$

Чем больше постоянная времени τ , тем медленнее нарастает напряжение на емкости и спадает ток.

Вывод: В цепях постоянного тока при нулевых начальных условиях в момент времени $t = 0_+$ **емкость** ведет себя как бесконечно малое сопротивление (аналог - **короткое замыкание цепи**), а при $t = \infty$ как бесконечно большое сопротивление (**аналог – разрыва цепи**).

2.4 Короткое замыкание RC - цепи



$$u_C(0) = E$$

Ненулевые начальные условия

Однородное лДУ

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

Решение ОЛДУ

Постоянную интегрирования **A** находим из начальных условий и закона коммутации.

$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0_-) = u_C(0) = E = u_C(0_+) = A; \Rightarrow A = E$$

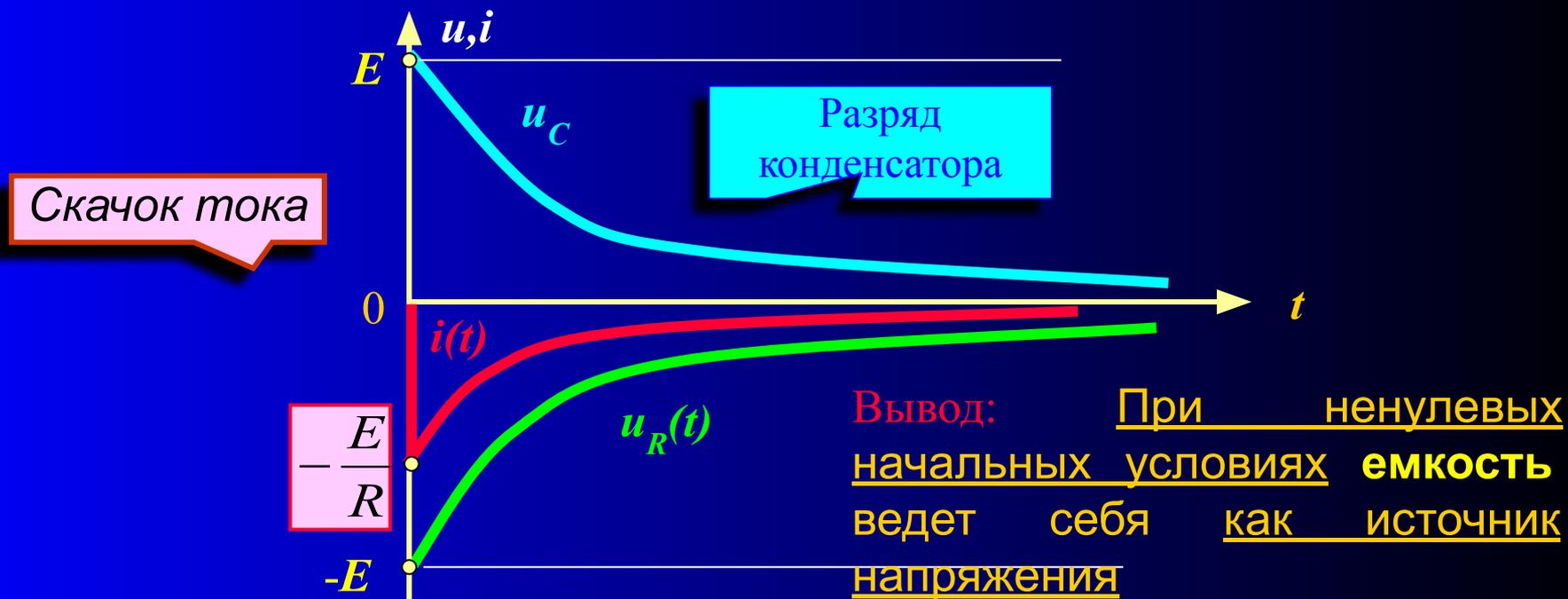
Законы изменения напряжений и тока в цепи после коммутации

$$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Следует обратить внимание, что знак «-» для тока i и напряжения на резисторе R указывает на то, что ток разряда направлен противоположно току заряда, т.е. опорному току емкости

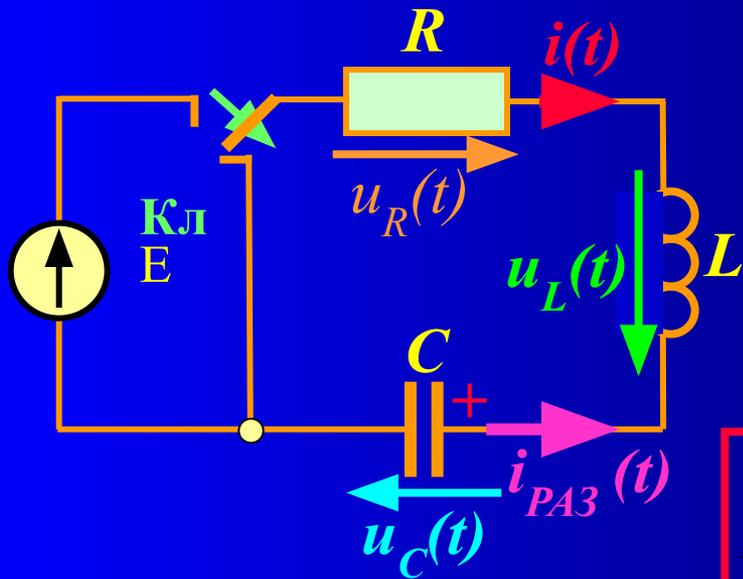


Пример: Известно, что форма тока разряда с тела человека близка к форме переходного процесса RC- цепи с параметрами $C = 200 \text{ нФ}$ и $R = 1 \text{ кОм}$. Если предположить величину статического потенциала на теле человека равным 1000 В, и если произойдет короткое замыкание на тело человека в момент времени $t = 0$, то величина тока изменится скачком от 0 до 1 А, что очень опасно. Снижение тока до значения 1 мкА произойдет не ранее, чем через 276 мкс.

3. Разряд емкости на *RLC* - цепь.

При наличии в электрической цепи двух независимых накопителей энергии (*L* и *C*) переходные процессы в них описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Исходное состояние схемы: емкость до коммутации была заряжена до напряжения *E*
Согласно второму закону Кирхгофа:



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = 0$$

$$= R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

Вводим
обозначения

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha \cdot p + \omega_0^2 = 0$$

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha \cdot p + \omega_0^2 = 0$$

Определим корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Общее решение этого
ОЛДУ имеет вид:


$$u_C(t) = A \cdot e^{p_1 t} + B \cdot e^{p_2 t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

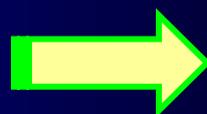
Коэффициент
затухания

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Резонансная частота
контура

Рассмотрим три возможных частных случая

I. Корни действительные и различные



$$R \neq 2\rho$$

II. Корни комплексно сопряженные



$$R \neq 2\rho$$

III. Корни действительные и равные



$$R = 2\rho$$

В контуре при разряде емкости при нулевых начальных условиях могут возникнуть различные типы переходных колебаний

❖ Апериодический процесс разрядки конденсатора

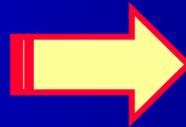
1. Корни действительные и различные

$$R \gg 2\rho$$



$$\alpha^2 \gg \omega_0^2$$

Решение ОЛДУ



$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A \cdot e^{p_1 t} + B \cdot e^{p_2 t}$$

Для определения A и B запишем еще и уравнение тока в цепи

$$i(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(p_1 \cdot A \cdot e^{p_1 t} + p_2 \cdot B \cdot e^{p_2 t})$$

Воспользовавшись

начальными условиями

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A + B$$

$$i_C(0_-) = 0 = i_C(0_+) = p_1 A + p_2 B$$

$$A = \frac{E p_2}{p_1 - p_2}$$

$$B = \frac{E p_1}{p_1 - p_2}$$

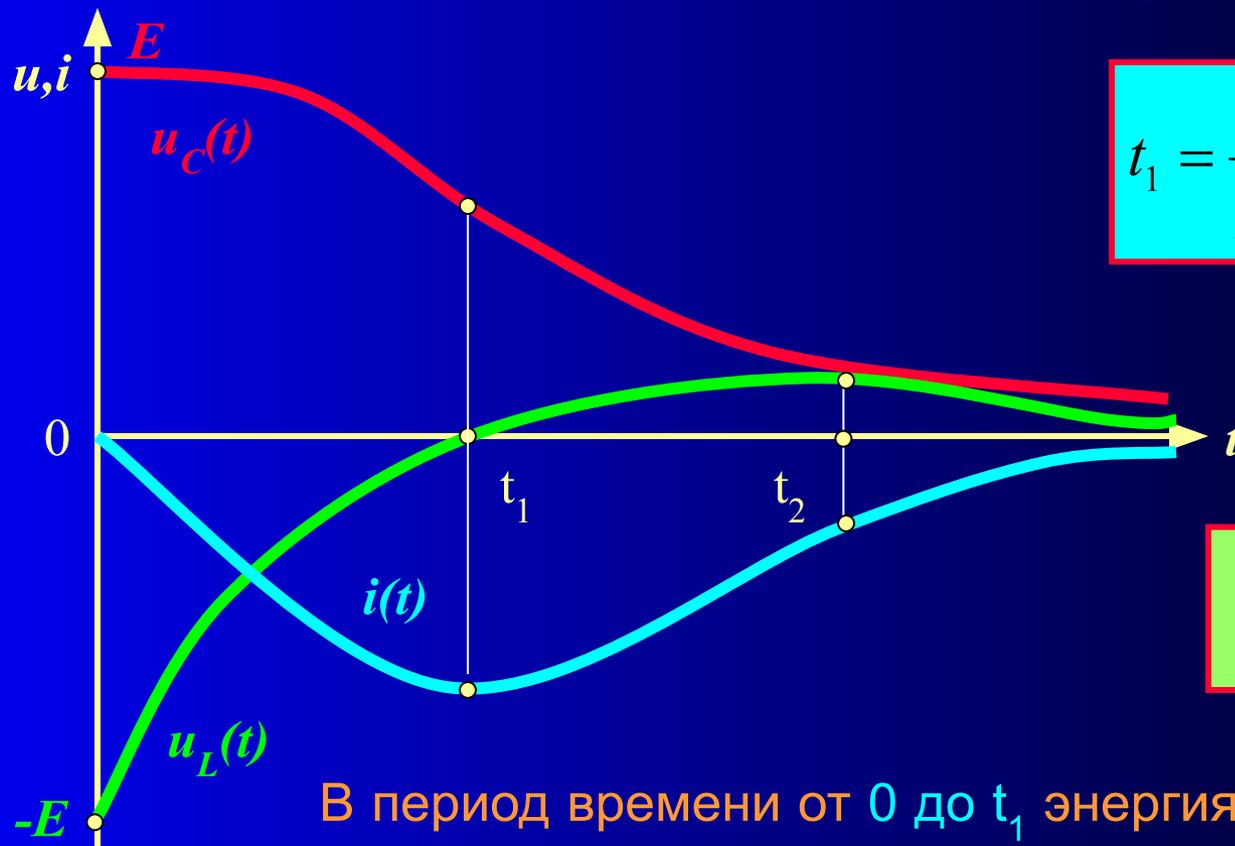
Таким образом, законы изменения тока и напряжений в цепи имеют вид:

$$u_C(t) = \frac{E}{p_1 - p_2} (p_1 \cdot e^{p_2 t} - p_2 \cdot e^{p_1 t})$$

$$i_C(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{p_1 - p_2} (p_2 \cdot e^{p_2 t} - p_1 \cdot e^{p_1 t})$$

Анализ полученных зависимостей, показывает, что каждая из найденных величин i_C , u_C , u_L состоит из двух составляющих, затухающих по экспоненте с коэффициентами составляющих $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$.



$$t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$t_2 = 2 \cdot t_1$$

В период времени от 0 до t_1 энергия W_C расходуется на покрытие тепловых потерь в сопротивлении R и создании магнитного поля в катушке индуктивности L .

Отрицательное значение тока свидетельствует о противоположном направлении тока разряда относительно опорного направления.

❖ Колебательный процесс разрядки конденсатора

2. Корни комплексно-сопряженные

$$R \gg 2\rho$$

$$\alpha^2 \ll \omega_0^2$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_C$$

Решение ОЛДУ

$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta)$$

Закон изменения тока в цепи определяется уравнением

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(-\alpha A \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta) + \omega_C A \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega_C t + \Theta))$$

Исходя из
начальных
условий

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A \sin \Theta$$

$$i_C(0_-) = 0 = i_C(0_+) = -\alpha A \sin \Theta + \omega_C A \cos \Theta$$

$$A = E \frac{\omega_0}{\omega_C}$$

$$\Theta = \arctg \frac{\omega_C}{\alpha}$$

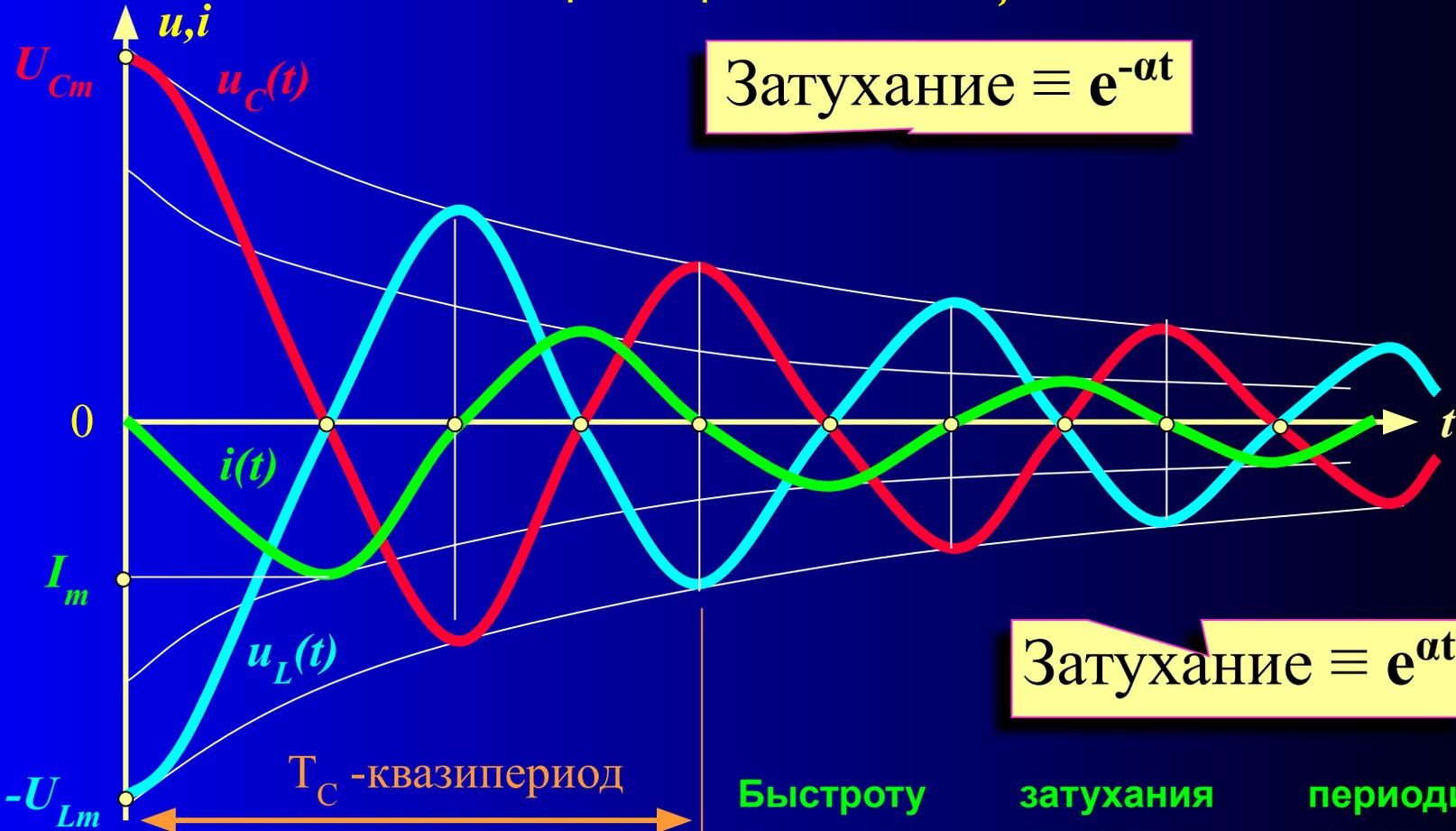
Таким образом, законы изменения тока и напряжений в цепи будут иметь вид:

$$u_C(t) = E \frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta) = U_{Cm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta)$$

$$i(t) = -E \frac{1}{\omega_C L} e^{-\alpha t} \sin \omega_C t = I_m e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \pi)$$

$$u_L(t) = -E \frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta)$$

Полученные уравнения показывают, что в данном случае имеет место **колебательный разряд емкости** с частотой ω_C , зависящей только от параметров ***RLC* - цепи**.



Затухание $\equiv e^{-\alpha t}$

Затухание $\equiv e^{\alpha t}$

$$\Delta = \frac{u_C(t)}{u_C(t+T_C)} = e^{-\alpha T_C}$$

Быстроту процесса затухания принято характеризовать декрементом затухания, который определяют как отношение двух соседних амплитуд тока или напряжения одного знака



❖ Критический процесс разрядки конденсатора

3. Корни действительные и равные

$$R = 2\rho$$



$$\alpha^2 = \omega_0^2$$

$$p_{1,2} = p = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

Решение
ОЛДУ

$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{pt} = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{pt}$$

Для определения A и B запишем еще и уравнение тока в цепи

$$i(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 \cdot t) e^{pt}$$

Воспользовавшись
начальными
условиями

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A_1$$

$$i_C(0_-) = 0 = i_C(0_+) = A_1 \cdot p_1 + A_2$$

$$A = E$$

$$A_2 = \alpha \cdot E$$

Таким образом, законы изменения тока и напряжений в цепи будут иметь вид:

$$u_C(t) = E(\alpha t + 1) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$i_C(t) = -\frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\alpha t}$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E(\alpha \cdot t - 1) e^{-\alpha t}$$

$$R = 2\rho$$



Критическое сопротивление контура

Задание на самостоятельную работу

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В., Страков С.В. **Основы теории цепей: Учебник для вузов, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 234 – 249**
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. **Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 103 – 117.**
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. **Электротехника: Учебник для вузов, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.**