Лекция 2.Понятие о доказательной медицине. Случайное событие. Определение вероятности.

Лектор: Войтик В.В.

Понятие о доказательной медицине

- Понятие о «медицине, основанной на доказательствах» было предложено канадскими учеными из университета Мак Мастера в Торонто в **1990** году. Вскоре это понятие быстро распространилось и нашло сторонников в разных странах мира. **Доказательная медицина подразумевает добросовестное, точное и осмысленное использование лучших результатов**

клинических исследований для выбора лечения конкретного больного.

Понятие о доказательной медицине

- По современным стандартам надежная оценка эффективности методов лечения и профилактики может быть получена только в ходе **рандомизированных контролируемых клинических испытаний** – наиболее доказательных и объективных. Такого рода испытания проводятся для фармакологических препаратов и для хирургических методов лечения, физиотерапевтических процедур, диагностических методов. По окончании исследования сопоставляются частоты наступления **клинически важных исходов** – выздоровления, осложнения, смерти. Таким образом, оцениваются отдаленные (клинические эффекты, установленные в

Понятие о доказательной медицине

- Для получения выводов исследования необходимо учитывать неопределенность многих характеристик, а также конечность числа наблюдений. Наиболее приемлемым инструментом в этом случае оказываются методы статистики. Именно эту особенность и подчеркивает одно из определений статистики, которое было дано американским математиком А. Вальдом – "статистика – **это совокупность методов, которые дают нам возможность принимать оптимальные решения в условиях неопределенности".**

- **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта;
- События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте);

- **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта;
- **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Классическое определение вероятности

Вероятность случайного события определяется как отношение числа равновозможных исходов опыта, благоприятствующих наступлению события, к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность **достоверного события**, то есть события, которое происходит неизбежно в результатекаждого испытания, равна 1. Вероятность **невозможного события** равна 0. Вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1.}$$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым. Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара - событие А, появление зеленого - событие В, появление белого –С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$P(A)=3/10$; $P(B)=2/10$; $P(C)=5/10$.

Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Статистическое определение вероятности

- Вероятностью случайного события называется предел, к которому стремится относительная частота при неограниченном увеличении числа испытаний.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Противоположное событие – происходит только тогда, когда событие А не происходит (пример – выпадение «орла» (событие А) и «решки» (событие);

Сумма вероятностей наступления случайного события А и противоположного ему события В равна 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

События называются **несовместными**, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них, т.е. никакие два не могут появиться вместе в этом испытании.

Случайные события называются **совместными**, если осуществление одного из них не исключает осуществления при этом других из перечисленных событий.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность появления одного (безразлично какого) события из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Р (А или В или С) = Р(А) + Р(В) + Р (С)

Независимые события – вероятность события А не зависит от того, произошло ли событие В. В противном случае события называются **зависимыми**.

Вероятность одновременного появления двух или более независимых событий равна произведению их вероятностей.

$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух независимых событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на вероятность другого:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна $P(A)= 0{,}9$, для второго – $P(B)=0{,}8$. Определить вероятность того, что в цель попадёт хотя бы один стрелок.

Решение. $q(A)= 1- 0,9= 0,1$ (вероятность промаха первого стрелка); $q(B)= 1-0,8= 0,2$ (вероятность промаха второго стрелка); тогда вероятность одновременного промаха обоих стрелков определится следующим образом: $q(AB)=0,1\cdot 0,2=0,02$. Событие противоположное этому событию заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность $P= 1 – 0,02 = 0,98$.

Случайные величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

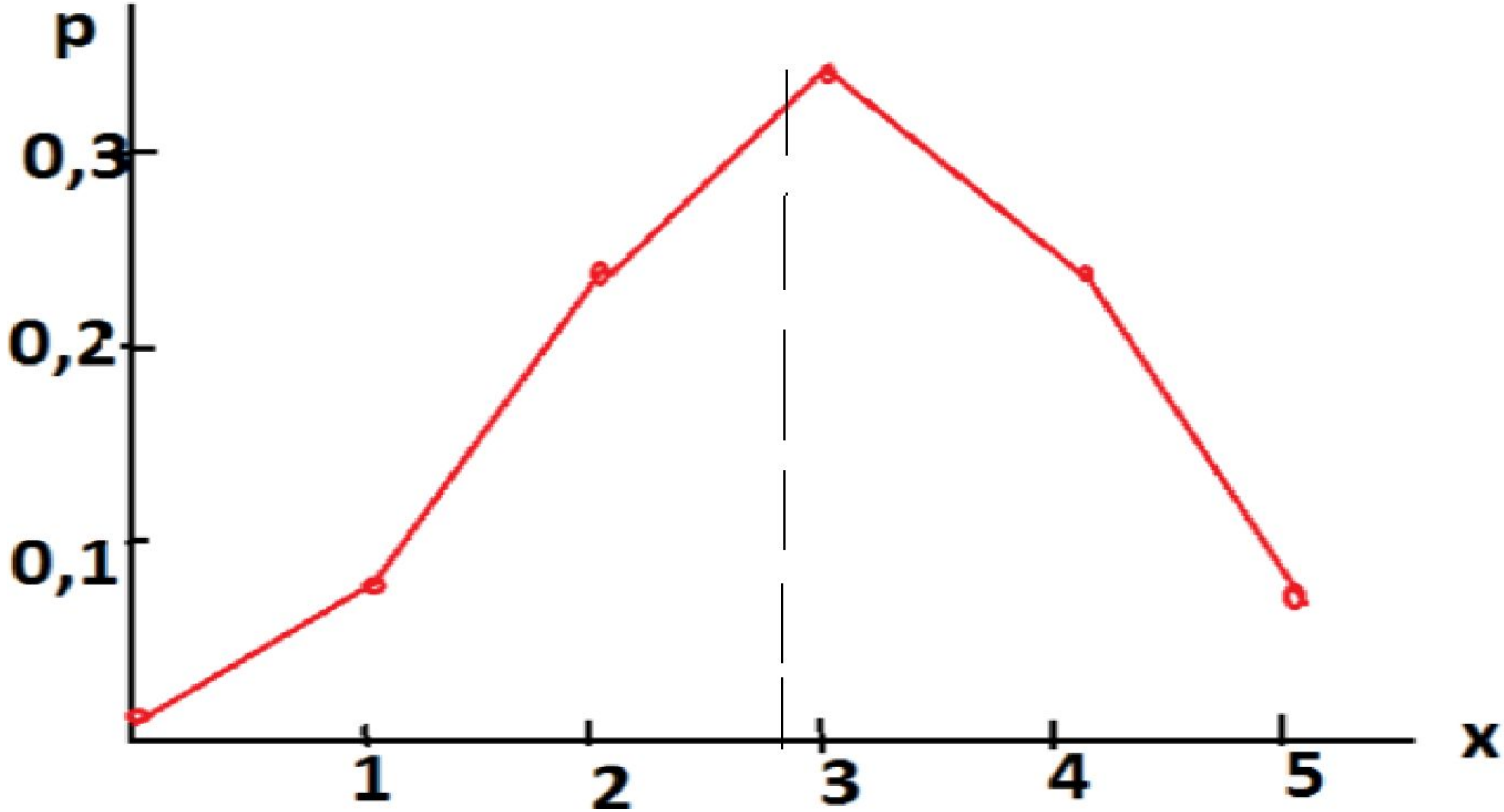
Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Пример дискретного закона распределения :

X	0	1	2	3	4	5
p	0,012	0,077	0,23	0,344	0,259	0,075



- **Функцией распределения** называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*: $F(x)=P(X<x)$.

Для рассмотренного примера:

$F(x_0)=P(X<x_0)=0;$

$F(x_1)=P(X<x_1)=p_0=0{,}012;$

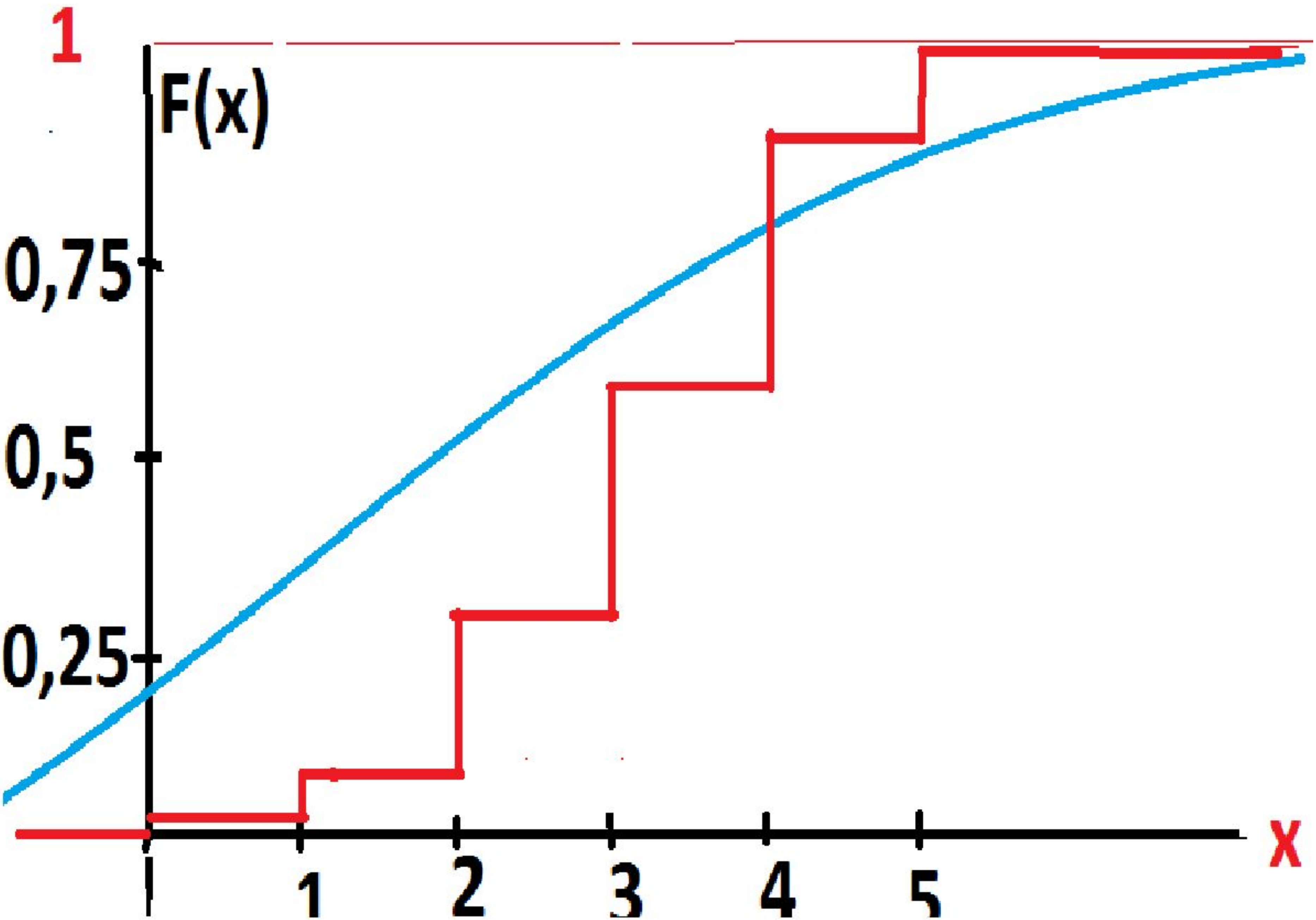
$F(x_2)=P(X<x_2)=p_0+p_1 =0{,}089;$

$F(x_3)=P(X<x_3)=p_0+p_1 +p_2=0{,}319;$

$F(x_4)=P(X<x_4)=p_0+p_1 +p_2 +p_3=0{,}663;$

$F(x_5)=P(X<x_5)=p_0+p_1 +p_2 +p_3+p_4=0{,}922;$

$F(x)=P(X>x_5)=p_0+p_1 +p_2 +p_3+p_4+p_5=1.$


1
F(x)
0,75
0,5
0,25
X
1
2
3
4
5

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения $f(x) = F'(x)$

Плотность распределения также называют дифференциальной функцией.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$\mu = M(x) = x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины, показывает центр распределения.

Для рассмотренного выше примера:

$\mu = 0{,}012 \cdot 0 + 0{,}077 \cdot 1 + 0{,}23 \cdot 2 \cdot + 0{,}344 \cdot 3 + 0{,}259 \cdot 4 + 0{,}078 \cdot 5 = 2{,}8.$

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$\sigma^2 = D(x) = M[x - M(x)]^2$$

Для рассмотренного выше примера вычислим:

$\sigma^2 = 0{,}012(0-2{,}8)^2 + 0{,}077(1-2{,}8))^2 + 0{,}23(2-2{,}8)^2 + 0{,}344(3-2{,}8)^2 + 0{,}259(4-2{,}8)^2 + 0{,}075(5-2{,}8)^2 = 1{,}255.$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma = \sqrt{D(x)}$

Для рассмотренного выше примера вычислим:

$\sigma = \sqrt{1{,}255} = 1{,}12.$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)\,dx =$$

$$= M(X^2) - M^2(X)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}$$

Повторение испытаний.Формула Бернулли.

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие A наступает с вероятностью *P(A)=p*, а противоположное ему событие с вероятностью $P(\overline{A})=1-p=q$.

Если в результате *n* опытов событие А наступает ровно *m* раз, то остальные *n-m* раз это событие не наступает. Событие А может появиться *m* раз в *n* испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из *n* элементов по *m*. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$c_{n,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем **формулу Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

<u>Пример.</u> По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали три раза.

$$p_{5,3} = \frac{5!}{3!\,2!} 0{,}4^3 0{,}6^2 = 0{,}23$$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; $3! = 6$; $2! = 2$; $c_{5,3} = 10$.

$P_{5,5} = 0{,}078$; $p_{5,4} = 0{,}259$; $p_{5,3} = 0{,}344$; $p_{5,2} = 0{,}23$; $p_{5,1} = 0{,}077$; $p5{,}0 = 0{,}012$.

$078 + 0{,}259 + 0{,}344 + 0{,}23 + 0{,}077 + 0{,}012 = 1$

Закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «успеха» в n независимых испытаниях (воз-
можные значения случайной величины X – 0,1,2,...,n), в каждом из которых вероятность появления «успеха» равна p; вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений «успеха») вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

А такое распределение называют биномиальным

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $= np$, и говорят λ что - случайная величина λ и распределена по **закону Пуассона**.

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании:

$$M(X) = np$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:

$$D(X) = npq$$

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

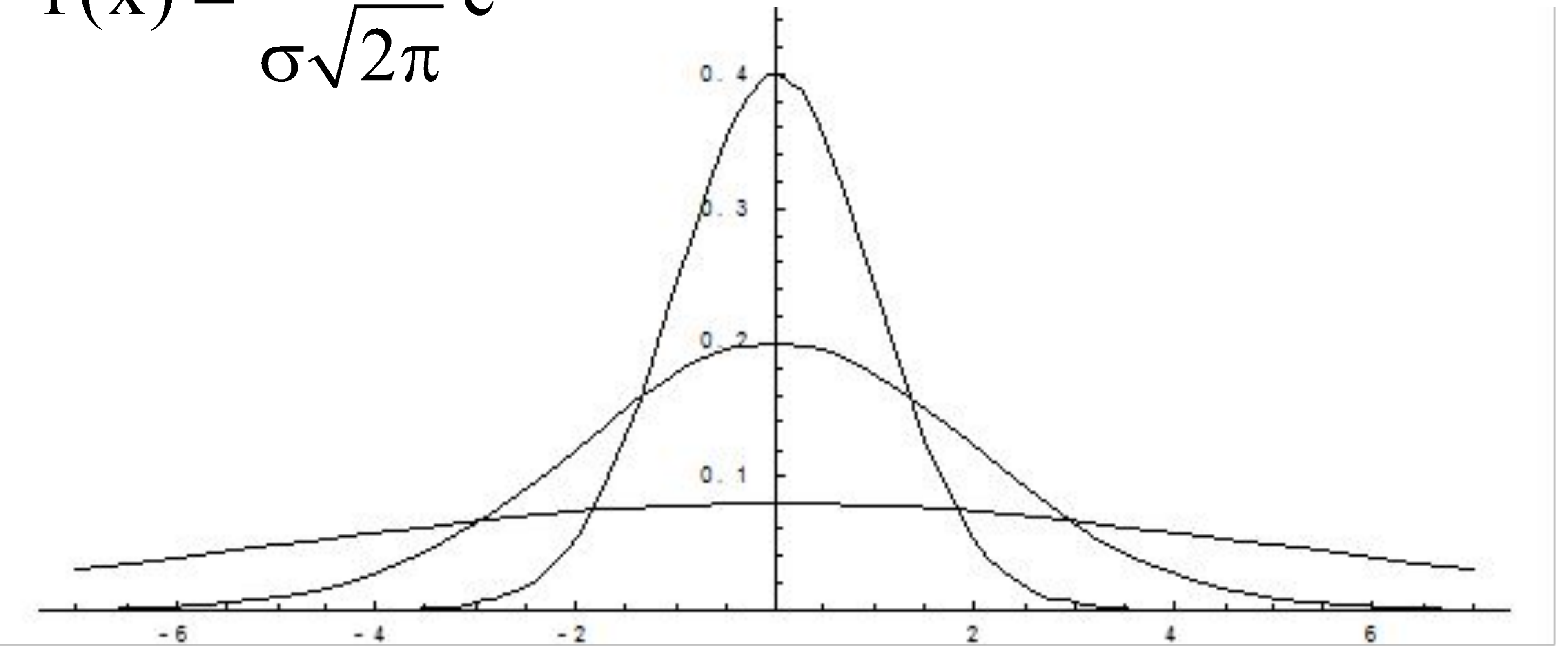


График нормального распределения

Для случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), вычисляется по формуле

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

где Φ(x) –функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Правило трёх сигм.

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

$$P\left(\left|x - M(x)\right| < 3\sigma\right) = 0{,}9973$$