§4. Системы линейных уравнений

П. 4.1 Основные понятия

Определение. В общем случае линейное уравнение имеет вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – постоянные величины, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные.

Любой ***n***-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***решением*** уравнения, если при подстановке его координат уравнение обращается в тождество.

Два линейных уравнения называются ***равносильными***, если они имеют одно и тоже множество решений.

Замечание. Равносильные системы получаются при элементарных преобразованиях, проводимых над строками системы.

Рассмотрим случаи, при которых возможны решения линейного уравнения:

- $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b = 0$ В этом случае уравнение имеет вид $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$

и называется ***тривиальным***. Данное уравнение имеет бесконечное множество решений; ему удовлетворяет любой *n*-мерный вектор.

- $a_1 = a_2 = \ldots = a_n,\ b \neq 0$ В этом случае уравнение имеет вид $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$

и называется ***противоречивым***. Данное уравнение не имеет решений; ему не удовлетворяет ни какой *n*-мерный вектор.

- Хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Пусть $a_1 \neq 0$.

В этом случае можно разрешить уравнение относительно, например, x_1

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} x_n;$$

при этом x_1 называется ***разрешенной переменной***, а $x_2, x_3, \dots, x_n$ называются свободными переменными если им придать любые конкретные значения $x_2 = k_2, x_3 = k_3, \dots, x_n = k_n$, то вектор $K = (k_2, k_3, \dots, k_n)$ является решением исходного уравнения. При подстановки его в уравнение, получим

$$a_1\left(\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} k_2 - \frac{a_3}{a_1} k_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1} k_n\right) + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b - a_2 k_2 - a_3 k_3 \dots - a_n k_n + a_2 k_2 + a_3 k_3 \dots + a_n k_n = b \Leftrightarrow b = b.$$

Уравнение обращается в тождество. Поскольку свободные переменные выбраны произвольно, то уравнение имеет бесконечное множество решений.

Определение. ***Системой линейных алгебраических уравнений***, содержащих ***m*** уравнений и ***n*** переменных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются ***коэффициентами*** системы, а числа b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – ***свободными членами***.

Такую систему лучше записывать в ***матричной форме*** $\boldsymbol{A \cdot X = B}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$$ – столбец переменных ,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов.

Определение. ***Расширенной матрицей*** системы называется матрица $\overline{A}$ коэффициентов, дополненная столбцом свободных членов

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Определение. ***Решением системы линейных алгебраических уравнений*** называется *n*-мерный вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, который является решением каждого уравнения системы.

Классификация систем линейных уравнений по количеству решений

- Определение. Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение.
- Определение. Система уравнений называется ***несовместной***, если она не имеет ни одного решение.
- Определение. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение.
- Определение. Совместная система называется ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

П.4.2 Разрешенная система уравнений. Общее, частное и базисное решение.

- Определение. Переменная x_j называется ***разрешенной*** для системы уравнений, если она входит в одно из уравнений системы с коэффициентом +1, а в остальные уравнения на входит, (т.е.входит с коэффициентом, равным 0)
- Определение. Система уравнений называется ***разрешенной***, если каждое уравнение системы содержит разрешенную переменную, среди которых нет совпадающих.
- Определение. Разрешенные переменные, взятые по одному из каждого уравнения системы, образуют ***полный набор*** разрешенных переменных системы
- Определение. Разрешенные переменные, входящие в полный набор, называются ***базисными***, а переменные , не входящие в этот набор – ***свободными***.

В общем случае разрешенная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{1(m+1)}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \qquad\quad + a_{2(m+1)}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m(m+1)}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- Определение. ***Общим решением*** разрешенной системы уравнений называется совокупность выражений разрешенных переменных через свободные члены или свободные переменные, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1(m+1)}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 - a_{2(m+1)}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_m - a_{m(m+1)}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

- Определение. ***Частным решением*** системы уравнений называется решение, полученное из общего при конкретно заданных значениях свободных переменных.
- Определение. ***Базисным решением*** системы уравнений называется частное решение, полученное из общего при нулевых значениях свободных переменных.
- Определение. Базисное решение системы уравнений называется ***вырожденным***, если количество его координат, отличных от нуля, меньше количества разрешенных переменных.
- Определение. Базисное решение системы уравнений называется ***невырожденным***, если количество его координат, отличных от нуля, равно количеству разрешенных переменных системы, входящих в полный набор.

Теорема 4.1. Разрешенная система уравнений всегда совместна; причем если система не имеет свободных переменных, то она определена; если же имеется хотя бы одна свободная переменная, то система не определена.

Пример 4.1

Найти общее, базисное и какое-либо частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20. \end{cases}$$

П.4.3. Элементарные преобразования систем линейных уравнений

Системы линейных уравнений приводятся к равносильным разрешенным системам с помощью элементарных преобразований. Рассмотрим две теоремы об элементарных преобразованиях.

Теорема 4.2. Если какое-либо уравнение системы умножить на некоторое отличное от нуля число, а остальные уравнения оставить без изменения, то получиться система, равносильная данной.

Теорема 4.3. Если к какому-либо уравнению системы прибавить другое, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получиться система равносильная данной

Следствие из теорем. Если какому-либо уравнению прибавить другое, умноженное на некоторое число, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получиться система равносильная данной.

П.4.4. Преобразование Жордана. Формулы перерасчета коэффициентов системы уравнений

Жордан

(Jordan) Мари Эдмон Камиль (05.01.1838, Лион, — 21.01.1922, Париж), французский математик, член Института Франции (1881). Издатель "Journal de mathématiques pures et appliquées" (1885—1921), был член-корреспондентом Петербургской Академии Наук (1895). Работы **Жордана** относятся к алгебре, теории функций, а также топологии и кристаллографии. С именем **Жордана** связаны: теорема Жордана — Гёльдера о композиционных рядах групп, нормальная (жорданова) форма матриц, Жордана кривая; им введено понятие функции с ограниченным изменением **Жордана** принадлежат первый систематический курс теории групп и теории Галуа (1870) и трёхтомный курс анализа (1882—1887).

Преобразования ***Жордана*** с разрешающим элементом $a_{lk} \neq 0$ позволяет получить для системы уравнений разрешенную переменную x_k в уравнении с номером ***l***.

Типы преобразований ***Жордана***:

- Уравнение с разрешающим элементом a_{lk} делиться на этот элемент;
- Уравнение с разрешающим элементом a_{lk} умножается на подходящие множители и прибавляется ко всем другим уравнениям для того, чтобы исключить переменную x_k из этих уравнений.

Запишем два уравнения: уравнение с номером ***l,*** содержащие разрешающий элемент a_{lk} , и любое другое уравнение с номером ***i***.

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lj}x_j + \ldots + \boxed{a_{lk}}x_k + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad \Bigg| \times\left(-\frac{a_{ik}}{a_{lk}}\right)$$

При делении уравнения с номером ***l*** на a_{lk}, его коэффициенты пересчитываются по формулам

$$a'_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \quad b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

Чтобы исключить x_k из уравнения с номером i ($i = 1,2,\ldots,m$; $i \neq l$), нужно уравнение с номером l умножить на $\left(-\frac{a_{ik}}{a_{lk}}\right)$ и прибавить к этому уравнению. При этом коэффициенты уравнения с номером i пересчитываются по формулам

$$a'_{ij} = a_{ij} + a_{lj}\left(-\frac{a_{ik}}{a_{lk}}\right) = \frac{a_{ij}a_{lk} - a_{ik}a_{lj}}{a_{lk}}$$

$$(i = 1,2, \ldots, m;\ i \neq l;\ j = 1,2, \ldots, n);$$

$$b'_i = b_i + b_l\left(-\frac{a_{ik}}{a_{lk}}\right) = \frac{b_i a_{lk} - b_l a_{ik}}{a_{lk}}$$

$$(i = 1,2, \ldots, m;\ i \neq l).$$

Для того чтобы составить алгоритм решения системы уравнений методом Жордана-Гаусса, необходимо использовать две следующие теоремы.

Теорема 4.4. (о сокращении числа уравнений системы) Если система уравнений содержит тривиальное уравнение, то его можно исключить из системы; при этом получиться система равносильная исходной.

Теорема 4.5. (о несовместности системы уравнений) Если система уравнений содержит противоречивое уравнение, то она несовместна.

П.4.5. Алгоритм Жордана- Гаусса

ГАУСС, КАРЛ ФРИДРИХ (Gauss, Carl Friedrich) (1777-1855), немецкий математик, астроном и физик. Родился 30 апреля 1777 в Брауншвейге. В 1788 при поддержке герцога Брауншвейгского Гаусс поступил в закрытую школу Коллегиум Каролинум, а затем в Гёттингенский университет, где обучался с 1795 по 1798. В 1796 Гауссу удалось решить задачу, не поддававшуюся усилиям геометров со времен Евклида: он нашел способ, позволяющий построить с помощью циркуля и линейки правильный 17-угольник. На самого Гаусса этот результат произвел столь сильное впечатление, что он решил посвятить себя изучению математики, а не классических языков, как предполагал вначале. В 1799 защитил докторскую диссертацию в университете Хельмштадта, в которой впервые дал строгое доказательство т. н. основной теоремы алгебры, а в 1801 опубликовал знаменитые ***Арифметические исследования*** (***Disquisitiones arithmeticae***), считающиеся началом современной теории чисел и т.д.

Алгоритм Жордана- Гаусса.

1. Проверяется, не является ли система несовместной. Если система содержит *противоречивое* уравнение, то она ***несовместна***.
2. Проверяется возможность сокращения числа уравнений. Если система содержит *тривиальное* уравнение, то ***его вычеркивают***.
3. Если система уравнений является *разрешенной*, то записываются общее решение системы и если необходимо частные решения.
4. Если система уравнений *не является разрешенной*, то в уравнении, не содержащем разрешенной переменной, выбирают разрешающий элемент и производят *преобразование* ***Жордана*** *с этим элементом.*

Далее переходят к пункту 1.

Пример 4.2

Решить систему методом Жордана-Гаусса. Найти общее и базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7. \end{cases}$$

Пример 4.3

Решить систему методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

П.4.5.Экономические приложения.

Применение систем линейных уравнений при решении экономических задач.

Задача №1. Фирмой было выделено 236 тыс. руб. для покупки 29 предметов для оборудования офиса: несколько компьютеров по цене 20 тыс. руб. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. руб. за стол, стульев по 1,5 тыс. руб. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. руб., а столы – по 8 тыс. руб. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выяснить, какое количество единиц каждого единиц каждого вида оборудования было приобретено.

- Р е ш е н и е задачи №1: Пусть

$$x_1, x_2 \quad и \quad x_3$$

– количества купленных компьютеров, столов и стульев. Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 29, \\ 20x_1 + 8{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 236, \\ 19{,}5x_1 + 8(x_2 + 1) + 1{,}5x_3 = 236. \end{cases}$$

О т в е т задачи №1.

При экономичной закупке было приобретено

- 7 компьютеров,
- 10 столов,
- 13 стульев.

Задача №2.

Малое предприятие по пошиву мужской одежды для свадебных торжеств при дизайнерской мастерской Татьяны Мухи в течение трех дней производила рубашки, костюмы и нижнее белье. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти дни:

День	*Объем выпуска продукции(единиц)*			*Затраты (в тыс. руб.)*
	Нижнее белье	Костюмы	Рубашки	
Первый	50	10	30	176
Второй	35	25	20	168
Третий	40	20	30	184

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида

Р е ш е н и е задачи №2.

Пусть x_1, x_2 и x_3 – количества сшитых комплектов нижнего белья, костюмов и рубашек. Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 176, \\ 35x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 168, \\ 40x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 184. \end{cases}$$

О т в е т. Себестоимости: комплекта нижнего белья – 1,8 тыс. руб., костюма – 2,6 тыс. руб., рубашки – 2 тыс. руб.

Задача №3. (Линейная модель обмена или международной торговли)

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вектор доходов регионов страны (национальных доходов стран) $S_1, S_2, ..., S_n$, а $A_{n\times n} = (a_{ij})$ − структурная матрица торговли, где a_{ij} − доля дохода региона (национального дохода), которую регион (страна) S_j тратит на покупку товаров у региона (страны) S_i, причем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Для сбалансированной торговли необходимо найти такой равновесный вектор доходов (национальных доходов) $\boldsymbol{x}$, чтобы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Задача свелась к отысканию собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

Структурная матрица торговли четырех регионов (Ростовской области, Краснодарского края, Ставропольского края, Московской области) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$

где значения приведены в млрд. руб.

Решение задачи №3:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - E \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & -0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & -0.6 \end{bmatrix}$$

Решение задачи №3:

Необходимо найти собственный вектор $\boldsymbol{x}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив матричное уравнение (A - E) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, или

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.157024793 \\ 0 & 1 & 0 & -1.20661157 \\ 0 & 0 & 1 & -1.81818181818 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

методом Гаусса. Найден вектор $\boldsymbol{x}$ = (1,16; 1,21; 1,82; 1). Полученный результат означает, что сбалансированность торговли четырех регионов достигается примерным соотношением их доходов 1,16 : 1,21 : 1,82 : 1.

П.4.6. Системы линейных однородных уравнений

- Определение. Система уравнений называется ***однородной***, если ее правые части равны нулю.
- Определение. Решение системы уравнений называется ***нулевым***, если все его координаты равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

- Замечание. ***Любая*** система линейных однородных уравнений ***всегда совместна***, т.е. она всегда имеет нулевое решение.
- **Теорема 4.6.** (о решении однородной системы линейных уравнений). Если количество (***n***) переменных однородной системы линейных уравнений больше количества (***m***) уравнений, то система имеет хотя бы одно ненулевое решение.

- *Пример № 4.4.* Найти фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 4x_5 + 8x_6 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 4x_5 + 12x_6 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 + x_5 - 7x_6 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 7x_6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 3x_5 + x_6 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 9x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$$

- Главные результаты, полученные Кронекером, относятся к теории эллиптических функций, теории алгебраических уравнений и теории чисел.

КРОНЕКЕР, ЛЕОПОЛЬД (Kronecker, Leopold) (1823-1891), немецкий математик, известный своими работами по высшей алгебре и теории линейных уравнений, один из приверженцев "арифметизации математики". Родился 7 декабря 1823 в прусском городе Лигниц (ныне Легница, Польша). По окончании гимназии поступил в Берлинский университет, где в 1845 получил докторскую степень за работу по теории чисел. Интерес к этой науке пробудился у Кронекера под влиянием его гимназического учителя, впоследствии известного математика Э.Куммера.

До 30 лет Кронекер занимался семейным бизнесом, связанным с сельским хозяйством, а математике посвящал лишь свободное время. Удачно устроив свои дела и став зажиточным человеком, он в 1855 поселился в Берлине. Там в течение многих лет преподавал в университете.

Алоизий Капелли —итальянец, доктор прав и философии, занимал кафедру права гражданского и канонического в Пизанском университете (1797—1801 гг.); по оставлении кафедры служил чиновником во Флоренции и Вольтерре; в 1804 г. занял в Виленском университете кафедру гражданского и уголовного права; с 1808 г. преподавал в нем итальянский язык; 1815 г. читал в университете и главной при нем духовной семинарии каноническое право в очень либеральном духе (по отзыву его учеников — Иосифа Семашки и Антония Зубки); два раза был деканом факультета словесных наук и изящных искусств (1811—1817 и 1827—1832); по закрытии университета, преподавал (и 1833—1838 гг.) каноническое право в Виленской римско-католической академии; издал несколько книг и брошюр по гражданскому, уголовному и каноническому праву и по истории итальянской литературы на латинском и итальянском языках; пользовался особенными симпатиями студентов.

П.4.7. Общая теория систем линейных уравнений.

- **Теорема 4.7.** (Кронекера - Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.
- **Теорема 4.8.** Если ранг расширенной матрицы совместной системы линейных уравнений равен количеству переменных, то система имеет единственное решение.
- **Теорема 4.9.** Если ранг расширенной матрицы совместной системы линейных уравнений меньше количества переменных, то система имеет бесконечное множество решений.

- *Пример № 4.5*. Найти общее, базисное и фундаментальные решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 12, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 10x_5 = 11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 11x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$