



Основы обработки результатов измерений

ИЛИ

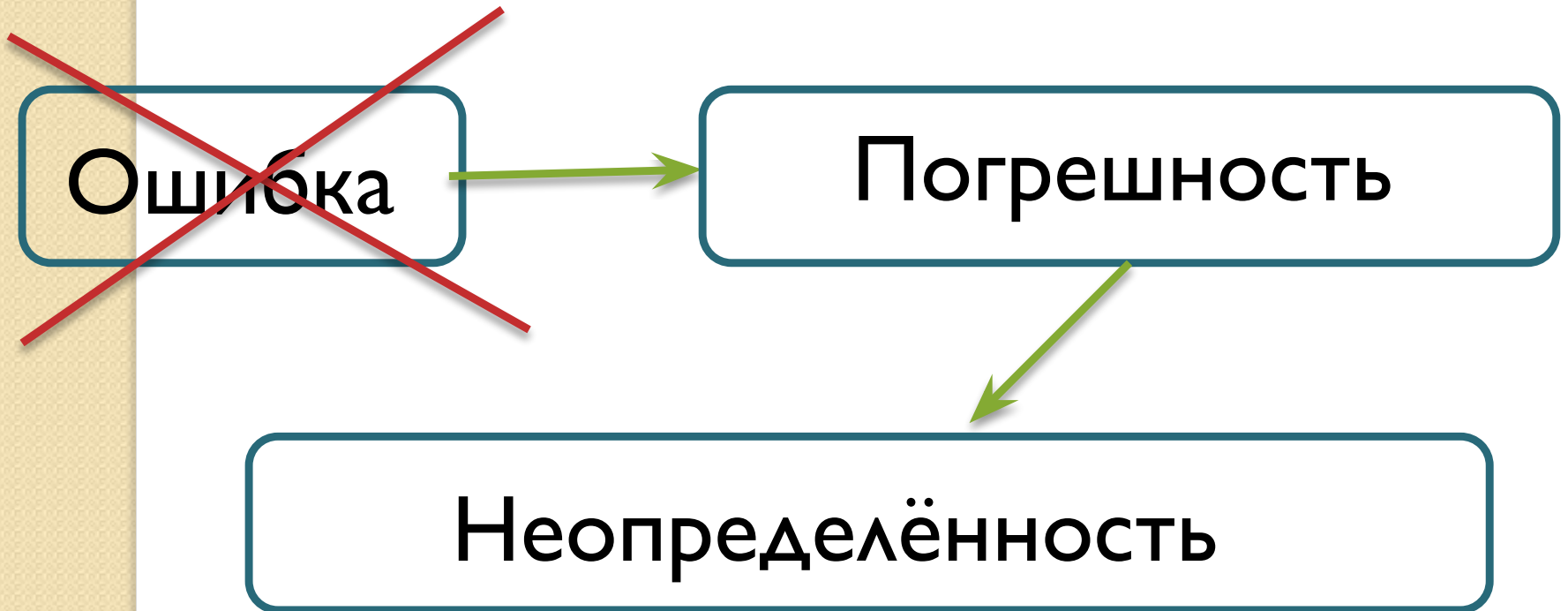
Как правильно оформить лабу по ФПРу

Рекомендуемая литература

- Е.А. Степанова, Н.А. Скулкина, А.С. Волегов. Основы обработки результатов измерений: учебное пособие. – Издательство Уральского университета: Екатеринбург. – 2014
- Г.П. Яковлев. Краткие сведения по обработке результатов измерений: методические указания для студентов физического факультета. – Издательство Уральского университета: Екатеринбург. - 2001

Главный вопрос: ЗАЧЕМ????!!!!!!

1. Необходимо дать гарантии того, что результаты будут воспроизводиться!
2. Нужно определить характеристика качества получаемых результатов



Физические величины

Основные – входящие в систему величин и условно принятые в качестве независимых от других величин этой системы

Производные – определяются через основные величины

Основными в СИ являются:

- Метр (м)
- Килограмм (кг)
- Секунда (с)
- Ампер (А)
- Кельвин (К)
- Кандела (кд)
- Моль (моль)

ГОСТ 8.417-2001

- Задаёт все единицы измерения физических величин, разрешённые для применения в России.
- В нём прописаны правила написания единиц измерения. Например:
 - в тексте можно использовать либо только английское, либо только русское написание;
 - единицы отделяются от величин пробелом (кроме градусов)
 - если единица названа в честь учёного, она пишется с большой буквы.

ИЗМЕРЕНИЕ

Основное уравнение:

$$X = q [X]$$

Измерить величину X означает получить некоторое её значение q в единицах $[X]$.

Истинное значение – идеально, НЕДОСТИЖИМО!!!

Действительное значение – получено экспериментально и близко к идеальному, им и пользуются.

Результат измерений – значение величины, полученное путём измерений

Качество измерений – насколько результат близок к действительному значению. Характеризуются

погрешностями измерений – разницей между результатом и действительным значением.

$$\Delta = X - X_{\text{д}}$$

ПОГРЕШНОСТИ

- Δ – абсолютная погрешность. Выражается в тех же единицах, что и измеряемая величина. По её величине сложно судить о точности измерений.

Пример:

Измерение 1: 500 мВ

Измерение 2: 5 мВ

Абсолютная погрешность: 0,1 мВ

Какое измерение более точное?

- **Относительная погрешность** – отношение абсолютной погрешности к действительному значению величины.

$$\delta = \frac{\Delta}{X} \cdot 100 \%$$

- **Приведённая погрешность** – отношение абсолютной погрешности к нормирующему значению (обычно – это предел измерений прибора):

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100 \%$$

ПОГРЕШНОСТИ

Все погрешности делятся на:

- Случайные
- Систематические
- Промахи (грубые)

Систематическая погрешность (Δ_c) – составляющая погрешности измерений, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях. Часть можно исключить. При обработке учитывают неисключённые погрешности.

Случайная погрешность ($\Delta_{\text{сл}}$) – составляющая погрешности, меняющаяся случайным образом (как по знаку, так и по величине) в серии повторяющихся измерений. Они **НЕУСТРАНИМЫ!!!** Для их описания используется теория математической статистики.

Грубая погрешность – резко отличается от остальных результатов.

ПОГРЕШНОСТИ

Инструментальная погрешность – обусловлена погрешностью средства измерения

Методическая погрешность обусловлена:

- 1) Отличием принятой модели объекта от модели, адекватно описывающей измеряемое свойство (например, условно считать грушу цилиндром)
- 2) Влиянием средства измерения на объект (например, подключение к участку цепи вольтметра с конечным, а не бесконечным сопротивлением)
- 3) Влиянием алгоритмов, применяемых при обработке (например, применение определённого сглаживания экспериментального графика)

Субъективная погрешность – обусловлена погрешностью отсчёта оператора и связана с несовершенством органов чувств. Выход – автоматизированные измерения.

Классификация измерений

По количеству измерительной информации:

- **Однократное** – один раз (например, время по часам)
- **Множественное** – ряд однократных измерений ($n > 4$).

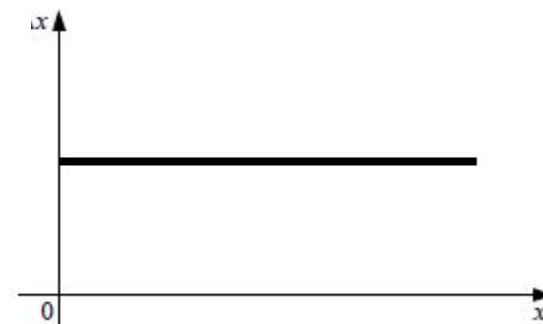
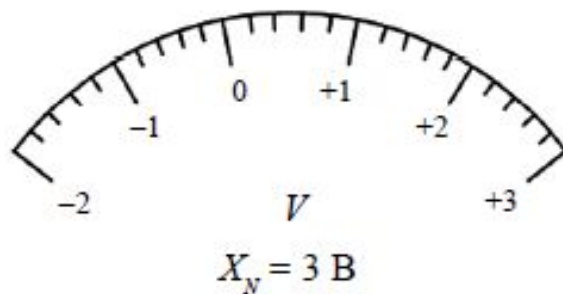
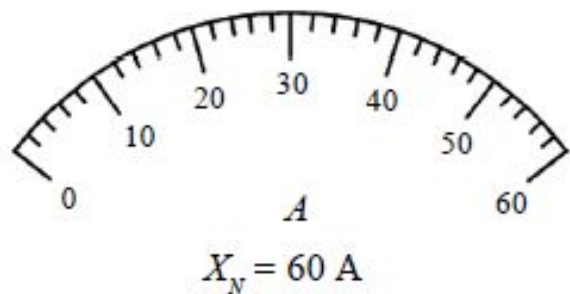
По способу получения информации:

- **Прямое измерение** – искомое значение величины получается непосредственно (например, длина с помощью штангенциркуля)
- **Косвенное измерение** – определение результата по формуле на основании прямого измерения других величин (например, плотность цилиндра при измерении его массы и размеров)
- **Совместные измерения** – измеряются две разноимённые величины для нахождения расчётным путём зависимости между ними.
- **Совокупные измерения** – измеряется несколько одноимённых величин для нахождения зависимости между ними (например, определение массы различных гирь при помощи одной гири известной массы)

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

Определяется тем прибором, который используется в конкретном измерении. Следовательно, она будет инструментальной. Для удобного определения систематической погрешности вводят **класс точности прибора**. Обозначение класса точности зависит от характера систематической погрешности, который может быть:

- 1) **Аддитивным** – значение абсолютной погрешности не зависит от измеренного значения. Класс точности определяется приведённой погрешностью и определяется числом из ряда $[1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6] \cdot 10^n$
 $n = 1, 0, -1, -2, \dots$ Например, если класс точности 0.2, то $\gamma = \pm 0.2\%$. При расчёте погрешность необходимо переводить в доли!!! (например, $0.2\% =$ алы прибора:



Если шкала с условным нулём, то $X_N = |X_{\max} - X_{\min}|$

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

- 2) Шкала прибора существенно неравномерная. Класс точности определяется приведённой погрешностью. Обозначение на приборе:

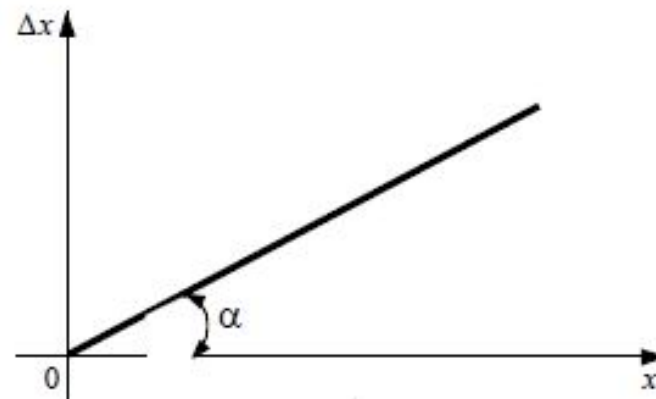
0,5

Нормирующее значение устанавливается равным длине шкалы или её части, соответствующей диапазону измерений.

- 3) **Мультипликативный** – значение абсолютной погрешности линейно зависит от измеренного значения. Класс точности определяется относительной погрешностью. Обозначение на приборе:

1,0

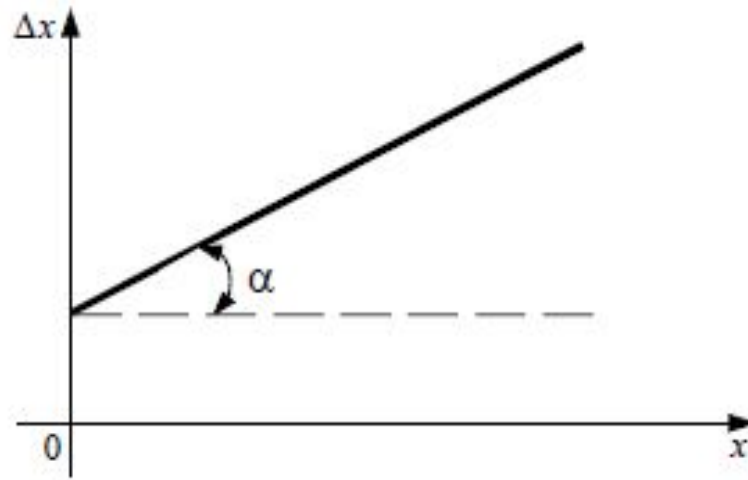
$$\delta = \pm 1.0\%$$



СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

- 4) А + М - на приборе обозначаются двумя числами через дробь (с/d).
Относительная погрешность определяется по формуле:

$$\delta = \frac{\Delta_c}{X} = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_N}{X} \right| - 1 \right) \right]$$



ВАЖНО! Если класс точности неизвестен, то в качестве систематической погрешности можно брать одно деление шкалы аналогового прибора или единицу последнего знака цифрового.

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ



При измерениях подобными приборами следует помнить:

- 1) Как определить цену деления
- 2) Как правильно производить отсчёт.

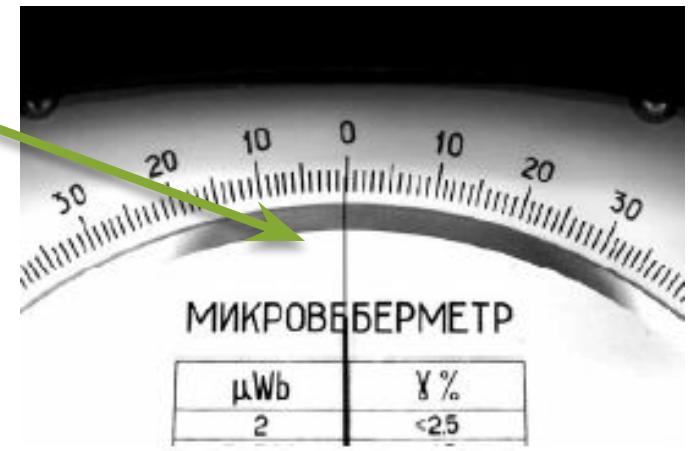


Правильно

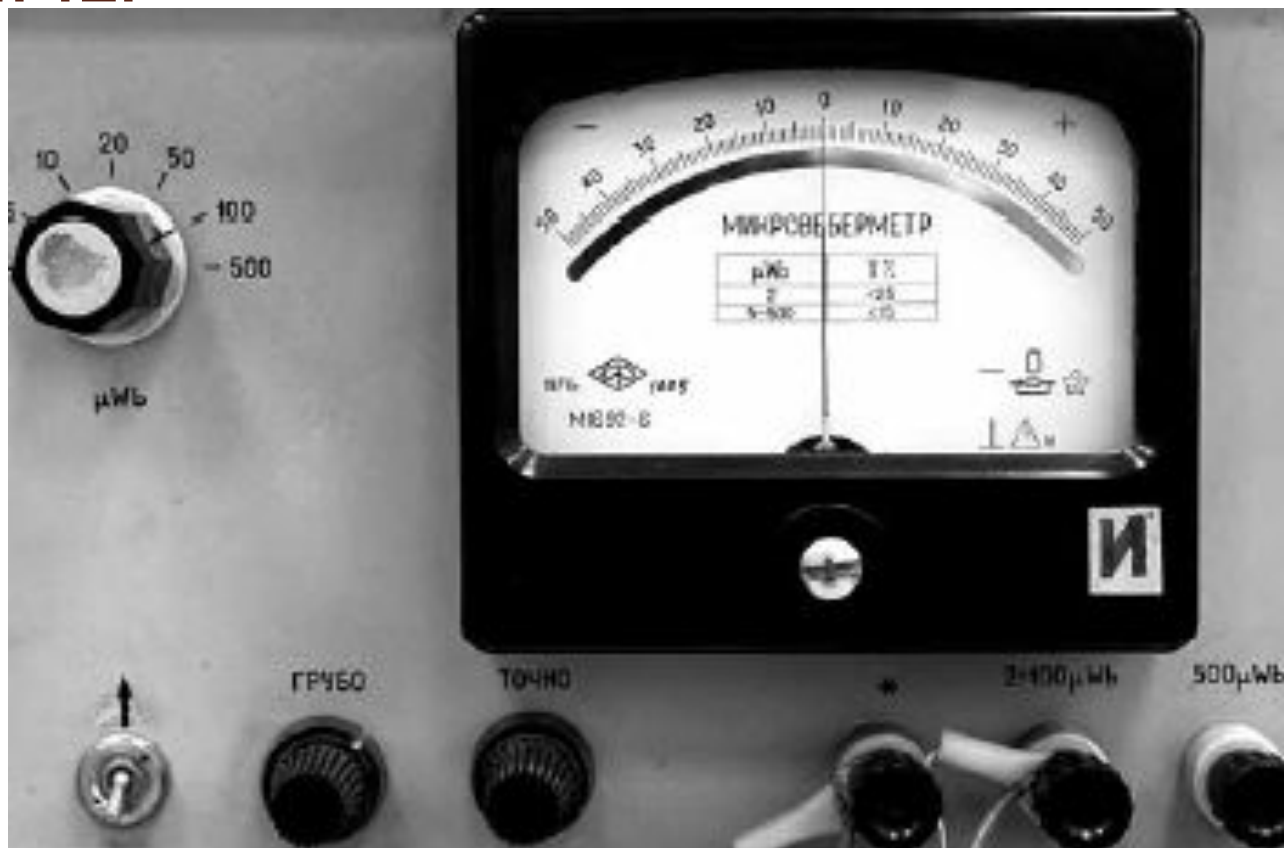
!

Неправильно

!



ПРИМЕР



Измерения на микроверметре Ф-190. Предел измерений: 100 мкВб.
Пусть показание $n = 26$ делений.

- 1) Цена деления: $C = 100 \text{ мкВб} : 100 \text{ делений} = 1 \text{ мкВб/дел}$
- 2) Показание в мкВб: $\Phi = C \cdot n = 26 \text{ дел.} \cdot 1 \text{ мкВб/дел.} = 26 \text{ мкВб.}$
- 3) Систематическая погрешность: $\Delta_C = \gamma \cdot X_N = 0,015 \cdot 100 = 1,5 \text{ мкВб.}$

СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Вид формул для расчёта вероятности появления того или иного значения случайной величины зависит от того, **дискретная** величина (принимает отделённые друг от друга значения) или **непрерывная**.

Дискретные случайные величины.

Пусть при измерении напряжения вольтметром с дискретностью 1 В получены значения: 34, 36, 34, 38, 36, 33, 35, 37, 38, 34 В. Запишем величины в порядке возрастания и сколько раз получено каждое значение.

Значение x_k , В	33	34	35	36	37	38
Число реализаций n_k	1	3	1	2	1	2
Вероятность $p_k (F_k)$	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2

$$N = 10$$

Дискретные случайные величины

Среднее значение:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{33 + 34 + 34 + \dots + 38}{10} \quad \text{или} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m x_k \cdot n_k}{N} = \frac{33 \cdot 1 + 34 \cdot 3 + \dots + 38 \cdot 1}{10}$$

Относительная частота появления значения (вероятность):

$$F_k = n_k / N$$

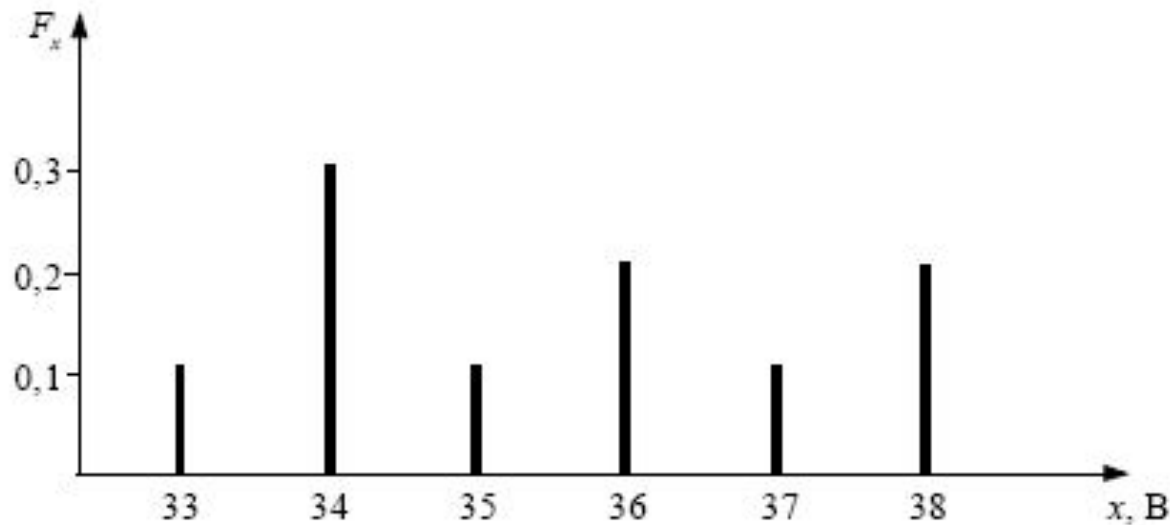
$F_k \rightarrow p_k$ при $N \rightarrow \infty$

Условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

Можно установить связь между возможными значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями. Это - **закон распределения.**

Дискретные случайные величины



Представить закон распределения можно как в виде таблицы, так и в виде графика.

Математическое ожидание – сумма произведений всех возможных значений на вероятность этих значений:

$$M(X) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i$$

Оценкой математического ожидания является **среднее значение**

Дискретные случайные величины

Дисперсия – математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^N [x_i - M(X)]^2 p_i$$

Дисперсия имеет размерность квадрата измеряемой величины, поэтому для удобства вводят понятие **среднего квадратического отклонения**:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}$$

Дисперсия и СКО показывают степень разброса случайной величины около её среднего значения.

Непрерывные случайные величины

Непрерывная величина имеет БЕСКОНЕЧНОЕ множество значений. Для количественной характеристики распределения вероятности значений пользуются **функцией распределения вероятности** $F(x) = P(X < x)$. Здесь x – текущая переменная, X – событие.

Свойства функции распределения:

- 1) $F(x_1) < F(x_2)$ при $x_1 < x_2$ – функция неубывающая.
- 2) При $x = -\infty$ $F(x) = 0$.
- 3) При $x = +\infty$ $F(x) = 1$.

Для непрерывной случайной величины с непрерывной дифференцируемой функцией $F(x)$ можно использовать **плотность распределения вероятности**:

$$p(x) = F'(x)$$

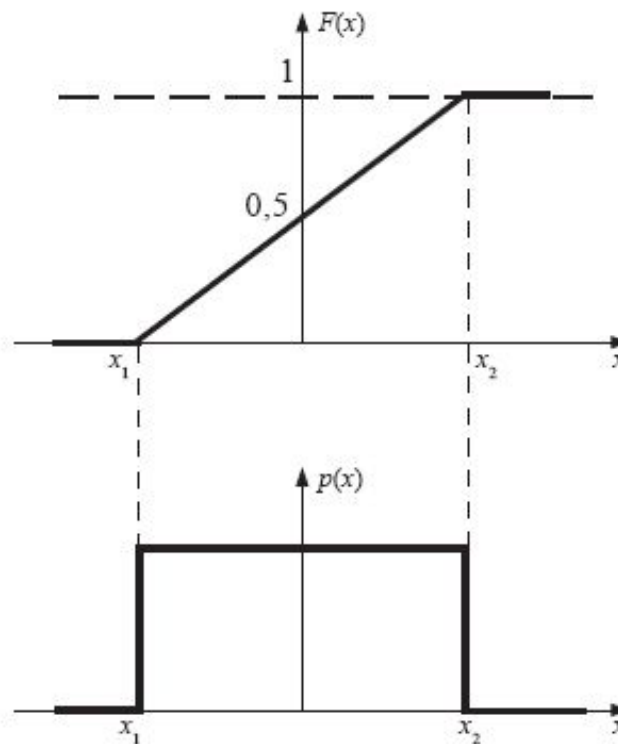
Она подчиняется условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

Равномерный закон распределения

При равномерном распределении возможные значения случайной величины находятся в пределах некоторого конечного интервала и имеют одну и ту же плотность вероятности.

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}, \text{ если } x_1 < x < x_2; \\ p(x) = 0, \text{ если } x < x_1 \text{ и } x > x_2. \end{cases}$$



Нормальный закон распределения (Гаусса)

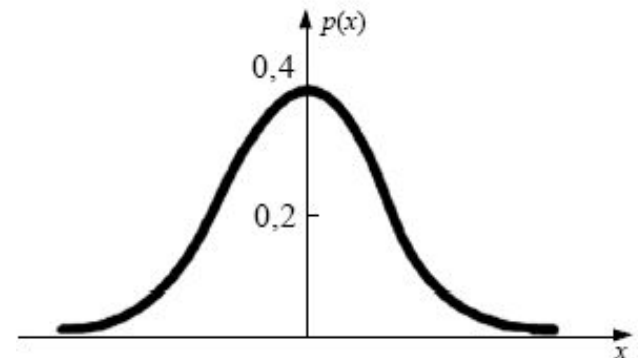
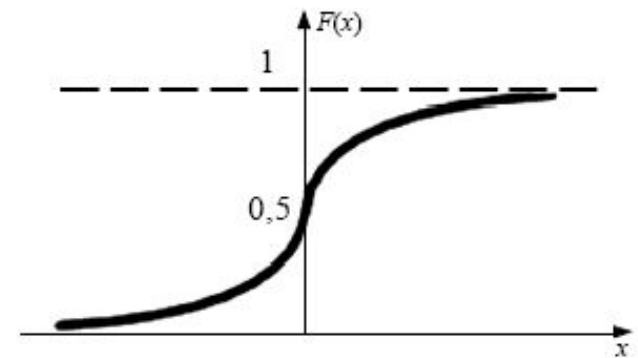
Для него справедливы две аксиомы:

- 1) **Аксиома симметрии:** при очень большом числе измерений случайные отклонения от среднего значения, равные по величине, но различные по знаку, встречаются одинаково.
- 2) **Аксиома монотонного убывания плотности вероятности:** чаще всего встречаются меньшие отклонения, а большие отклонения встречаются тем реже, чем они больше.

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

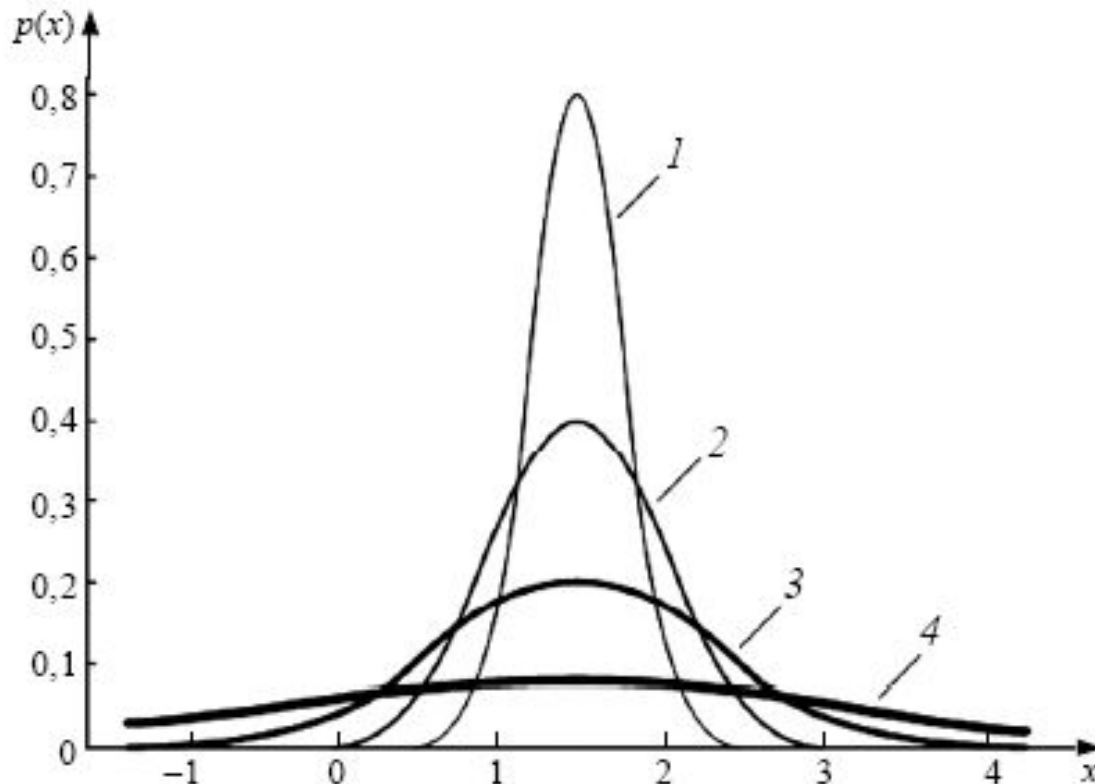
$$M(x) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

$$D(x) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx$$



Нормальный закон распределения (Гаусса)

Чем больше дисперсия, тем значительно рассеяние результатов относительно среднего значения!



$$X_{\text{ц}} = 1.5$$

σ : 1 - 0.5, 2 - 1, 3 - 2, 4 - 5.

Нормальный закон распределения (Гаусса)

На практике ВСЕ результаты измерений являются дискретными величинами, т.е. из всей совокупности значений мы получаем некоторую **выборку**. Она должна быть **репрезентативной** – хорошо представлять пропорции генеральной совокупности.

Оценки, характеризующие распределение величин, входящих в выборку, должны быть:

- 1) состоятельными – при увеличении объёма выборки стремиться к истинному значению
- 2) несмещёнными – математическое ожидание равно оцениваемой числовой характеристике
- 3) эффективными – иметь как можно меньшую дисперсию

Оценки величин

Среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Дисперсия

$$D(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

СКО

$$S_x = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Полученные оценки математического ожидания и СКО являются случайными величинами. Значит, при повторении несколько раз серий из n наблюдений каждый раз будут получаться разные \bar{x} и S_x . Рассеяние этих оценок оценивается СКО среднего:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

На практике определяют **доверительный интервал**, в границах которого с **доверительной вероятностью** P находится истинное значение измеряемой величины.

Доверительный интервал

Можно говорить о вероятности P попадания случайной погрешности в заданный интервал $[-\overset{\circ}{\Delta}, +\overset{\circ}{\Delta}]$. Зная закон распределения погрешностей, эту вероятность рассчитать. При нормальном (гауссовом) законе эта вероятность равна:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\bar{x}-\overset{\circ}{\Delta}}^{\bar{x}+\overset{\circ}{\Delta}} \lambda^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$$

Поскольку в формулу входят параметры \bar{x} и σ , чтобы не вычислять интегралы для каждого из них вводят стандартизованную переменную:

$$\varepsilon = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{\overset{\circ}{\Delta}}{\sigma}$$

Тогда можно ограничиться одной таблицей для величины

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\overset{\circ}{\Delta}}{\sigma}}^{\frac{\overset{\circ}{\Delta}}{\sigma}} \lambda^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon$$

Доверительный интервал

На практике обычно используют доверительную вероятность $p = 0.95$.

Зная доверительную вероятность и число измерений N находят стандартизованную переменную t (коэффициент Стьюдента):

$$t = \frac{x - \bar{x}}{S_{\bar{x}}} = \frac{\Delta}{S_{\bar{x}}}$$

Зная t , находят доверительный интервал в единицах измерения величины по формуле:

$$\Delta_p = t_p \cdot S_{\bar{x}}$$

Таким образом, в качестве результата принимают интервал значений

$$[\bar{x} - \Delta_p; \bar{x} + \Delta_p]$$

с доверительной вероятностью P .

Доверительный интервал

n	p			n	p		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
2	6,31	12,71	63,66	13	1,78	2,18	3,05
3	2,92	4,30	9,92	14	1,77	2,16	3,01
4	2,35	3,18	5,94	15	1,76	2,14	2,98
5	2,13	2,78	4,60	20	1,73	2,09	2,86
6	2,02	2,57	4,03	25	1,71	2,06	2,80
7	1,94	2,45	3,71	30	1,70	2,04	2,76
8	1,90	2,36	3,50	40	1,69	2,02	2,71
9	1,86	2,31	3,35	50	1,69	2,01	2,68
10	1,83	2,26	3,25	100	1,66	1,98	2,63
11	1,81	2,23	3,17				
12	1,80	2,20	3,11	бескон	1,645	1,960	2,576

Проверка выскакивающих результатов на промах

Если вероятность получить отклонение результата наблюдения от среднего мала, то выскакивающий результат считают промахом и исключают из выборки. Если вероятность достаточно велика, то отклонение считают естественным в рамках нормального распределения и оставляют.

Для отделения большой вероятности от малой задаём уровень значимости q – вероятность того, что промах имел место ($q = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$).

Вычисляем величины:

$$G_1 = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S_x}$$

$$G_2 = \frac{|x_{\min} - \bar{x}|}{S_x}$$

Если $G_1 > G_{\text{теор}}$, то x_{\max} исключаем

Если $G_2 > G_{\text{теор}}$, то x_{\min} исключаем

Величины $G_{\text{теор}}$ для разных уровней значимости даны в таблицах.

Суммирование систематических и случайных погрешностей

1. Если $\Delta_c < 0,8S_{\bar{x}}$, то неисключёнными систематическими погрешностями пренебрегают по сравнению со случайными и принимают $\Delta = \Delta_c$.
2. Если $\Delta_c > 8S_{\bar{x}}$, то случайной погрешностью пренебрегают по сравнению с систематической и принимают $\Delta = \Delta_c$.
3. Если $0,8S_{\bar{x}} \leq \Delta_c \leq 8S_{\bar{x}}$, то граница погрешности находится по формуле

$$\Delta = \sqrt{\Delta_c^2 + \Delta^2}$$

Округление результатов

1. Погрешность результата указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной – если первая 3 и более.
2. Округление результата производя после округления погрешностей, т.е. числовое значение результата должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности.
3. Округление проводят лишь в окончательном результате.

Пример

$$U = 4.65 \text{ В}, \Delta = \pm 0.07245 \text{ В}$$

Значит, после округления $U = (4.65 \pm 0.07) \text{ В}$

$$U = 4.65 \text{ В}, \Delta = \pm 0.007245 \text{ В}$$

Значит, после округления $U = (4.650 \pm 0.007) \text{ В}$

Расчёт погрешностей при косвенных измерениях

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta_n\right)^2}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i} \Delta_i \right]^2}$$

Например:

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3}$$

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2}$$

Этапы проведения и обработки результатов измерений

1. Определить цель и задачи проводимых измерений, ознакомиться со средствами измерений, используемыми в данной работе, установить их систематические погрешности.
2. Определиться с количеством измерений N . В лабораторной работе это 10 – 15.
3. Провести измерение каждой величины, стараясь реализовать условия максимальной идентичности и объективности.
4. Принять закон распределения результатов измерения нормальным.
5. Вычислить среднее арифметическое результатов измерений (мат. ожидание).

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

6. Вычислить СКО и СКО среднего

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Этапы проведения и обработки результатов измерений

7. Провести **проверку** высказывающихся результатов **на промах**.
8. Определить **доверительные интервалы** для каждой измеряемой величины:

$$\overset{o}{\Delta} = tS_{\bar{x}} ; p = 0,95$$

9. Определить **случайную погрешность** для косвенных измерений:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta_n\right)^2}$$

10. Определить **систематическую составляющую погрешности** Δ_c
11. Определить **суммарную погрешность** результата:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_c^2 + \overset{o}{\Delta}^2} , p = 0,95$$

12. **Округлить погрешности**