Геометрия. Теоретическая тетрадь.

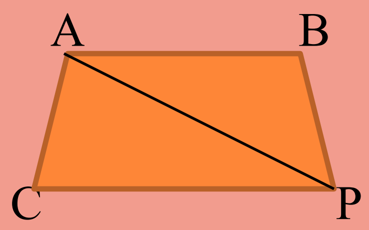
8 класс

- Четырёхугольники

Многоугольники

О: Многоугольником называется простая замкнутая ломаная

О: Выпуклым многоугольником называется многоугольник, который лежит по одну сторону от каждой прямой , проведённой через две его соседние вершины.



О: Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника

AP - диагональ

Теорема о сумме углов выпуклого n- угольника

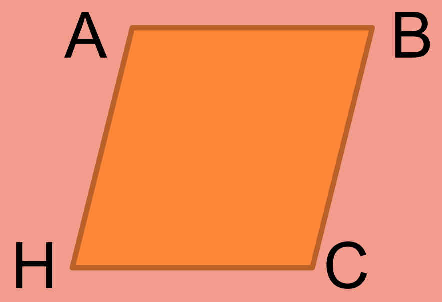
Т: Сумма углов выпуклого многоугольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ$

$n=3$ 180°

$n=4$ 360°

Параллелограмм

О: параллелограммом называется четырёхугольник, стороны которого попарно параллельны.

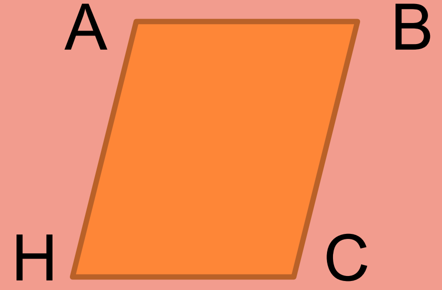


AB II CH

BCII HA

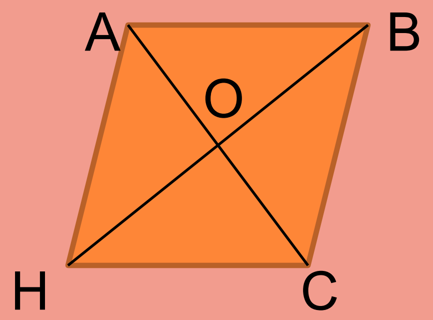
Свойства параллелограмма

1.Т:В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны



AB = CH
BC = HA
< A= <C
<B= <H

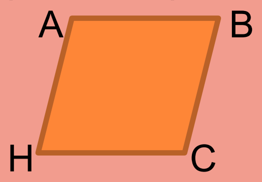
2. Т: В параллелограмме диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам



AO = CO
BO = HO

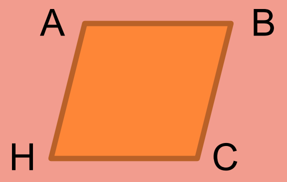
Признаки параллелограмма

1.Т:Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то он является параллелограммом



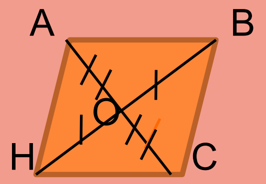
$\left.\begin{array}{l} AB = CH \\ AB \parallel CH \end{array}\right| \Rightarrow$ ABCH – парал-м

2.Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то он является параллелограммом



$\left.\begin{array}{l} AB=CH \\ AH=BC \end{array}\right| \Rightarrow$ ABCH – парал-м

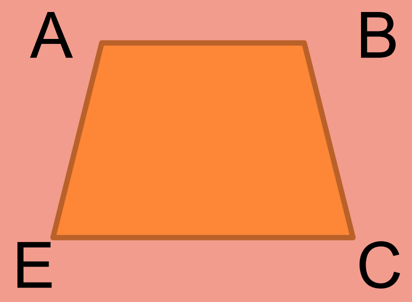
2.Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом



$\left.\begin{array}{l} AO=OC \\ BO=OH \end{array}\right| \Rightarrow$ ABCH – парал-м

Трапеция

О: Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

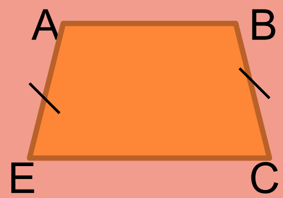


AB II CE- основания

BC∦ EA – боковые стороны

Виды трапеций

О: Равнобедренной трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны.

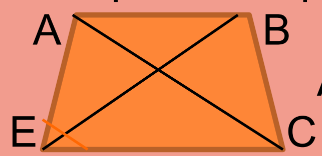


AE=BC ⇒ ABCE – равнобедренная

Свойства равнобедренной трапеции:

1.Т:В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны

2. Т:В равнобедренной трапеции диагонали равны

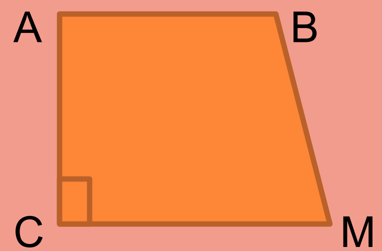


ABCE – равнобедренная трапеция ⇒ AC=BE

<A=<B

<E=<C

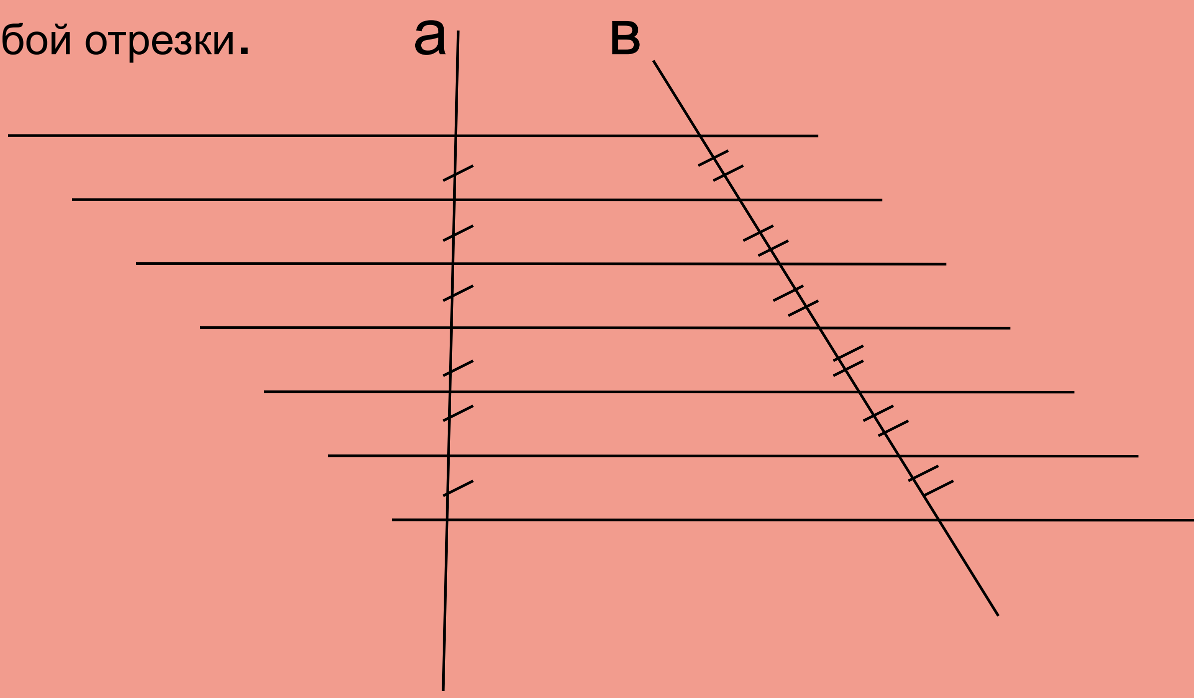
О: Прямоугольной трапецией называется трапеция, у которой один из углов прямой.



<C – прямой ⇒ ABMC - прямоугольная

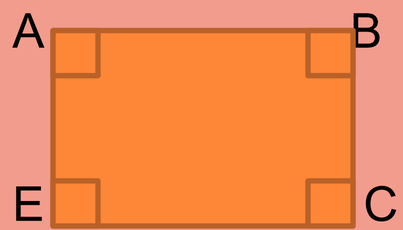
Теорема Фалеса

Т: Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



ПРЯМОУГОЛЬНИК

О: прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

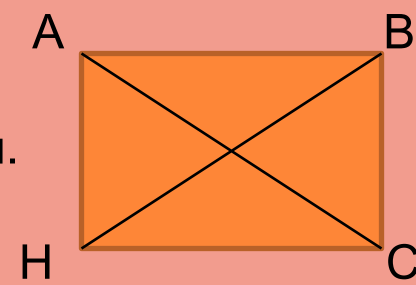


Обладает всеми свойствами пар-ма

Особое свойство прямоугольника:

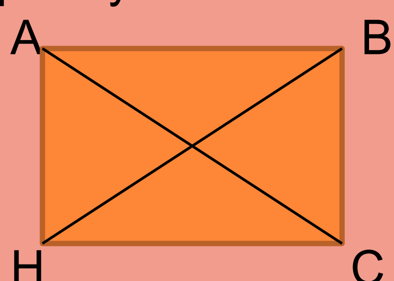
Т: в прямоугольнике диагонали равны.

AC=BH



Признак прямоугольника:

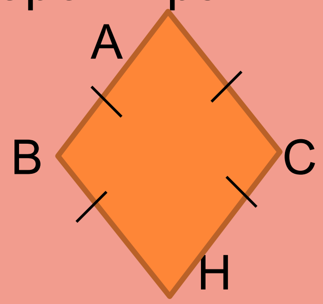
Т: Если в параллелограмме диагонали равны, то он является прямоугольником.



AC=BH $\Rightarrow$ ABCH – прямоугольник

Ромб

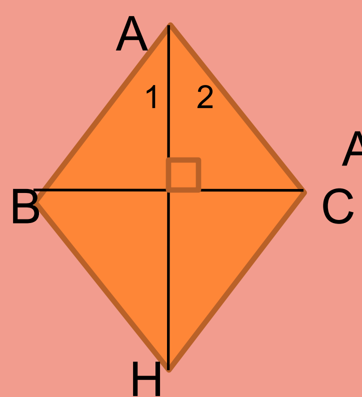
О: ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.



Обладает всеми свойствами пар-ма

Особое свойство ромба:

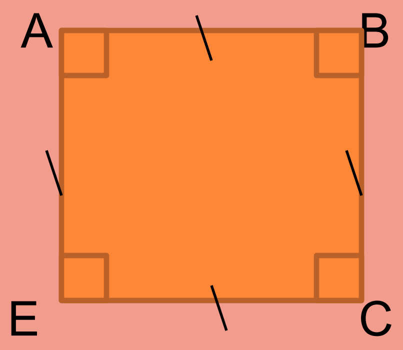
Т: Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



$ABHC$ – ромб $\Rightarrow AH \perp BC$, $<1=<2$ и т. д.

КВАДРАТ

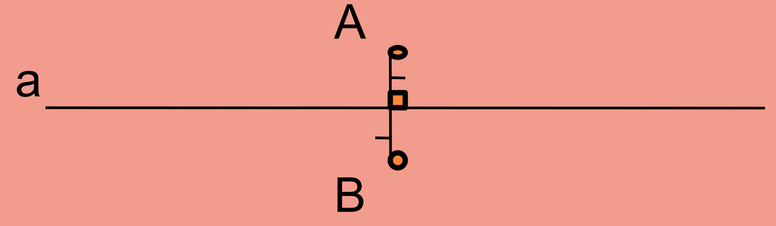
О: Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.



Обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Осевая симметрия

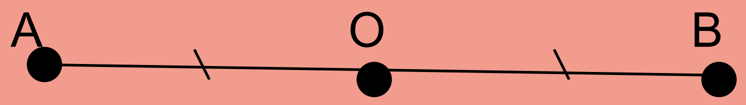
О: Две точки А и В называются симметричными относительно прямой а, если эта прямая проходит через середину отрезка АВ и перпендикулярна к нему



Прямая а - ось симметрии.

Центральная симметрия

О: Две точки А и В называются симметричными относительно точки О, если О – середина отрезка АВ



Точка О- центр симметрии.

- Площадь

Свойства площадей

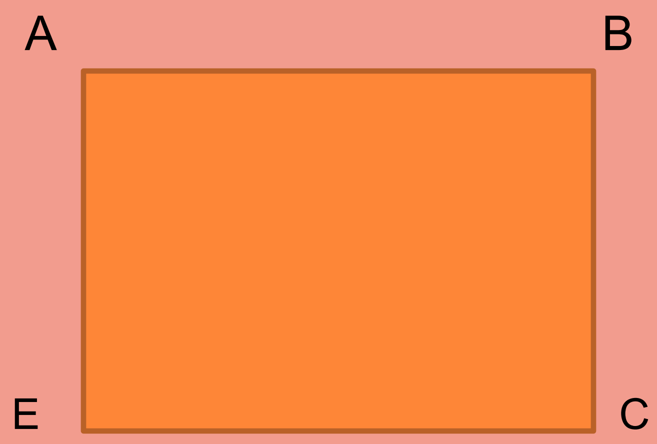
1. Т: Равные многоугольники имеют равные площади

2. Т: Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

3. Т: Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Площадь прямоугольника

Т: Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

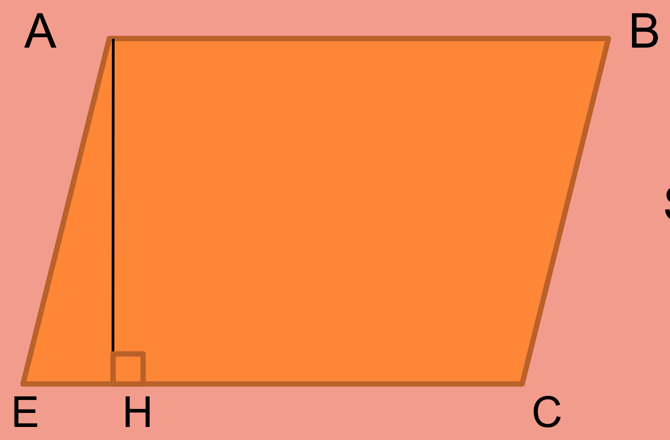


$S_{ABCE} = AB \cdot BC$

Площадь паралллелограмма

О: Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведённый из любой точки стороны к прямой , содержащей противоположную сторону.

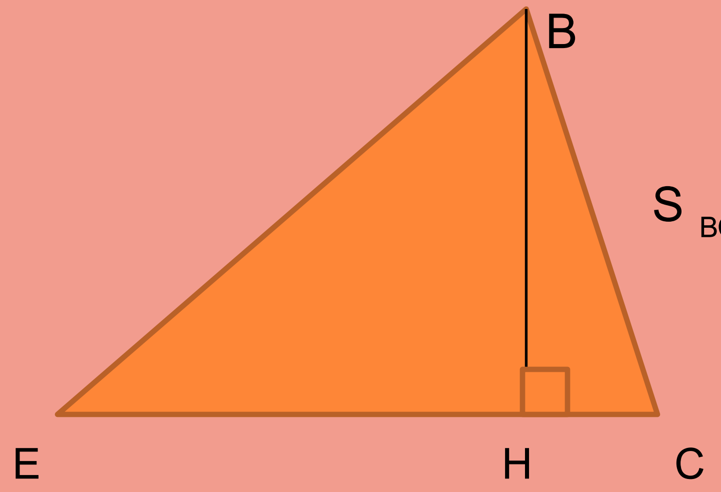
Т: Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.



$S_{ABCE} = AH \cdot EC$

Площадь треугольника

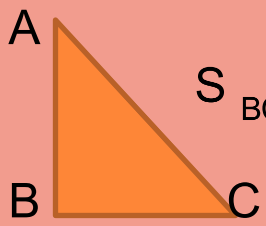
Т: Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.



$S_{BCE} = \frac{1}{2} HB \cdot EC$

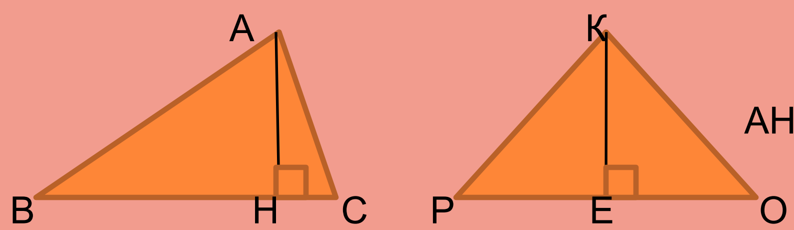
Следствия из теоремы о площади треугольника

1.Т: Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.



$$S_{BCA} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$$

2. Т:Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.



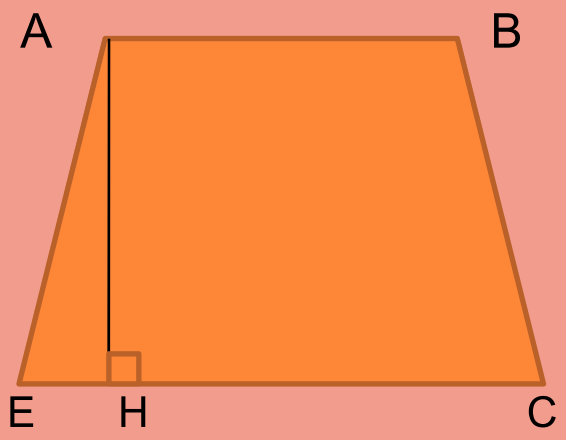
$$AH = KE \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{\text{ÊÐÎ}}} = \frac{\text{ÂÑ}}{\text{ÐÎ}}$$

3. Т: Если угол одного треугольник а равен углу другого треeугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

См. предыд. рис. Если <А=<К ,то $\frac{S_{ABC}}{S_{\text{ÊÐÎ}}} = \frac{\text{ÀÂ} \cdot \text{ÀÑ}}{\text{ÐÊ} \cdot \text{ÊÎ}}$

Площадь трапеции

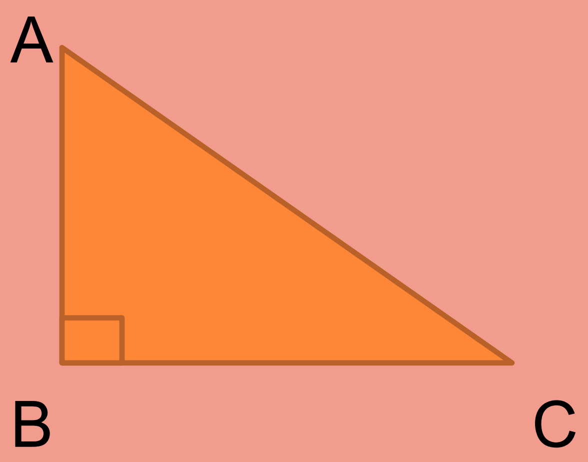
Т: Площадь трапеции равна половине произведения суммы её оснований на высоту.



$$S_{ABCE} = \frac{1}{2}(AB+EC)\cdot AH$$

Теорема Пифагора

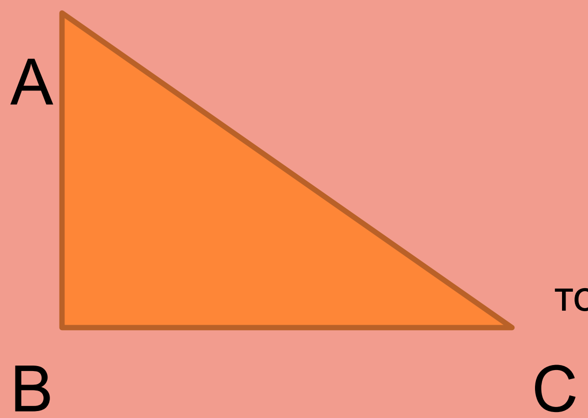
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Теорема , обратная теореме Пифагора

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный



Если $AC^2 = AB^2 + BC^2$

то треугольник ABC – прямоугольный.

- Подобные треугольники

Пропорциональные отрезки

О: Отношением отрезков АВ и НЕ называется

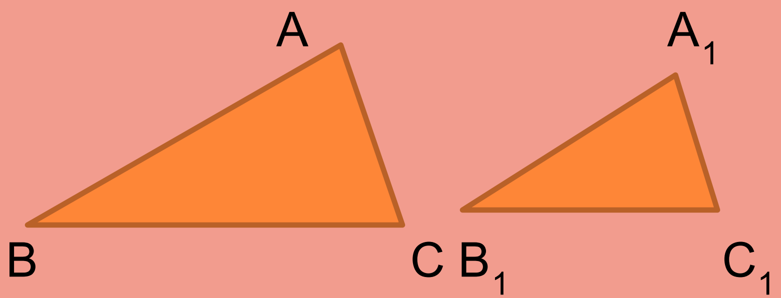
отношение их длин. $\frac{\grave{A}\hat{A}}{\acute{I}\mathring{A}}$

О: Отрезки АВ и НЕ называются пропорциональными

отрезкам ОК и ХУ , если $\frac{\grave{A}\hat{A}}{\hat{I}\hat{E}} = \frac{\acute{I}\mathring{A}}{\tilde{O}\acute{O}}$

Подобные треугольники.

О:Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$<A = <A_1$

$<B = <B_1$

$<C = <C_1$

$$\frac{\grave{A}\hat{A}}{\grave{A}_1\hat{A}_1} = \frac{\hat{A}\tilde{N}}{\hat{A}_1\tilde{N}_1} = \frac{\grave{A}\tilde{N}}{\grave{A}_1\tilde{N}_1} = \hat{e}$$

К- коэффициент подобия

$\Rightarrow$ ∞

Δ ABC $\Delta A_1B_1C_1$

Свойства подобных треугольников.

1.Т: Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

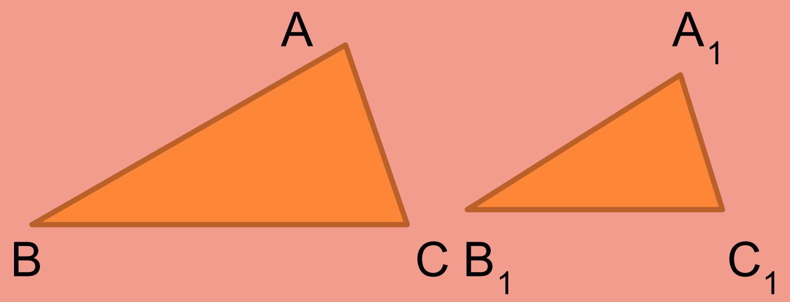
$$\Delta\ ABC \quad \infty \quad \Delta A_1B_1C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Ð_{\text{ÀÂÑ}}}{Ð_{\text{À1Â1Ñ1}}} = \hat{e}$$

2. Т: Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\Delta\ ABC \quad \infty \quad \Delta A_1B_1C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{\text{ÀÂÑ}}}{S_{\text{À1Â1Ñ1}}} = \hat{e}^2$$

Первый признак подобия треугольников.

Т:если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.



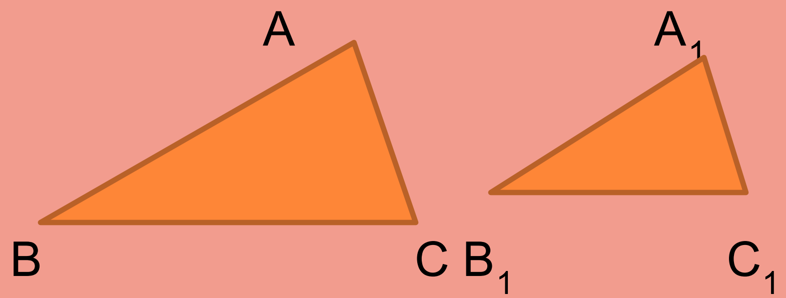
$<B = <B_1$

$<C = <C_1$ $\Rightarrow$

$\Delta ABC \;\infty\; \Delta A_1B_1C_1$

Второй признак подобия треугольников.

Т:если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники являются подобными.



$<B = <B_1$

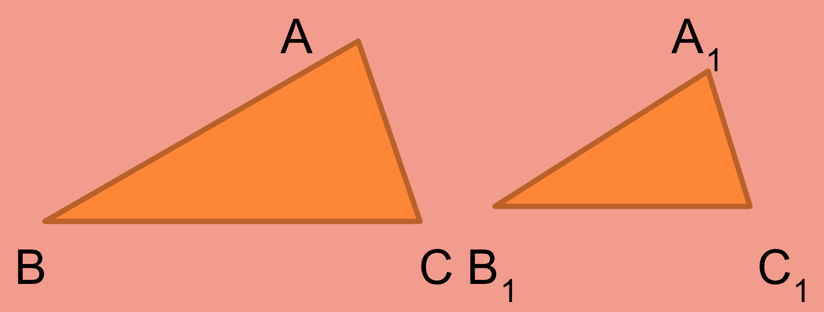
$$\frac{\grave{A}\hat{A}}{\grave{A}_1\hat{A}_1} = \frac{\hat{A}\tilde{N}}{\hat{A}_1\tilde{N}_1} \Rightarrow$$

∞

Δ ABC $\Delta A_1B_1C_1$

Третий признак подобия треугольников.

Т:если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.



$$\frac{\grave{A}\hat{A}}{\grave{A}_1\hat{A}_1}=\frac{\hat{A}\tilde{N}}{\hat{A}_1\tilde{N}_1}=\frac{\grave{A}\tilde{N}}{\grave{A}_1\tilde{N}_1}\Rightarrow$$

∞

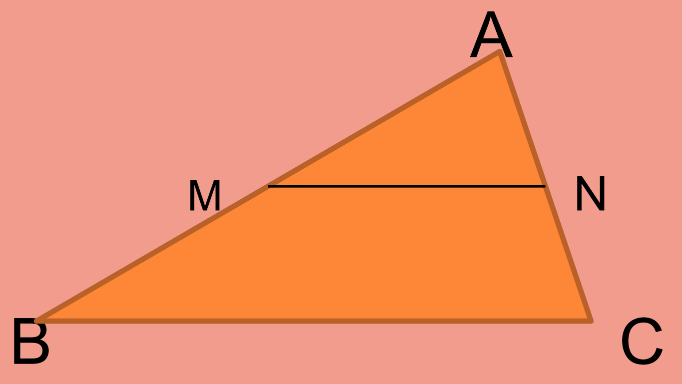
Δ ABC $\Delta A_1B_1C_1$

Средняя линия треугольника

О: Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон

Свойство средней линии

Т: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны

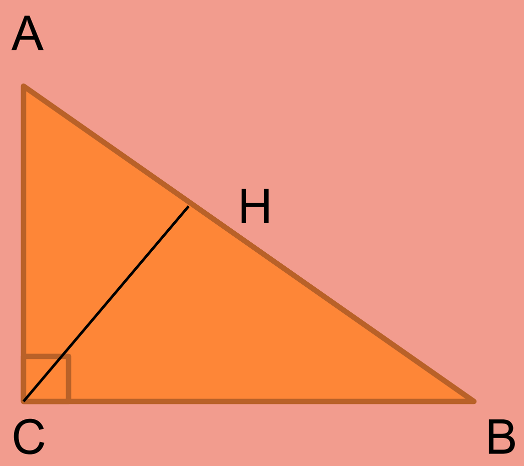


MN – средняя линия Δ

$MN \parallel BC$

$MN = 0{,}5\ BC$

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



1.Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой

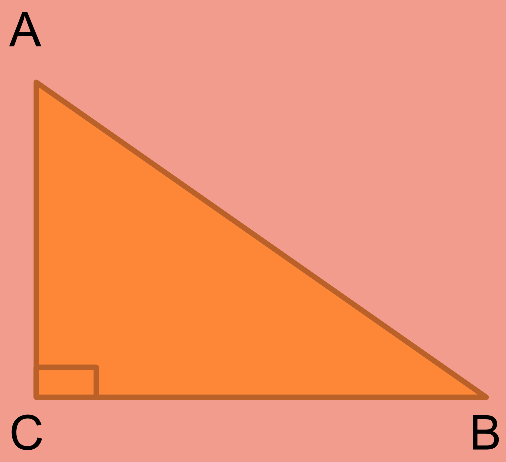
$$\text{ÑÍ} = \sqrt{\text{ÀÍ} \cdot \text{ÍÂ}}$$

2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла

$$\text{ÑÀ} = \sqrt{\text{ÀÍ} \cdot \text{ÀÂ}}$$

$$\text{ÑÂ} = \sqrt{\text{ÀÂ} \cdot \text{ÍÂ}}$$

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника



О: синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

$$\sin A = \frac{\hat{A}\tilde{N}}{\grave{A}\hat{A}} = \cos B$$

О: косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

$$\tilde{n}\hat{\imath}sA = \frac{\grave{A}\tilde{N}}{\grave{A}\hat{A}} = \sin B$$

О: тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему

$$tgA = \frac{\hat{A}\tilde{N}}{\grave{A}C}$$

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

1. $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

2. $$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

3. Если сумма двух углов равна 90˚, то синус одного равен косинусу другого, а их тангенсы обратны.

(например,у двух острых углов одного прямоугол. треугольника)

4. Если сумма двух углов равна 180˚, то их синусы равны, а тангенсы и косинусы противоположны

(например, у двух смежных углов)

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Чтобы найти катет прямоугольного треугольника, можно:

1. Гипотенузу умножить на синус угла , противолежащего катету
2. Гипотенузу умножить на косинус угла, прилежащего катету
3. Другой катет умножить на тангенс угла, противолежащего искомому катету

Чтобы найти гипотенузу прямоугольного треугольника, можно:

1. Катет разделить на синус угла, противолежащего катету
2. Катет разделить на косинус угла, прилежащего катету

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- Окружность

Взаимное расположение прямой и окружности

Пусть есть окружность с центром O и радиусом R и прямая p.Проведём перпендикуляр из точки O к прямой p и обозначим его d.

1. Если $d>R$ то прямая и окружность не имеют общих точек.

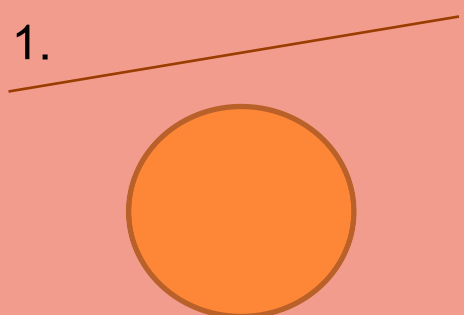
2.Если $d<R$ то прямая и окружность имеют две общие точки.

O:Прямая, имеющая с окружностью две общие точки называется секущей по отношению к окружности.

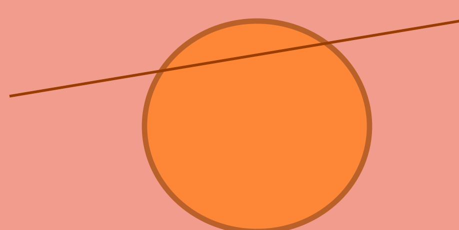
3. Если $d=R$ то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

O: Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку называется касательной к окружности.

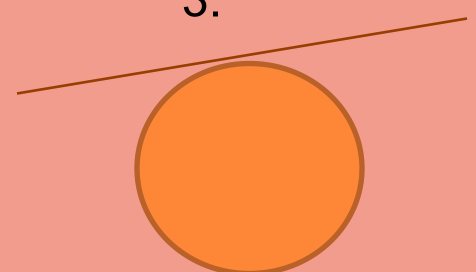
1.



2.



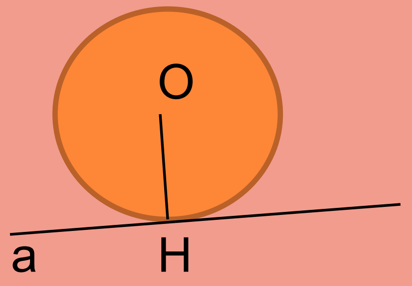
3.



Касательная к окружности

Свойства касательной:

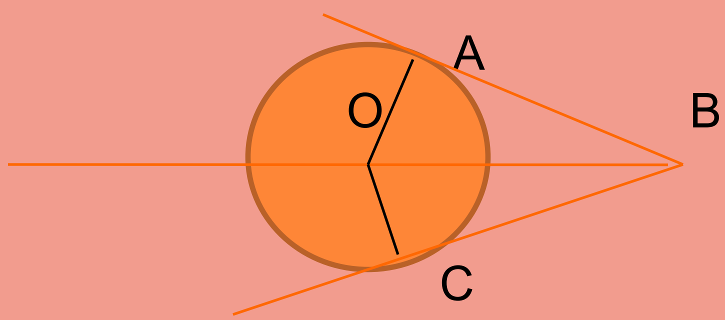
1.Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.



$OH \perp a$

a – касательная, H – точка касания

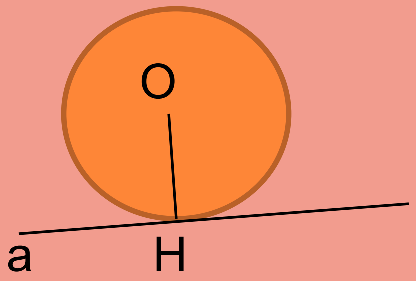
2.Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



AB=BC,<ABO=<CBO

Касательная к окружности

Признак касательной:
Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

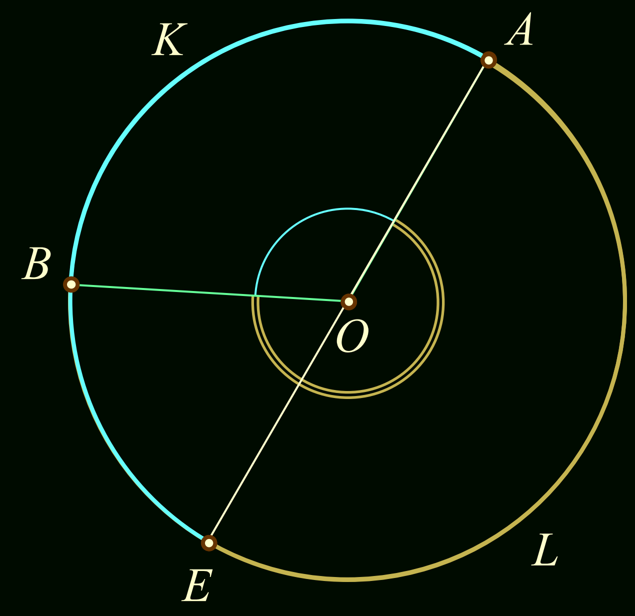


если $OH \perp a$, то a – касательная к окружности

Градусная мера дуги окружности

О:Дугой называется часть окружности, ограниченная двумя точками.

Две точки A и B окружности разбивают ее на две дуги: $\cup AKB$, $\cup ALB$; краткое обозначение: $\cup AB$.

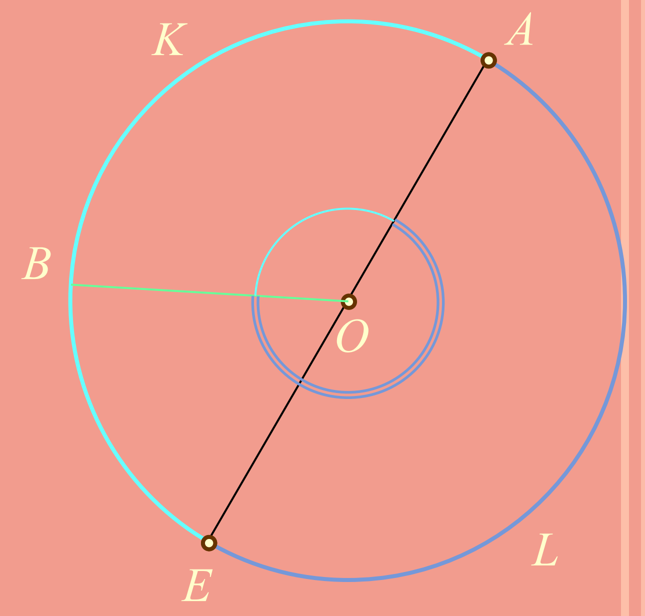


О: Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности

Дуга AE – полуокружность

Центральный угол

О: Центральным углом называется угол, вершина которого находится в центре окружности



<AOB - центральный

Градусная мера дуги, меньшей полуокружности, равна градусной мере соответствующего центрального угла.

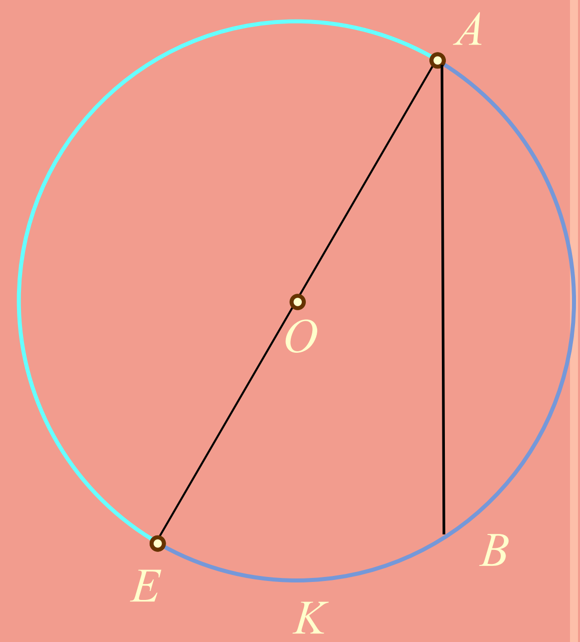
∪AKB= <AOB

Градусная мера дуги, большей полуокружности, равна 360˚минус градусная мера соответствующего центрального угла.

∪ ALB=360˚- <AOB

Вписанный угол

О: Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности



<EAB – вписанный угол

Свойство вписанного угла

Т: Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается

<EAB=0,5 ∪ EKB

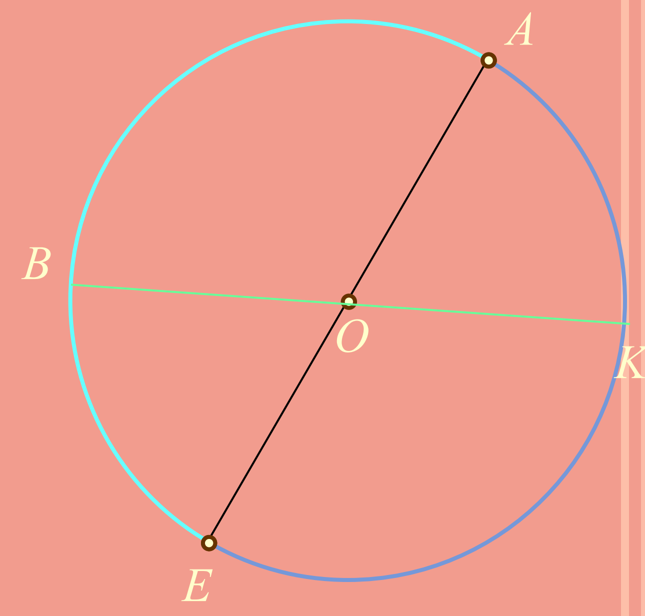
Следствия:

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.
2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой

Свойство хорд

Т: если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды

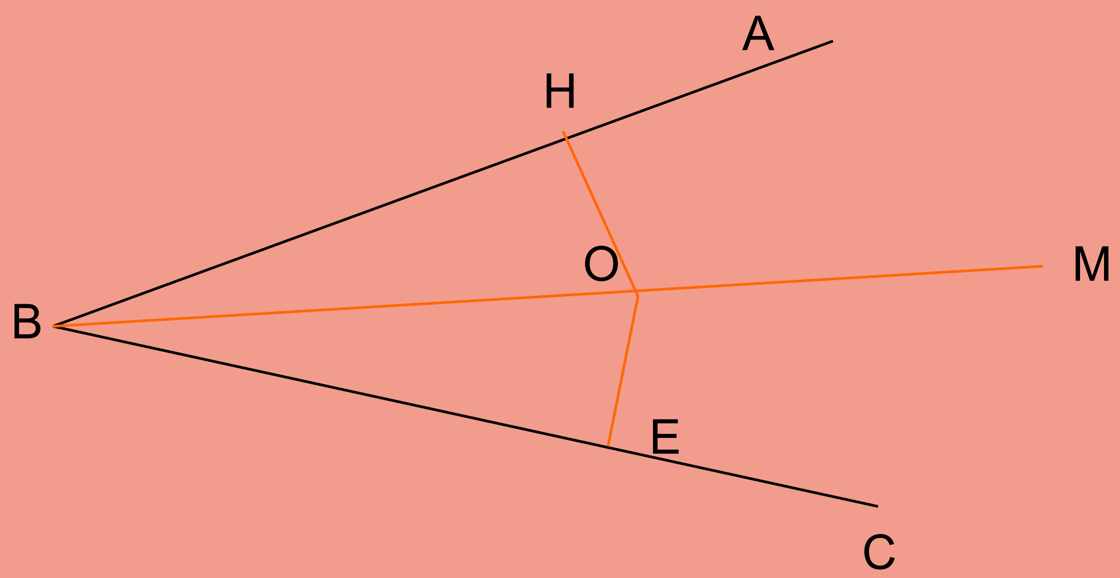
ВО·ОК=АО·ОЕ



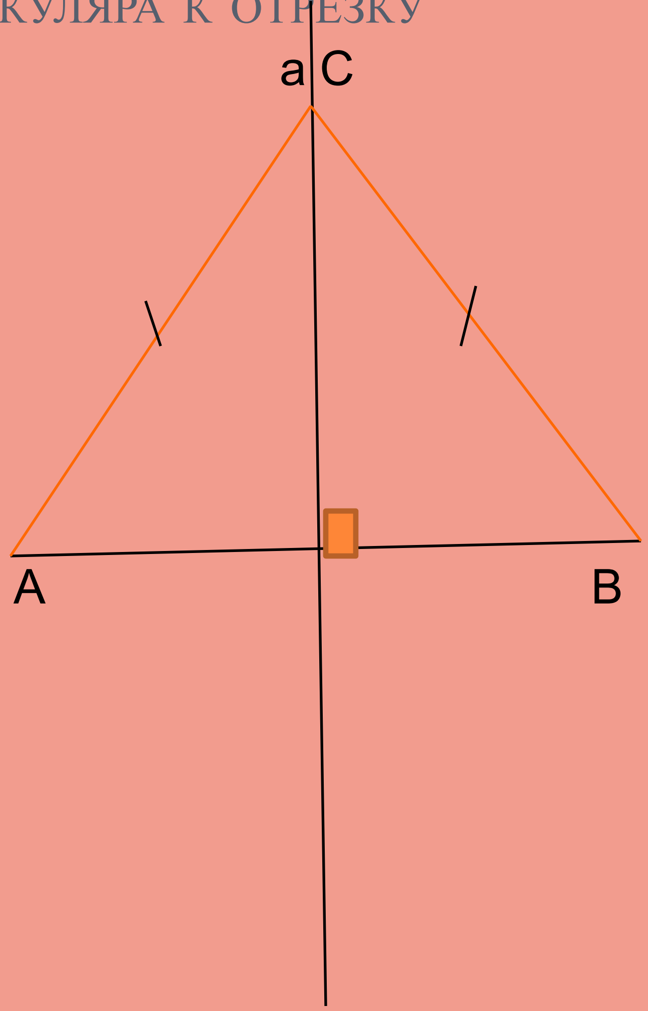
Свойство биссектрисы угла

Т:Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон. Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе

ВМ –биссектриса
< АВС
ОН=ОЕ



Свойство серединного перпендикуляра к отрезку



О:Серединным перпендикуляром отрезка называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему

Т:Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов отрезка. Каждая точка равноудалённая от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре.

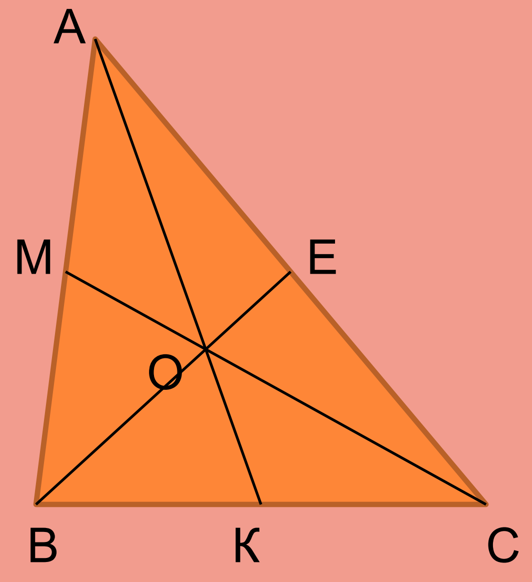
а – серединный перпендикуляр к отрезку АВ

АС=СВ

Четыре замечательные точки треугольника

Свойство медиан треугольника:

Т:Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1 считая от вершины треугольника



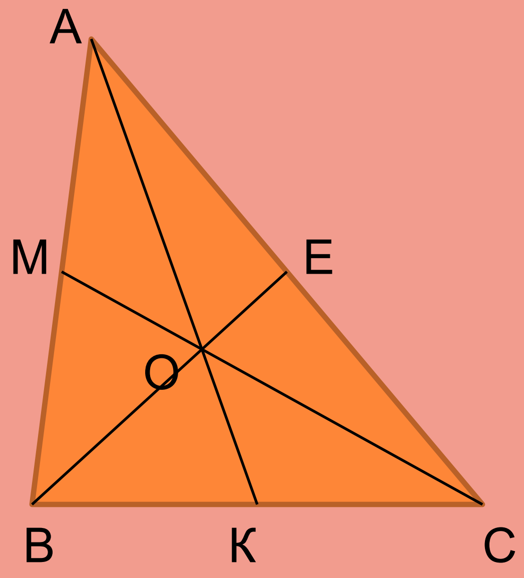
АК, СМ, ВЕ – медианы

АО:ОК=ВО:ОЕ=СО:ОМ=2:1

Четыре замечательные точки треугольника

Свойство биссектрис треугольника:

Т:Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника



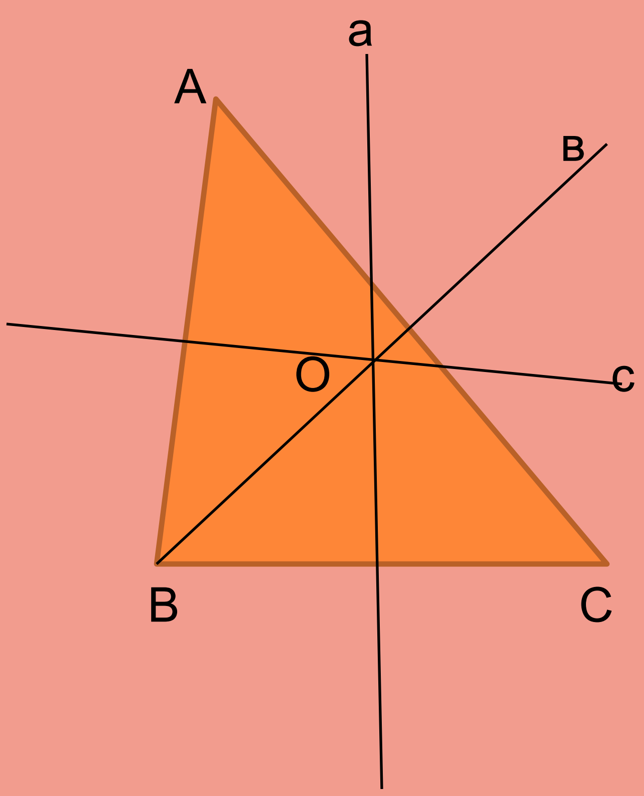
АК, СМ, ВЕ – биссектрисы

О равноудалена от АВ,ВС,АС

Четыре замечательные точки треугольника

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника:

Т:Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке и эта точка равноудалена от всех вершин треугольника



а,в,с – серединные перпендикуляры

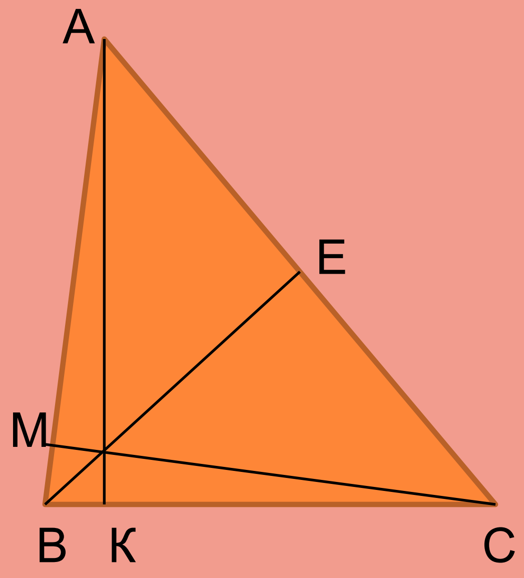
ОА=ОВ=ОС

Четыре замечательные точки треугольника

Свойство высот треугольника:

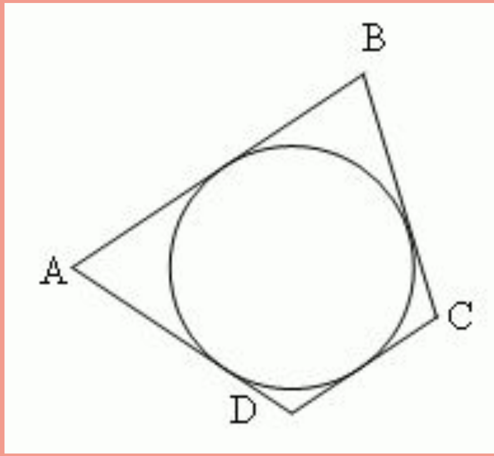
Т:Высоты треугольника пересекаются в одной точке

АК, СМ, ВЕ – высоты



Вписанная окружность

О:Окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности, если все стороны многоугольника касаются окружности.



Теорема об окружности, вписанной в треугольник

Т: В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну

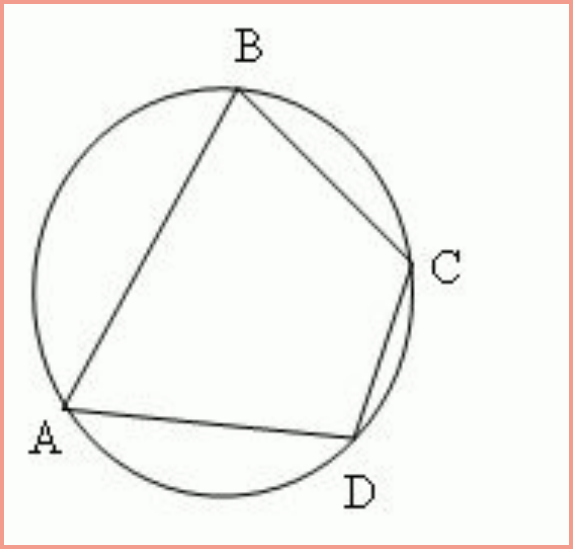
Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения биссектрис треугольника.

Теорема об окружности, вписанной в четырехугольник

Т: В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны

Описанная окружность

О:Окружность называется описанной вокруг многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность, если все вершины многоугольника лежат на окружности.



Теорема об окружности, описанной около треугольника

Т: около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну

Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема об окружности, описанной около четырехугольника

Т: В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180°