ИНСТИТУТ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

Томский политехнический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРИБОРНЫХ СИСТЕМАХ

Гальцева

Ольга

Валерьевна,

к.т.н., доцент кафедры ФМПК ИНК НИ ТПУ

Осенний семестр 2015 / 16

ЛЕКЦИЯ 2. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Этапы построения математической модели;
2. Подходы к построению математических моделей;
3. Вычислительный эксперимент;
4. Технологический цикл вычислительного эксперимента.

Этапы построения математической модели

Процесс построения моделей может быть условно разбит на следующие этапы:

1. ***Обследование объекта моделирования и формулировка технического задания на разработку модели***. Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и целях его исследования эта стадия может содержать также некоторые предположения. Данный этап можно также назвать формулировкой предмодели. Целью данного этапа является подготовка содержательной постановки задачи моделирования, т.е. создания перечня сформулированных в словесной форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика.

Этапы построения математической модели

2. **Концептуальная и математическая постановка задачи**. На этом этапе происходит завершение идеализации объекта. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Цель концептуальной постановки задачи заключается в формулировке в терминах конкретных дисциплин перечня основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

Этапы построения математической модели

По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме, с тем, чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю. На этапе составления математического описания предварительно выделяют основные явления и элементы в объекте и затем устанавливают связи между ними. Далее, для каждого выделенного элемента и явления записывают уравнение, отражающее его функционирование. Кроме того, в математическое описание включают уравнения связи между различными выделенными явлениями. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы алгебраических, дифференциальных уравнений. Результатом математической постановки задачи моделирования является совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Этапы построения математической модели

3. **Качественный анализ и проверка корректности модели**. Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок:

- контроль размерности;
- контроль порядков;
- контроль характера зависимостей;
- контроль экстремальных ситуаций;
- контроль граничных условий;
- контроль физического смысла;
- контроль математической замкнутости.

Этапы построения математической модели

Понятие корректности модели имеет большое значение в прикладной математике. Например, численные методы можно применять только к корректно поставленным задачам. Доказательство корректности математической задачи достаточно сложная проблема. Математическая модель является корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок, описанных выше. На этом этапе построения математической модели заканчивается и далее следует «вычислительный эксперимент», однако многие авторы и следующие этапы относят к процессу построения математической модели, в связи с чем обсуждение понятия «вычислительный эксперимент» будет рассмотрен ниже..

Этапы построения математической модели

4. **Выбор и обоснование выбора методов решения задачи**. Построенная модель изучается всеми доступными исследователю методами, в том числе с взаимной проверкой различных подходов. Большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, неизвестно.

Этапы построения математической модели

Все методы решения задач, составляющих «ядро» математических моделей, можно подразделить на:

- **Аналитические**. Аналитические методы более удобны для последующего анализа результатов, но применимы лишь для относительно простых моделей. В случае если математическая задача допускает аналитическое решение, то оно считается предпочтительнее численного.

- **Алгоритмические.** Алгоритмические методы сводятся к некоторому алгоритму, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ. Этап выбора метода решения и разработки моделирующей программы подразумевает выбор наиболее эффективного (по быстроте получения решения и его наибольшей точности) метода решения из имеющихся методов, реализацию его в форме алгоритма решения.

Этапы построения математической модели

5. Поиск решения или реализация алгоритма в виде программ для ЭВМ. Данный этап будет рассмотрен при описании вычислительного эксперимента.

6. **Проверка адекватности модели**. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность – соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного, и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована. Этап установления степени соответствия модели объекту является заключительным. Для проверки адекватности математической модели реальному процессу нужно сравнить результаты измерений на объекте в ходе процесса с результатами предсказания модели в идентичных условиях.

Этапы построения математической модели

7. **Практическое использование модели**. Независимо от области применения созданной модели необходимо провести качественный и количественный анализ результатов моделирования, который позволяет:

- Выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики.
- Обозначить область применения модели.
- Проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе математической постановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности.
- Показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.

Этапы построения математической модели

Рис. 1. Этапы построение математической модели

Подходы к построению математических моделей

При построении моделей используют два принципа:

- дедуктивный (от общего к частному);
- индуктивный (от частного к общему).

Подходы к построению математических моделей

При первом подходе рассматривается частный случай общеизвестной фундаментальной модели. Здесь при заданных предположениях известная модель приспосабливается к условиям моделируемого объекта. Например, можно построить модель свободно падающего тела на основе известного закона Ньютона и в качестве допустимого приближения принять модель равноускоренного движения для малого промежутка времени.

Подходы к построению математических моделей

Второй способ предполагает выдвижение гипотез, декомпозицию сложного объекта, анализ, затем синтез. Здесь широко используется подобие, аналогичное моделирование, умозаключение с целью формирования каких- либо закономерностей в виде предположений о поведении системы. Например, подобным способом происходит моделирование строения атома. Вспомним модели Томсона, Резерфорда, Бора. Рассмотрим некоторые подходы к построению простейших математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы, вариационных принципов, аналогий, иерархических цепочек.

Подходы к построению математических моделей

1. **Фундаментальные законы природы**. Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Поэтому их обоснованность не вызывает сомнений. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон следует применять в данном случае и как это делать.

Подходы к построению математических моделей

2. **Вариационные принципы**. Еще один подход к построению моделей, по своей широте и универсальности сопоставимый с возможностями, даваемыми фундаментальными законами, состоит в применении так называемых вариационных принципов. Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте и показывают, что из всех возможных вариантов его поведения выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию. Обычно согласно этому условию некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения при его переходе из одного состояния в другое. Сформулированные применительно к какому-либо классу явлений вариационные принципы позволяют единообразно строить соответствующие математические модели. Их универсальность выражается также в том, что, используя их, можно в определенной степени отвлекаться от конкретной природы процесса.

Подходы к построению математических моделей

3. **Применение аналогий при построении моделей**. Часто при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Примером является простейшая модель для динамики популяций (модель Мальтуса), посредством которой можно объяснить явление радиоактивного распада.

Подходы к построению математических моделей

4. **Иерархический подход к получению моделей.** Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип «от простого – к сложному», когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая. Математические модели нижнего уровня могут быть достаточно простыми, типовыми, допускающими широкую унификацию и использование набора готовых моделей. При иерархичном построении общей модели сложной системы задача оптимизации всей системы распадается на ряд частных задач оптимизации на различных уровнях. При этом общий критерий оптимизации разделяется на критерии для каждого уровня. Таким образом, задача большой размерности может быть сведена к ряду задач меньшей размерности. При этом следует учитывать взаимное влияние элементов и уровней.

Подходы к построению математических моделей

5. **Блочный принцип**. При построении математических моделей широко используют блочный принцип. Модель строится из отдельных логически законченных блоков, отражающих ту или иную сторону рассматриваемого процесса. Блочный принцип построения моделей позволяет: разбить общую задачу построения математической модели на отдельные подзадачи и тем самым упростить ее решение, а также использовать разработанные блоки в других моделях, модернизировать отдельные блоки и заменять их на новые. Общее математическое описание модели представляет собой совокупность математических описаний отдельных блоков. Применение блочного принципа построения математических моделей позволяет во многих случаях решить проблему масштабирования процессов.

Подходы к построению математических моделей

Принципиально каждый блок математической модели может иметь различную степень детализации математического описания. Важно лишь, чтобы входные и выходные переменные всех блоков модели находились во взаимном соответствии, что обеспечит получение замкнутой системы уравнений математической модели процесса в целом. В идеале математическое описание каждого блока должно включать уравнения, параметрами которых являются только физико-химические свойства веществ. При практическом использовании блочного принципа в математическом описании каждого блока на том или ином уровне его детализации приходится применять эмпирические соотношения.

Вычислительный эксперимент

Основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, теоретической базой – прикладная математика, а технической – мощные электронно-вычислительные машины. Использование вычислительного эксперимента как средства решения сложных прикладных проблем имеет в случае каждой конкретной задачи свои специфические особенности. Тем не менее, всегда четко просматриваются общие характерные основные черты, позволяющие говорить о единой структуре этого процесса.

Табл. 1. Аналогии между вычислительным и лабораторным экспериментом

Лабораторный эксперимент	Вычислительный эксперимент
Образец	Модель
Физический прибор	Программа для компьютера
Калибровка	Тестирование программы
Измерение	Расчет
Анализ данных	Анализ данных

Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент – это эксперимент над математической моделью объекта на ЭВМ, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие ее параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах явления, описываемого математической моделью.

В настоящее время технологический цикл вычислительного эксперимента принято разделять на ряд этапов. И хотя такое деление условно, оно позволяет лучше понять существо этого метода проведения теоретических исследований.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

1. **Построение математической модели**. Сначала выбирается физическая модель, проводится разделение всех действующих в рассматриваемом явлении факторов на главные, обязательные для учета, и второстепенные – на данном этапе исследования они могут быть отброшены. Одновременно формулируются допущения или рамки применимости модели, в которых будут справедливы полученные на ее основе результаты. Эта модель записывается в математических терминах, как правило, в виде дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. Этот этап подробно рассмотрен выше, при описании процесса построения математической модели.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

2. **Разработка метода расчета математической задачи** (вычислительного алгоритма). Данный этап также был рассмотрен ранее, однако в вычислительном эксперименте в качестве методов решения всегда выбираются алгоритмические. Фактически он представляет собой совокупность цепочек алгебраических формул, по которым ведутся вычисления, и логических условий, позволяющих устанавливать последовательность применения этих формул. Как правило, для одной и той же математической задачи может быть предложено большое количество вычислительных алгоритмов. Приближенные и численные методы исследования поставленных математических задач относятся к обширному разделу – современной вычислительной математике.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Применение любого численного метода приводит к возникновению погрешности результатов решения задачи, которые можно разделить на три составляющих:

- Неустранимая погрешность, связанная с неточным заданием исходных данных.
- Погрешность метода, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи.
- Ошибка округления, связанная с конечной разрядностью чисел на компьютере.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Численный или приближенный метод реализуется всегда в виде вычислительного алгоритма. Требования, предъявляемые к алгоритмам, в том числе и к вычислительным алгоритмам:

- Реализуемость, т.е. обеспечивать решение задачи за допустимое машинное время.
- Точность, т.е. возможность получения решения исходной задачи с заданной точностью и за конечное число действий.
- Экономичность (эффективность), т.е. выполнение меньшего числа действий для достижения одинаковой точности.
- Устойчивость, т.е. в процессе вычислений не возрастающая погрешность.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Стремление получить более точные вычислительные алгоритмы приводит к появлению многочисленных модификаций, учитывающих специфические особенности конкретной математической задачи. Можно выделить следующие группы численных методов по объектам, к которым они применяются:

□ интерполяция и численное дифференцирование;

□ численное интегрирование;

□ определение корней линейных и нелинейных уравнений; □ решение систем линейных уравнений; □ решение систем нелинейных уравнений; □ решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; □ решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений; □ решение уравнений в частных производных; □ решение интегральных уравнений.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

4. **Проведение расчетов на компьютере**. Здесь наиболее отчетливо проявляется сходство с натурным экспериментом. Различие в том, что в лаборатории экспериментатор с помощью специально построенной установки «задает вопросы» природе, в то время как специалисты по вычислительному эксперименту с помощью компьютера ставят эти вопросы математической модели. Ответ в обоих случаях получается в виде некоторой цифровой информации, которую затем предстоит расшифровать. Точность информации, которую дает вычислительный эксперимент, определяется достоверностью самой модели. Именно по этой причине проводят тестовые испытания. Они необходимы для того, чтобы «отладить» программу и проверить адекватность математической модели.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

5. **Обработка результатов расчетов**. На этом этапе выполняется всесторонний анализ результатов расчета и выводы, после которых или становится ясна необходимость уточнения модели, или результаты, пройдя проверку на разумность и надежность, передаются заказчику для исполнения.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

К основным преимуществам вычислительного эксперимента можно отнести следующие:

- возможность исследования объекта без модификации установки или аппарата;
- возможность исследования каждого фактора в отдельности, в то время как в реальности они действуют одновременно;
- возможность исследования нереализуемых на практике процессов.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Тем самым основу вычислительного эксперимента составляет триада:

модель – алгоритм – программа.

Опыт решения крупных задач показывает, что

метод математического моделирования и вычислительный эксперимент соединяют в себе преимущества традиционных теоретических и экспериментальных методов исследования. Видоизмененная цепочка, реализованная в виде единого программного комплекса, и составляет «технологию» вычислительного эксперимента.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

К основным преимуществам вычислительного эксперимента можно

отнести следующие:

- возможность исследования объекта без модификации установки

или аппарата;

- возможность исследования каждого фактора в отдельности, в то время как в реальности они действуют одновременно;

- возможность исследования нереализуемых на практике процессов.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

В современной науке и технике появляется все больше областей, задачи в которых можно и нужно решать методом вычислительного эксперимента, с помощью математического моделирования.

Обратим внимание на некоторые из них:

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Энергетическая проблема

Прогнозирование атомных и термоядерных реакторов на основе детального математического моделирования происходящих в них физических процессов. В этой области работа ведется очень успешно. Вычислительный эксперимент тесно сопрягается с натурным экспериментом и помогает, заменяет и удешевляет весь исследовательский цикл, существенно его ускоряя.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Космическая техника

Расчет траекторий летательных аппаратов, задачи обтекания, системы автоматического проектирования. Обработка данных натурного эксперимента, например, радиолокационных данных, изображений со спутников, диагностика плазмы. Здесь очень важной оказывается проблема повышения качества приборов, и в частности измерительной аппаратуры.

Между тем в настоящее время показано, что, используя измерительный прибор среднего качества и присоединив к нему ЭВМ, можно на основе специальных алгоритмов получить результаты, которые дал бы измерительный прибор очень высокого качества. Таким образом, сочетание измерительного прибора с компьютером открывает новые возможности.

Технологический цикл вычислительного эксперимента

Технологические процессы

Получение кристаллов и пленок, которые, нужны для создания вычислительной техники, для решения проблем в области элементарной базы (что невозможно без математического моделирования); моделирование теплового режима конструктивных узлов перспективных ЭВМ, процессов лазерной плазмы, технологии создания материалов с заданными свойствами**.**

Также экологические проблемы, гео - и астрофизические явления, химия и биология.