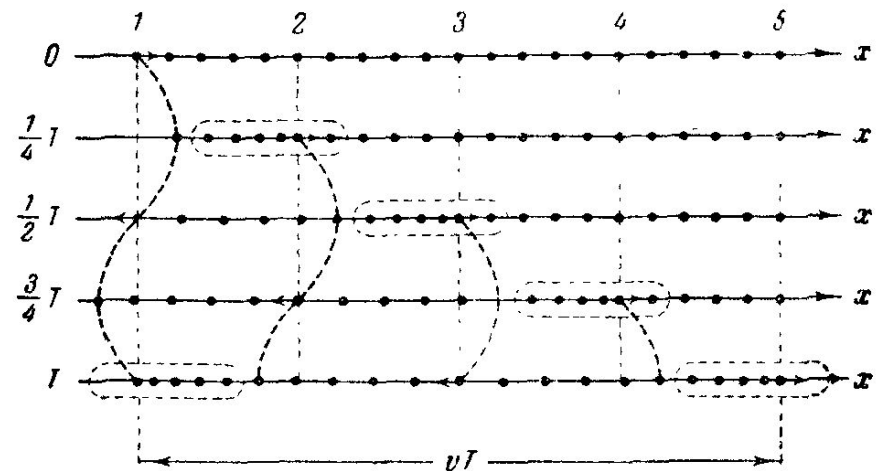
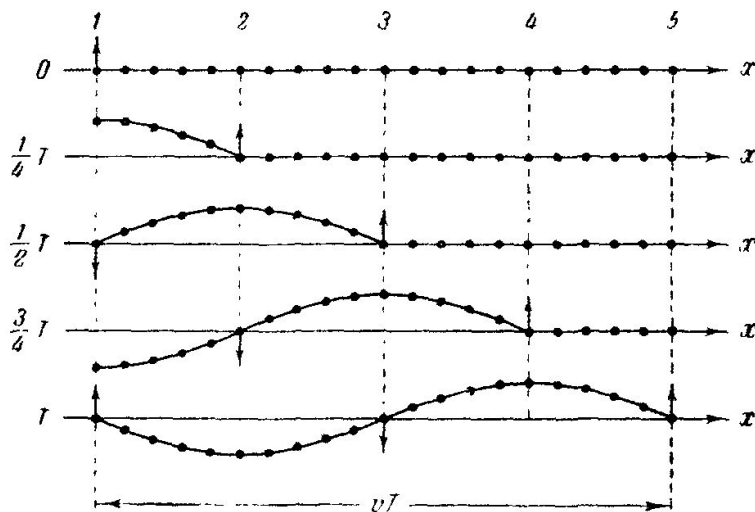


Волны в упругих средах.

Волновое уравнение. Уравнение монохроматической бегущей волны, основные характеристики волн. Продольные и поперечные волны. Упругие волны в газах, жидкостях и твердых телах. Энергетические характеристики упругих волн. Вектор Умова.

- Процесс распространения колебаний в пространстве называется волной.
- Частицы среды не переносятся волной - они совершают колебания около своих положений равновесия.
- В зависимости от направления колебаний частиц по отношению к направлению распространения волны:
 - продольные- частицы среды около своего положения равновесия движутся вдоль направления распространения (жидкая, твердая и газообразная среда)
 - поперечные – частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны (твердая среда)



- Упругой волной называют процесс распространения возмущения в упругой среде.
- Геометрическое место точек до которой доходит колебание в момент времени t называется фронтом волны
- Геометрическое место точек колеблющихся в одной фазе называется волновой поверхностью
- Уравнение волны есть выражение, которое даёт смещение колеблющейся точки, как функцию её координат x, y, z и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z; t)$$

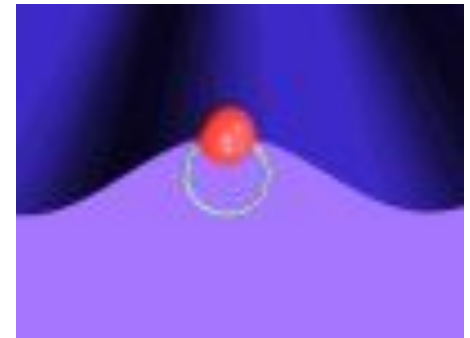
Продольная
упругая волна



Поперечная
волна



Волна на
поверхности
жидкости



- Уравнение гармонической волны:

$$\xi(x, t) = a \cos \omega(t - x/v)$$

- a - амплитуда, ω -циклическая частота колебаний частиц в среде.
- Период колебаний: $T = 2\pi/\omega$
- Длина волны λ - расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π , расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T

- Волновое число:

$$k = 2\pi/\lambda. \quad \blacktriangleright \quad \xi = a \cos(\omega t - kx).$$

- Поглощающая упругая среда:

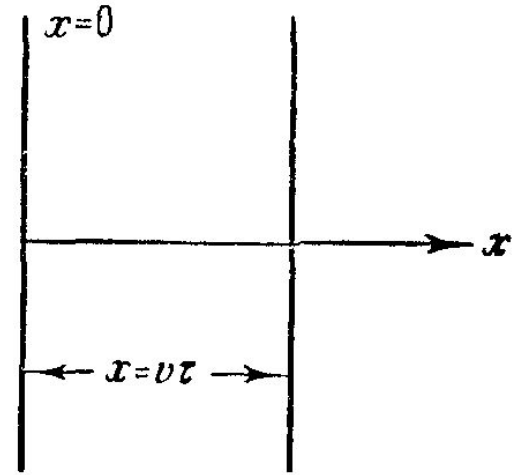
$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$$

- где γ -коэффициент затухания волны (м^{-1}), амплитуда уменьшается по закону: $a = a_0 e^{-\gamma x}$

Уравнение плоской волны:

- Колебания носят гармонический характер. Ось x – вдоль направления распространения волны. Волновые поверхности перпендикулярны оси x . Смещение зависит только от x и t :

$$\xi = \xi(x, t)$$



- Колебания точек в плоскости $x = \xi(0, t) = a \cos \omega t$
- В произвольной точке: при v – скорости распространения волны, такое расстояние волна пройдёт за врем. $\tau = \frac{x}{v}$
- Колебания частиц в плоскости x будут отставать от колебаний частиц в плоскости 0 на τ :

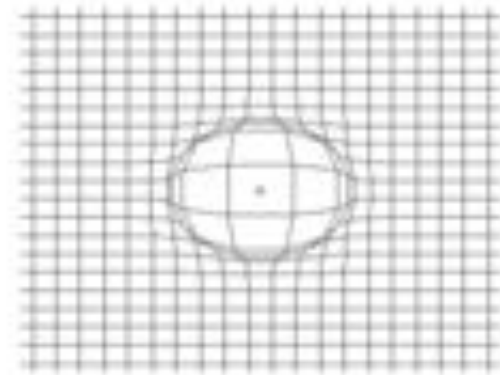
$$\xi(x, t) = a \cos \omega (t - \tau) = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

- Тогда уравнение плоской волны распространяющейся в направлении возрастания x : убывания x :

$$\xi = a \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$\xi = a \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

- $v = \omega/k$ – фазовая скорость – скорость распространения фазы.



- В случае сферической волны:
- Скорость распространения волны в о всех направлениях одинаковая.
- Пусть фаза ωt .
- Точки, лежащие на волновой поверхности $r \gg$ радиуса источника, будут колебаться с фазой $\omega(t-r/v)$.
- Амплитуда колебаний волны убывает с расстоянием по закону $1/r$.
- Уравнение сферической волны:
$$\xi = \frac{a}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right)$$
- где a - постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность a равна размерности амплитуды, умноженной на размерность длины.

- Волновое уравнение- дифференциальное уравнение в частных производных, связывающее изменения функций, характеризующих волну, во времени и пространстве.

- Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении так, что с осями x, y, z образуются α, β, γ .

- Колебания через начало координат имеют вид:

$$\xi_0 = a \cos \omega t.$$

- Колебания в плоскости, отстоящей от начала координат на расстоянии $l=vt$:

$$\xi = a \cos \omega \left(t - \frac{l}{v} \right)$$

- \mathbf{r} -радиус-вектор точек рассматриваемой поверхности, \mathbf{n} -вектор нормали, для всех точек поверхности l :

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = r \cos \varphi = l$$

- Обозначим $\mathbf{k}=\mathbf{kn}$ – волновой вектор, $k = 2\pi/\lambda$

- Тогда отклонение от положения равновесия точки с радиус-вектором \mathbf{r} в момент времени t :

$$\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$$

- Выразим скалярное произведение \mathbf{kr} через проекции на координатные оси:

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$$

- Тогда уравнение плоской волны:

$$\xi(x, y, z; t) = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$$

- где $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta$, $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$

- Если \mathbf{n} совпадает с осью x , то $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$ и уравнение переходит в уравнение:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx)$$

- Уравнение плоской волны также записывают в виде:

$$\xi = a e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$$

- Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым.
- Рассмотрим производные по координатам и времени от уравнения плоской волны:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -\omega^2 \xi, \quad (*)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_z^2 \xi.$$

Сложим уравнения ➤

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \xi = -k^2 \xi \quad \text{➤}$$

$$\text{➤ Подставим (*) ➤} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

- Используя определение фазовой скорости $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

- **-волновое уравнение**

- **Энергия упругой волны:** Выделим в среде малый объём ΔV , обладающий потенциальной энергией упругой деформации ($\kappa x = F = \sigma S$, $\sigma = E\varepsilon$ и $\varepsilon = x/l$):

$$\Delta E_p = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

- где $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ - относительное удлинение, E - модуль юнга.
- Используем определение фазовой скорости для упругой среды $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$:

$$\Delta E_p = \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V$$

- Кинетическая энергия $\rho \varepsilon u = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V$:

$$\Delta E_k = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V$$

- Полная энергия: $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V$

- Плотность энергии: $u = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]$

- Продифференцируем. $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$

- Получим: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\omega}{v} a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$

$$u = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \rho a^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t - kx)$$

- Плотность энергии в каждый момент времени в различных точках пространства различна.
- В одной и тоже точке плотность энергии изменяется по закону квадрата синуса.
- Т.К. среднее значение квадрата синуса равно $\frac{1}{2}$, то среднее значение плотности энергии в каждой точке среды будет равно:
- Плотность энергии и её среднее значение для всех видов волн пропорциональны плотности среды ρ , квадрату частоты ω и квадрату амплитуды a .
- Плотности энергий продольной и поперечной волн будут равны.
- Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии Φ через поверхность.
- Φ - скалярная величина, $[\Phi] = \text{размерность энергии} / \text{размерность времени}$, совпадает с размерностью мощности.

- Плотность потока энергии- векторная величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещённую в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.
- Пусть через площадку ΔS_{\perp} , перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время Δt энергия ΔE . Тогда плотность потока энергии j равна:

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta S_{\perp} \Delta t}$$

- Т.к. j есть поток энергии $\Delta \Phi$ через поверхность ΔS_{\perp} , то:

$$j = \frac{\Delta \Phi}{\Delta S_{\perp}}$$

- Через площадку ΔS_{\perp} за время Δt будет перенесена энергия ΔE , заключенная в объёме цилиндра с основанием ΔS_{\perp} и высотой $v \Delta t$ (v -фазовая скорость волны). Пусть цилиндр мал и плотность энергии всех точек одинакова. Тогда энергия ΔE есть произведение плотности энергии на объём цилиндра:

$$\Delta E = u \Delta S_{\perp} v \Delta t.$$

- Подставим в плотность потока энергии и получим:

$$\mathbf{j} = u\mathbf{v}$$

- Направление фазовой скорости как вектора совпадает с направлением распространения волны, тогда: $\mathbf{j} = u\mathbf{v}$

- **-вектор Умова**

- Вектор Умова как и плотность энергии и различен в различных точках пространства. В данной точке пространства он изменяется со временем по закону квадрата синуса. Его среднее значение:

$$\mathbf{j}_{\text{ср}} = \bar{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}.$$

- Зная \mathbf{j} в некоторой точке пространства можно найти поток энергии через помещенную в данную точку пространства малую площадку ΔS :

$$\Delta\Phi = j_n \Delta S$$

- Полный поток через поверхность S равен сумме элементарных потоков:

$$\Phi = \int_S j_n dS,$$

- Упругие волны , распространяющиеся в воздухе с частотой 20 – 20 000 Гц, вызывают у человека ощущение звука. Упругие волны в этом диапазоне распространяющиеся в любой среде называют звуковыми волнами.
- Инфразвук- волны с частотой < 20 Гц
- Ультразвук – волны с частотой > 20 000 Гц.
- Скорость звука в газе зависит от температуры:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

- Средняя скорость теплового движения молекул:

$$\bar{v}_{\text{мол}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

- *Упругие волны* могут распространяться не только в газах и жидкостях, но и в твердых телах. При этом в однородных твердых телах (в большинстве металлов - в железе, стали, алюминии) условия распространения упругих волн более благоприятны, чем, например, в воздухе; звук распространяется в металлах на большие расстояния, испытывая гораздо меньшее поглощение.