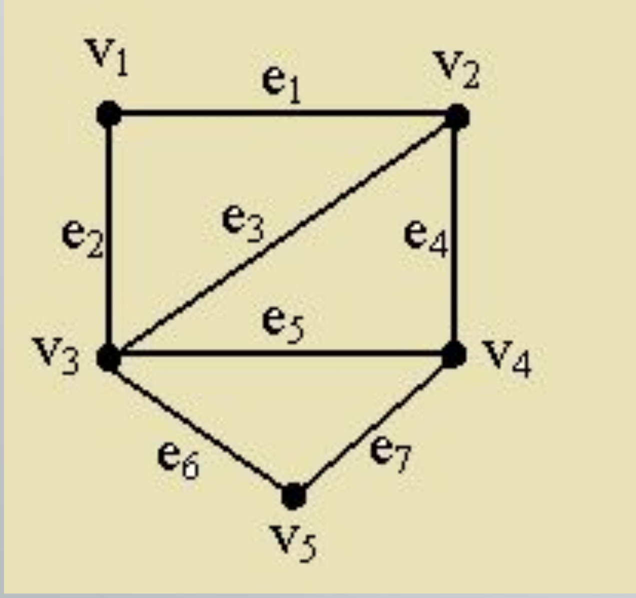
Основные понятия теории графов

Основные понятия

Граф ***G=(V,E)*** состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых ***вершинами***, и конечного множества элементов, называемых ***ребрами***.



Граф ***G=(V, E)***

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$;

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

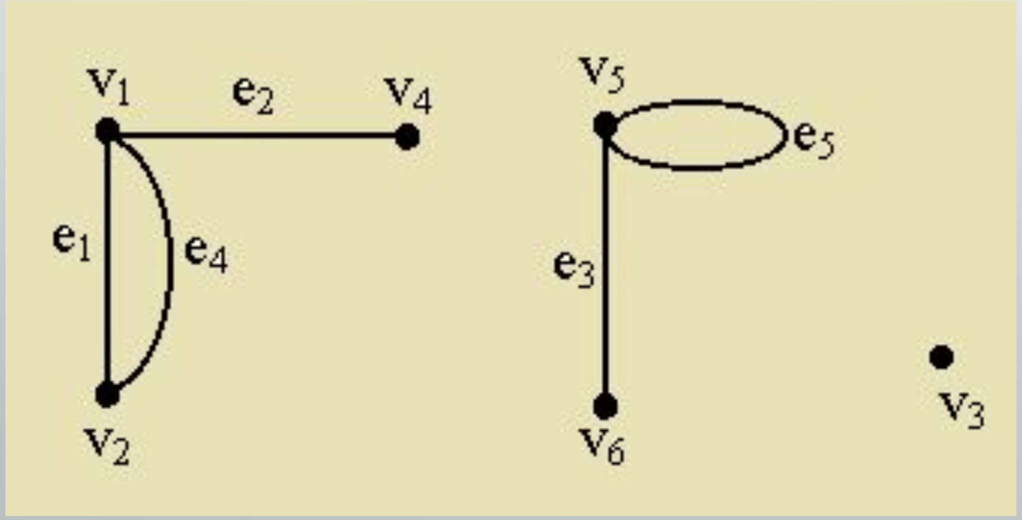
Основные понятия

Вершины $\boldsymbol{v_i}$ и $\boldsymbol{v_j}$, определяющие ребро $\boldsymbol{e_k}$, называются ***концевыми вершинами*** ребра $\boldsymbol{e_k}$.

Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются ***параллельными*** ($\boldsymbol{e_1}$,$\boldsymbol{e_4}$).

Петля– замкнутое ребро($\boldsymbol{e_5}$).

Ребро, принадлежащее вершине, называется ***инцидентным*** (ребро $\boldsymbol{e_1}$ инцидентно вершинам $\boldsymbol{v_1}$ и $\boldsymbol{v_2}$).

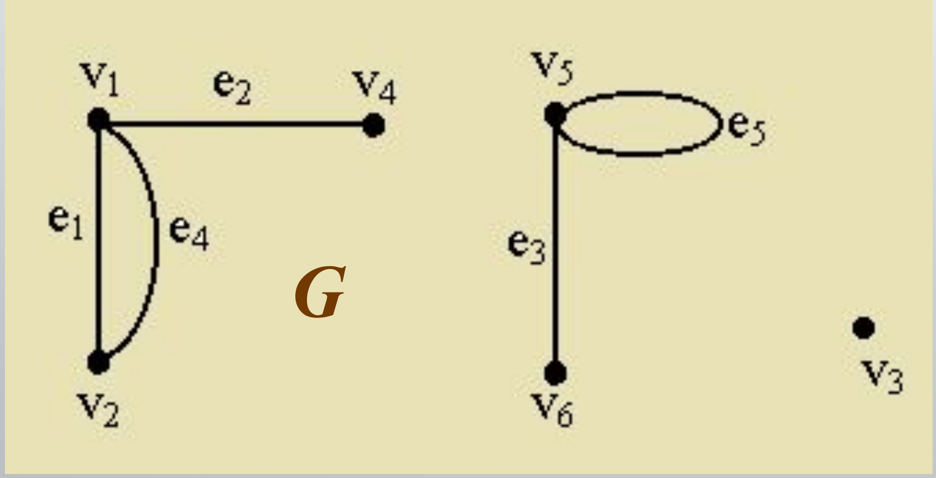


Основные понятия

Изолированная вершина не инцидентна ни одному ребру (v_3).

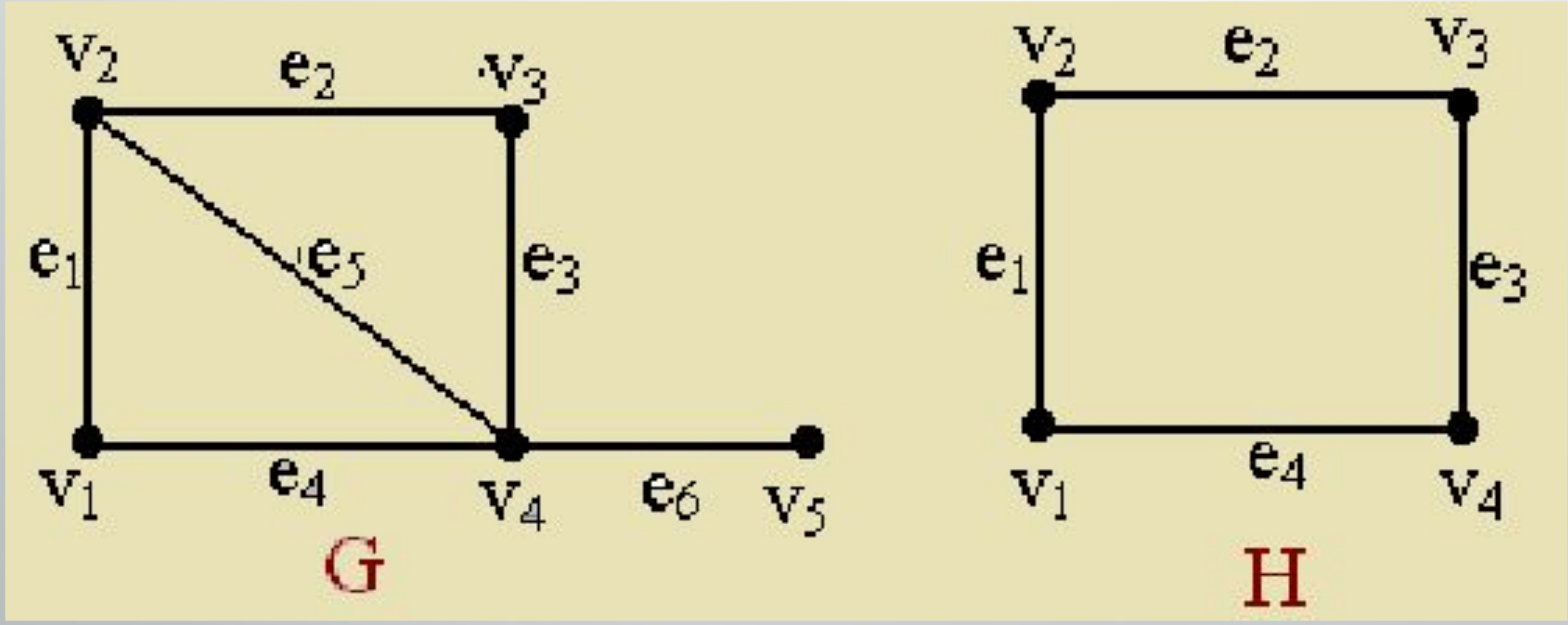
Две вершины ***смежны***, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра (v_1, v_4).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, они называются ***смежными*** (e_1, e_2).



Основные понятия

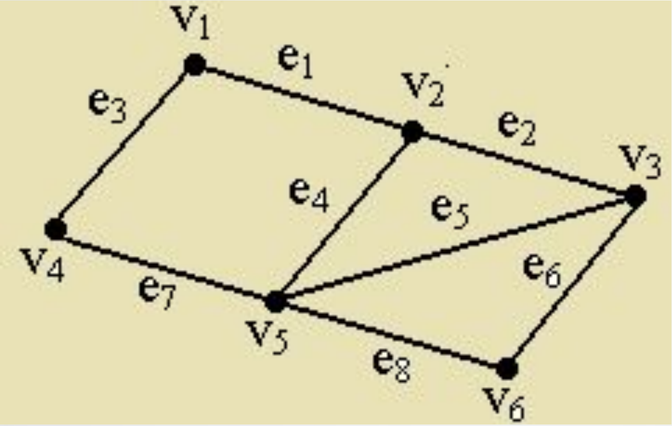
Подграф – любая часть графа, сама являющаяся графом.



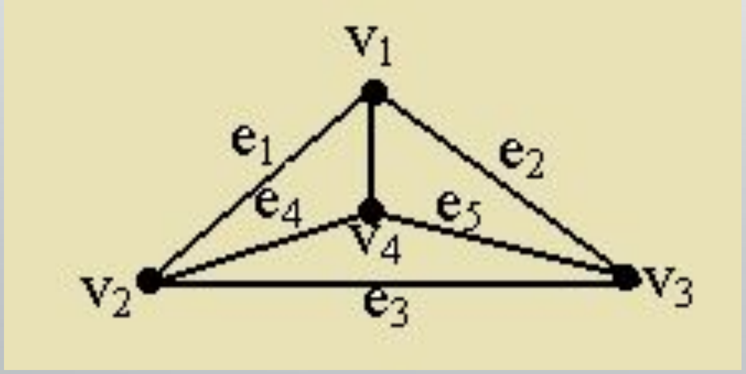
Подграф ***H*** графа ***G***

Виды графов

Граф ***G=(V,E)*** называется ***простым,*** если он не содержит петель и параллельных ребер.

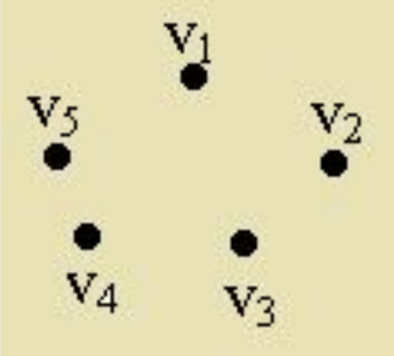


Граф ***G=(V,E)*** называется ***полным***, если он простой и каждая пара вершин смежна.

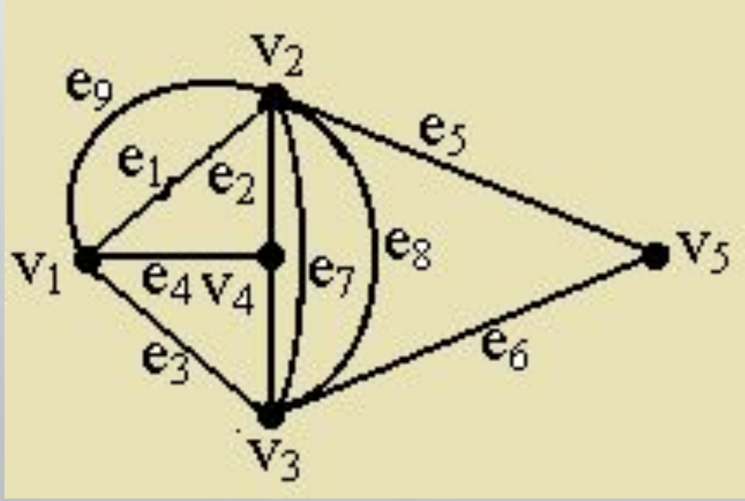


Виды графов

Ноль-граф - граф, множество ребер которого пусто.

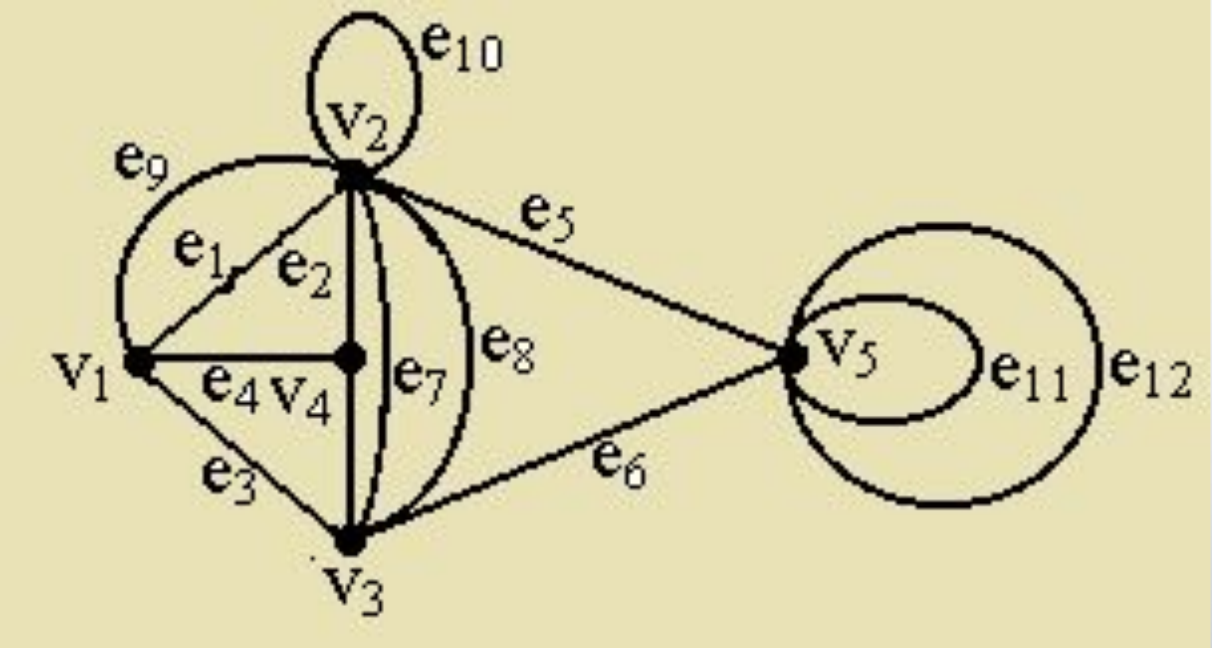


Граф ***G*** с кратными ребрами называется ***мультиграф.***



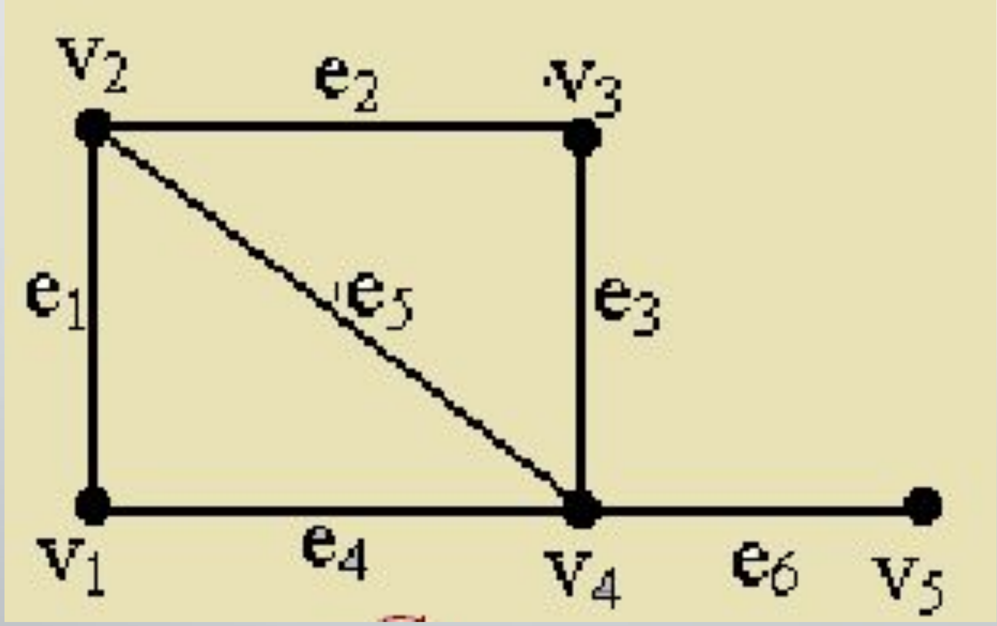
Виды графов

Граф ***G*** с петлями и кратными ребрами называется ***псевдограф***.



Неориентированный граф

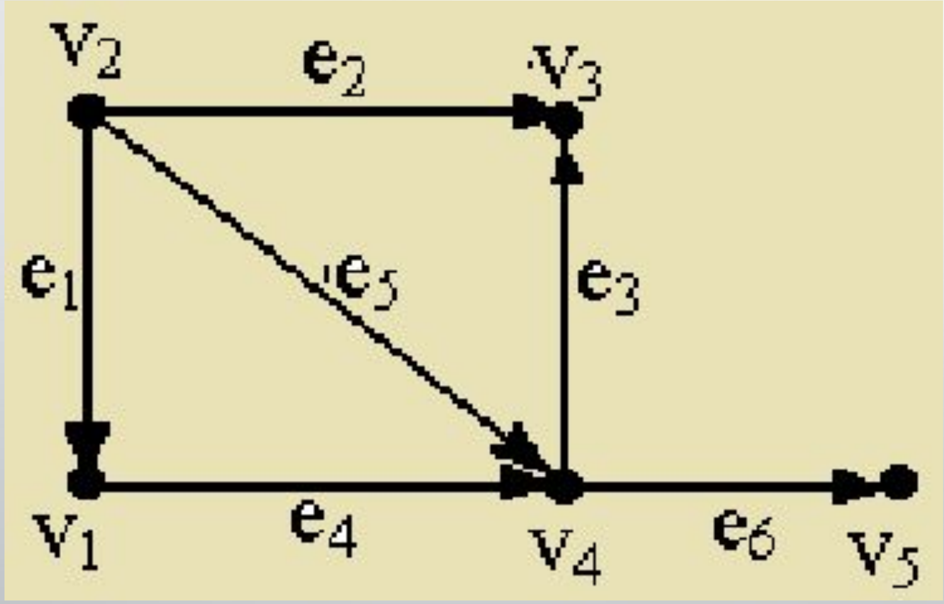
Граф **G**, рёбра которого не имеют определённого направления, называется ***неориентированным.***



Ориентированный граф

Граф ***G***, имеющий определённое направление, называется ***ориентированным графом или орграфом***.

Ребра, имеющие направление, называются ***дугами***.



Способы задания графов

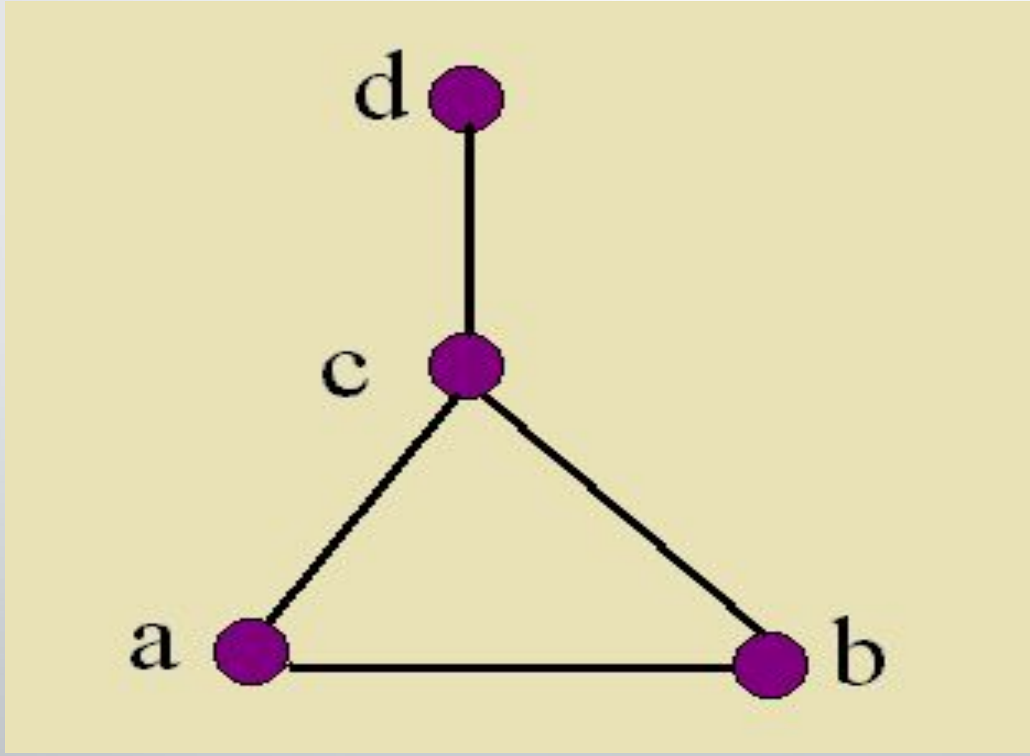
Явное задание графа как алгебраической системы.

Чтобы задать граф, достаточно для каждого ребра указать двухэлементное множество вершин – его мы и будем отождествлять с ребром.

$$\{\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{c,d\}\}$$

Способы задания графов

Геометрический



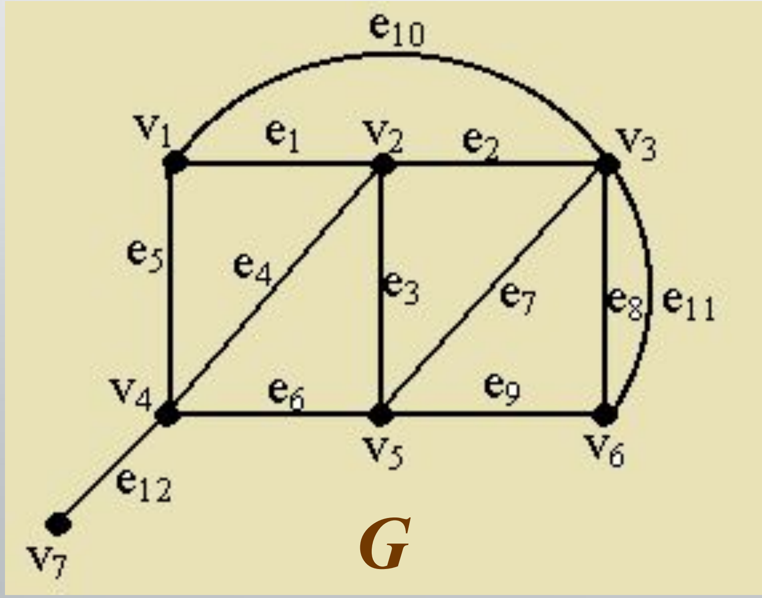
Маршрут

Маршрут в графе $\boldsymbol{G=(V,E)}$ — конечная чередующееся последовательность вершин и ребер $\boldsymbol{v_0, e_1, v_1, e_2,\ldots,v_{k-1}, e_k, v_k}$, которая начинается и заканчивается на вершинах, причем $\boldsymbol{v_{i-1}}$ и $\boldsymbol{v_i}$ являются концевыми вершинами ребра $\boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{1\leq i \leq k}$.

Маршрут

Маршрут называется ***открытым***, если его концевые вершины различны (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_6, e_9, v_5, e_7, v_3, e_{11}, v_6).

Маршрут называется ***замкнутым***, если его концевые вершины совпадают (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1).

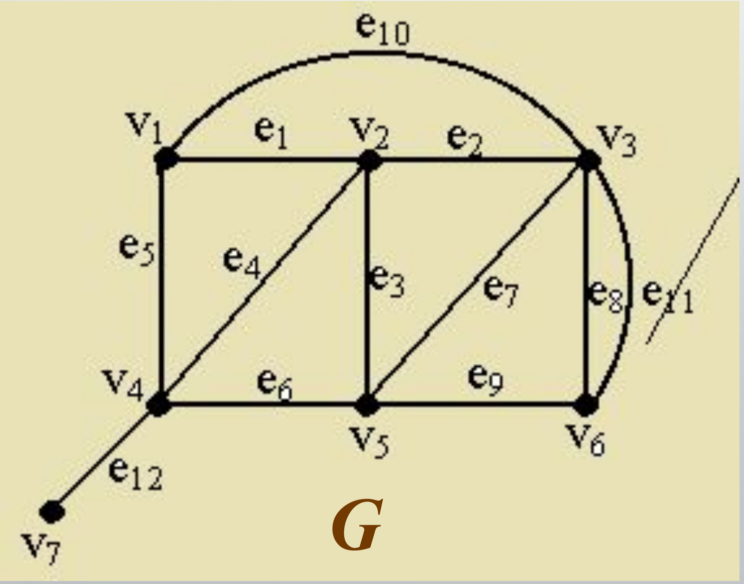


Цепь

Маршрут называется ***цепью***, если все его ребра различны.

Цепь называется ***простой***, если ее концевые вершины различны(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_{11}, v_3).

Цепь называется ***замкнутой***, если ее концевые вершины совпадают (v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_7,v_5,e_3,v_2,e_4,v_4,e_5,v_1).

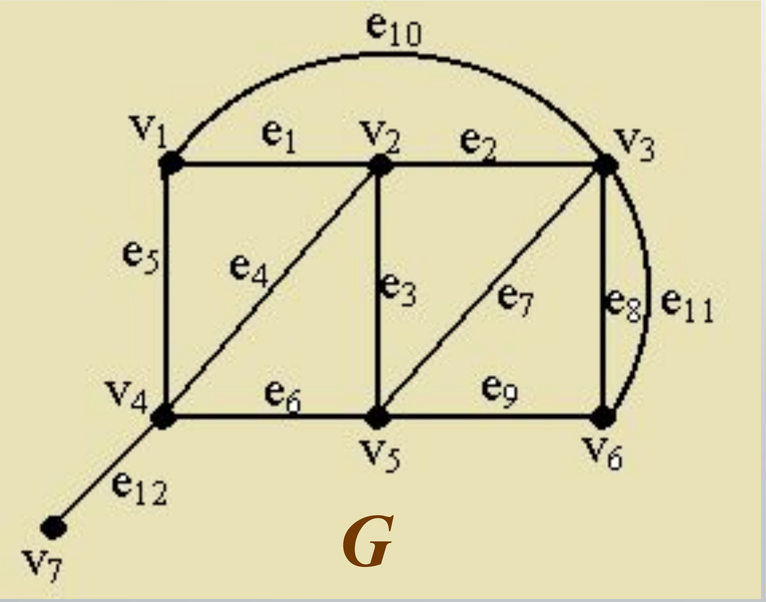


Путь, цикл

Открытая цепь называется ***путем***, если все ее вершины различны (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3).

Цикл – это замкнутая цепь (***простой цикл***, если цепь простая) ($v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_6, v_4, e_5, v_1$).

Число ребер в пути называется ***длиной пути***. Аналогично определяется ***длина цикла***.



Свойства путей и циклов

1. Степень каждой неконцевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл, — неверно.

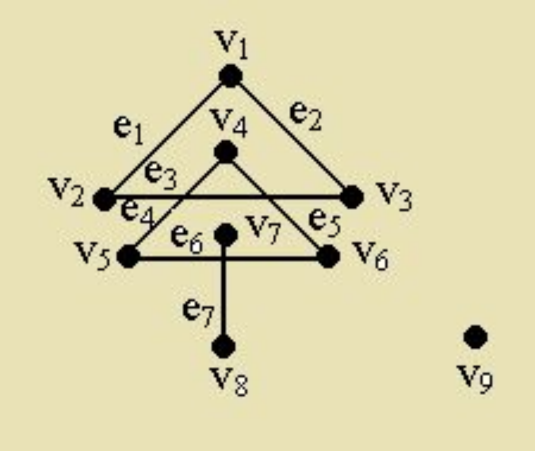
3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

Связность графов, компонента связности

Две вершины v_i и v_j называются ***связанными*** в графе ***G***, если в нем существует путь v_i—v_j. Вершина связана сама с собой.

Граф называется ***связным***, если в нем существует путь между каждой парой вершин.

Компонента связности – максимальный связный подграф в графе.



1 компонента связности: *{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3}*

2 компонента связности: *{v_4, v_5, v_6, e_4, e_5, e_6}*

3 компонента связности: *{v_7, v_8, e_7}*

4 компонента связности: *{v_9}*