Сегодня: *

Лекция 21

Тема: ***МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА***

Содержание лекции:

21.1. Магнитные моменты электронов и атомов;

21.2. Атом в магнитном поле;

21.3. Диамагнетики и парамагнетики в магнитном поле;

21.4. Магнитное поле в веществе;

21.5. Ферромагнетики.

21.1. Магнитные моменты электронов и атомов

Различные среды при рассмотрении их магнитных свойств называют ***магнетиками***.

Все тела при внесении их во внешнее магнитное поле *намагничиваются* в той или иной степени, т.е. создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее магнитное поле.

Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов.

По своим магнитным свойствам магнетики подразделяются на три основные группы: *диамагнетики* ($\mu \leq 1$), *парамагнетики* ($\mu \geq 1$) *и* *ферромагнетики* ($\mu >> 1$).

Магнетики состоят из атомов, которые в свою очередь состоят из положительных ядер и, условно говоря, вращающихся вокруг них электронов.

Электрон, движущийся по орбите в атоме эквивалентен замкнутому контуру с орбитальным током *I=eν=e/T*, где *e* – заряд электрона, *ν* – частота его вращения по орбите, T – период вращения электрона по орбите. **Орбитальному току** соответствует ***орбитальный магнитный момент*** **электрона**.

$$\vec{P}_m = ISn = \frac{e\vec{v}}{2\pi r}\pi r^2 \vec{n} \qquad (21.1.1)$$

где S – площадь орбиты, n – единичный вектор нормали к S, $\vec{v}$ – скорость электрона. На рис. 21.1 показано направление орбитального магнитного момента электрона.

Электрон, движущийся по орбите имеет *орбитальный момент импульса* L_e, который имеет противоположное направление по отношению к P_m и связан с ним соотношением

$$\vec{P}_m = \gamma \vec{L}_e \qquad (21.1.2)$$

Здесь, коэффициент пропорциональности γ называется ***гиромагнитным отношением*** орбитальных моментов и равен

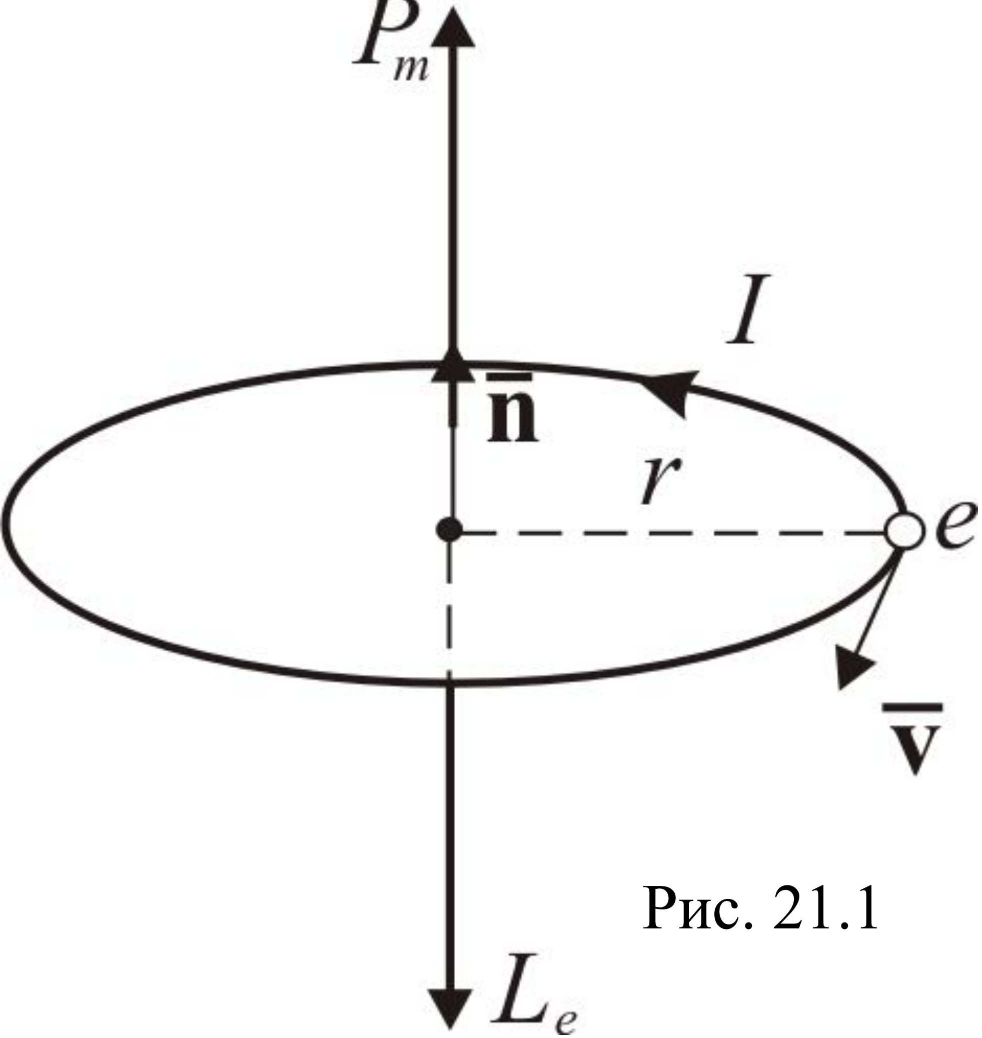


Рис. 21.1

$$\gamma = -\frac{e}{2m} \qquad (21.1.3)$$

где m – масса электрона.

Кроме того, электрон обладает *собственным моментом импульса* L_{eS}, который называется ***спином электрона***.

$$L_{eS} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{h}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \qquad (21.1.4)$$

где h – постоянная Планка

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\frac{Дж}{с};\quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\frac{Дж}{с}$$

Спину электрона L_{eS} соответствует *спиновый магнитный момент* электрона P_{mS}, направленный в противоположную сторону:

$$\vec{\mathbf{P}}_{mS} = \gamma_S \vec{\mathbf{L}}_{eS} \qquad (21.1.5)$$

Величину γ_S называют *гиромагнитным отношением спиновых моментов*

$$\gamma_S = -\frac{e}{m} \qquad (21.1.6)$$

Проекция спинового магнитного момента электрона на направление вектора индукции магнитного поля может принимать только одно из следующих двух значений

$$P_{mSB} = \pm\frac{e\hbar}{2m} = \pm\mu_Б \qquad (21.1.7)$$

где $\mu_Б$ – *магнетон Бора*. **Орбитальным магнитным моментом P_m атома** называется **геометрическая сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома**

$$\vec{\mathbf{P}}_m = \sum_{i=1}^{Z} \vec{\mathbf{P}}_{mi}; \qquad (21.1.8)$$

где Z – число всех электронов в атоме – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева.

Орбитальным моментом импульса L атома называется геометрическая сумма моментов импульса всех электронов атома:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{\mathbf{L}}_{ei} \qquad (21.1.9)$$

Более подробно вышеназванные характеристики мы обсудим в разделе «Атомная и ядерная физика».

21.2. Атом в магнитном поле

При внесении атома в магнитное поле с индукцией $\vec{\mathbf{B}}$ на электрон, движущийся по орбите эквивалентной замкнутому контуру с током, действует момент сил *M*:

$$\vec{\mathbf{M}} = \left[\vec{\mathbf{P}}_m, \vec{\mathbf{B}}\right] \qquad (21.2.1)$$

При этом изменяется орбитальный момент импульса электрона:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_e}{dt} = \left[\vec{\mathbf{P}}_m \vec{\mathbf{B}}\right] = \left[-\gamma\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{L}}_e\right] \qquad (21.2.2)$$

Аналогично изменяется вектор орбитального магнитного момента электрона

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_m}{dt} = \left[-\gamma\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{P}}_m\right] \qquad (21.2.3)$$

Из этого следует, что векторы $\vec{\mathbf{L}}_e$ и $\vec{\mathbf{P}}_m$, и сама орбита *прецессирует* вокруг направления вектора $\vec{\mathbf{B}}$. На рисунке 21.2 показано прецессионное движение электрона и его орбитального магнитного момента, а также дополнительное (прецессионное) движение электрона.

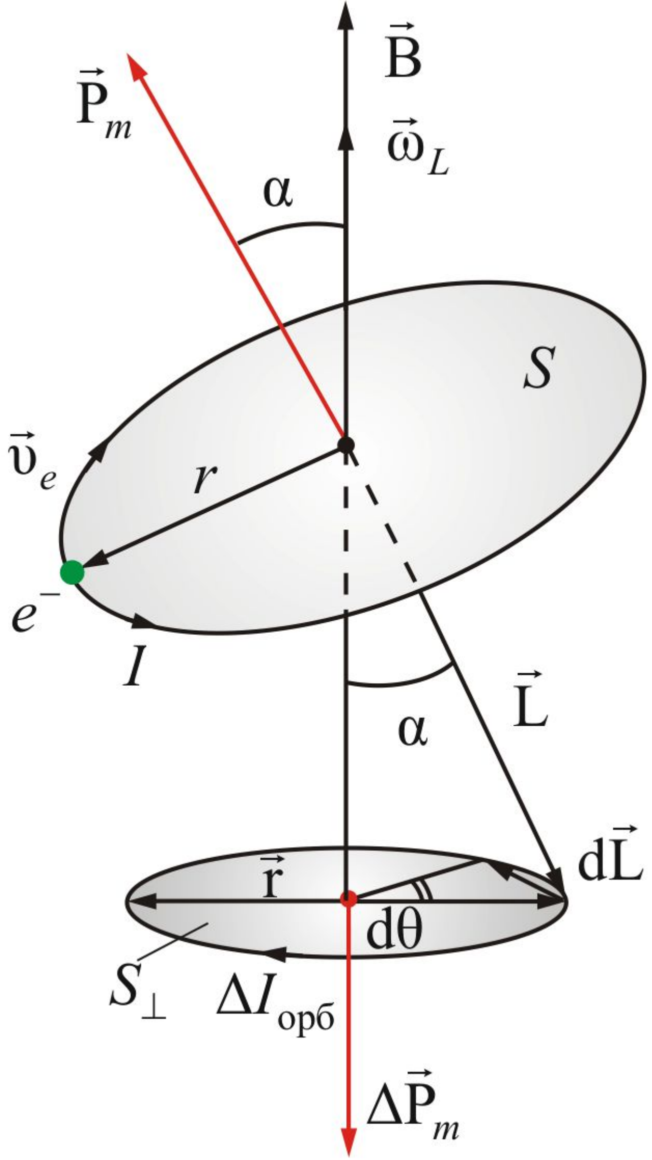


Рис. 21.2

Эта прецессия называется ***Ларморовской прецессией***. Угловая скорость этой прецессии ω_L зависит только от индукции магнитного поля и совпадает с ней по направлению.

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_L = \frac{e}{2m}\vec{\mathbf{B}} \qquad (21.2.4)$$

Теорема Лармора: единственным результатом влияния магнитного поля на орбиту электрона в атоме является прецессия орбиты и вектора орбитального магнитного момента электрона с угловой скоростью ω_L вокруг оси, проходящей через ядро атома параллельно вектору индукции магнитного поля. Прецессия орбиты электрона в атоме приводит к появлению дополнительного орбитального тока

$$\Delta I_{орб} = e\frac{\omega_L}{2\pi} \qquad (21.2.5)$$

и соответствующего ему наведенного орбитального магнитного момента ΔP_m

$$\Delta\vec{\mathbf{P}}_m = -\Delta I_{орб} S_\perp = -\frac{e^2 S_\perp}{4\pi m}\vec{\mathbf{B}} \qquad (21.2.6)$$

где – площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\mathbf{B}}$.Знак «–» говорит, что $\vec{\mathbf{P}}_m$ противоположен вектору $\vec{\mathbf{B}}$. Тогда общий орбитальный момент атома равен

$$\Delta\vec{\mathbf{P}}_m = -\frac{e^2 Z S_\perp}{4\pi m}\vec{\mathbf{B}} \qquad (21.2.7)$$

21.3. Диамагнетики и парамагнетики в магнитном поле

Количественной характеристикой намагниченного состояния вещества служит векторная величина $\vec{\mathbf{J}}$ – ***намагниченность*** , равная отношению магнитного момента малого объема вещества к величине этого объема:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_{mi} \qquad (21.3.1)$$

где $\vec{P}_{m\,i}$ – магнитный момент i-го атома из числа n атомов, содержащихся в объеме ΔV.

***Диамагнетиками** называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствии внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (например инертные газы, водород, азот, NaCl и др.).*

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле его атомы приобретают наведенные магнитные моменты.

В пределах малого объема ΔV изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты ΔP_m всех атомов одинаковы и направлены противоположно вектору $\vec{B}$.

Вектор намагниченности равен

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{n\Delta\vec{\mathbf{P}}_m}{\Delta V} = n_0\Delta\vec{\mathbf{P}}_m = \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0}\chi' = \vec{\mathbf{H}}\cdot\chi', \qquad (21.3.2)$$

где n_0 – концентрация атомов, μ_0 – магнитная постоянная, χ' – коэффициент пропорциональности, характеризующий магнитные свойства диамагнетика и называемая магнитной восприимчивостью среды.

Для всех диамагнетиков $\chi' < 0$. *Таким образом, вектор* $\vec{\mathbf{B}}_{внутр}$ *магнитной индукции собственного магнитного поля, создаваемого диамагнетиком при его намагничивании во внешнем поле* $\vec{\mathbf{B}}_{внеш}$ *направлен в сторону, противоположную* $\vec{\mathbf{B}}_{внеш}$. (В отличии от диэлектрика в электрическом поле).

Относительной магнитной восприимчивостью вещества называется безразмерная величина χ, связанная с χ' соотношением:

$$\chi = \frac{\chi'}{1-\chi'} \qquad (21.3.3)$$

У диамагнетиков $|\chi'| \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$, поэтому $\chi \approx \chi'$.

Парамагнетиками *называются вещества, атомы которых имеют в отсутствии внешнего магнитного поля, отличный от нуля магнитный момент* $\vec{\mathbf{P}}_m$.

Эти вещества намагничиваются в направлении вектора $\vec{\mathbf{B}}_{внеш}$.

К *парамагнетикам* относятся многие щелочные металлы, кислород O_2, оксид азота NO, хлорное железо $FeCl_2$ и др.

В отсутствии внешнего магнитного поля намагниченность парамагнетика $J = 0$, т.к. $\vec{\mathbf{P}}_{mi}$ векторы разных атомов ориентированы беспорядочно.

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле, происходит преимущественная ориентация собственных магнитных моментов атомов $\vec{\mathbf{P}}_{mi}$ по направлению поля, так что парамагнетик намагничивается. Значения χ' для парамагнетиков положительны и находятся в пределах $\sim 10^{-5} \div 10^{-3}$. Поэтому магнитная восприимчивость $\chi \approx \chi'$ как и у диамагнетиков.

13.4. Магнитное поле в веществе

При изучении магнитного поля в веществе различают два типа токов – ***макротоки и микротоки*.**

Макротоками называются токи проводимости и конвекционные токи, связанные с движением заряженных макроскопических тел.

Микротоками (молекулярными токами) называют токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

Магнитное поле в веществе является суперпозицией двух полей: внешнего магнитного поля, создаваемого макротоками, и внутреннего или собственного, магнитного поля, создаваемого микротоками.

Характеризует магнитное поле в веществе вектор $\vec{\mathbf{B}}$, равный геометрической сумме $\vec{\mathbf{B}}_{внеш}$ и $\vec{\mathbf{B}}_{внутр}$ магнитных полей:

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{внеш} + \vec{\mathbf{B}}_{внутр} \qquad (21.4.1)$$

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме можно обобщить на случай магнитного поля в веществе:

$$\oint_L BdL = \mu_0\left(I_{макро} + I_{микро}\right) \qquad (21.4.2)$$

где $I_{микро}$ и $I_{\text{макро}}$ – алгебраическая сумма макро- и микротоков сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L (рис. 21.3).

Как видно из (рис. 21.3), вклад в $I_{микро}$ дают только те молекулярные токи, которые нанизаны на замкнутый контур L.

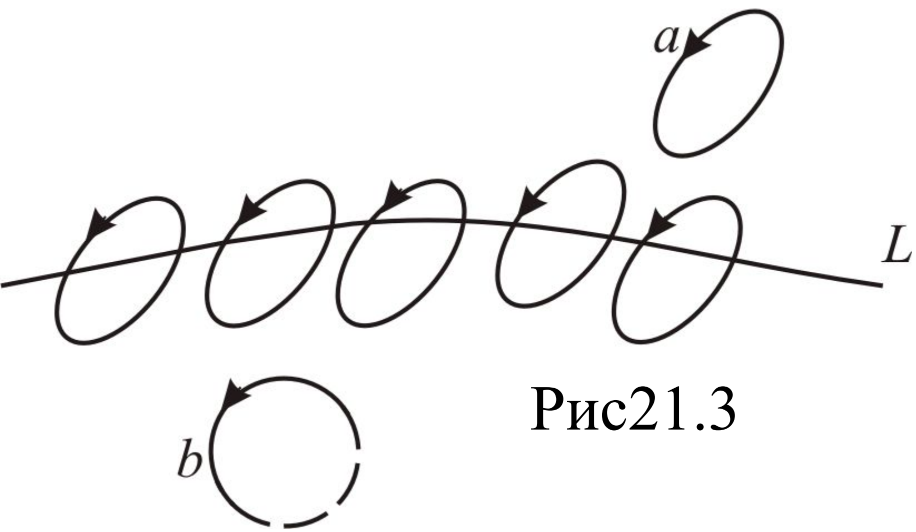


Рис21.3

Алгебраическая сумма сил микротоков связана с циркуляцией вектора намагниченности соотношением

$$I_{микро} = \oint_L Jdl \qquad (21.4.4)$$

тогда закон полного тока можно записать в виде

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - J\right) dl = I_{макро} \qquad (21.4.5)$$

Вектор

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathbf{J}} \qquad (21.4.6)$$

называется ***напряженностью магнитного поля***.

Таким образом, закон полного тока для магнитного поля в веществе утверждает, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура L равна алгебраической сумме макротоков сквозь поверхность натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{\mathbf{H}} dl = I_{макро} \qquad (21.4.7)$$

Этот закон полного тока в интегральной форме. В дифференциальной форме его можно записать:

$$rot\, \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}_{макро} \qquad (21.4.8)$$

Намагниченность изотропной среды с напряженностью связаны соотношением:

$$\vec{\mathbf{J}} = \chi \vec{\mathbf{H}} \qquad (21.4.9)$$

13.5. Ферромагнетики

Ферромагнетики *это вещества, обладающие самопроизвольной намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий – магнитного поля, деформации, температуры.*

Ферромагнетики, в отличии от слабо магнитных диа- и парамагнетиков, являются сильно магнитными веществами: внутреннее магнитное поле в них может в сотни раз превосходить внешнее поле.

Ферромагнетизм наблюдается у кристаллов переходных металлов – железа, кобальта, никеля, у некоторых редкоземельных металлов и сплавов.

Основные отличия магнитных свойств ферромагнетиков.

1)Нелинейная зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля H (рис. 21.4)

Как видно из (рис. 21.4), при $H > H_S$ наблюдается магнитное насыщение.

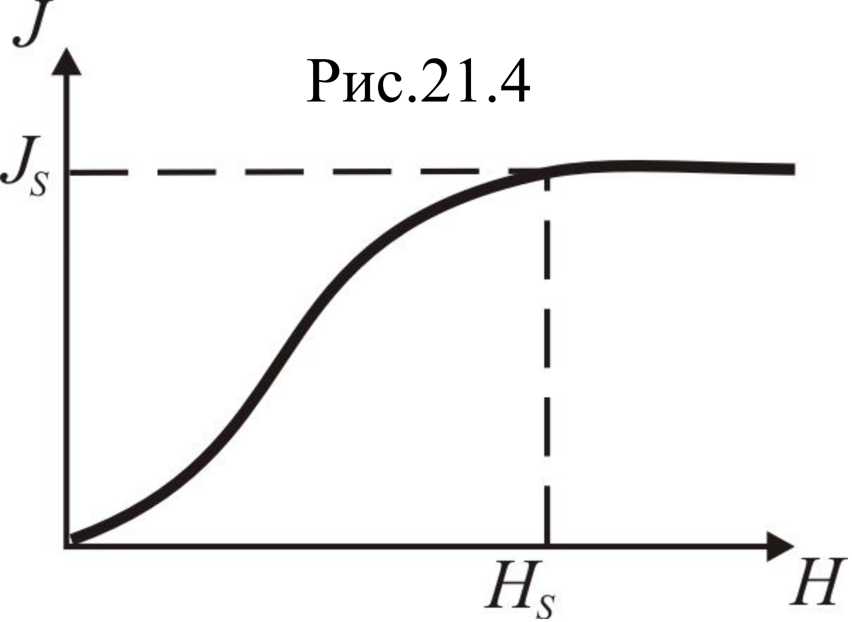


Рис.21.4

2)При $H < H_S$ зависимость магнитной индукции B от H нелинейная, а при $H > H_S$ – линейна (рис. 21.5)

3)Зависимость относительной магнитной проницаемости от H имеет сложный характер (Рис. 21.6), причем максимальные значения μ очень велики ($10^3 \div 10^6$).

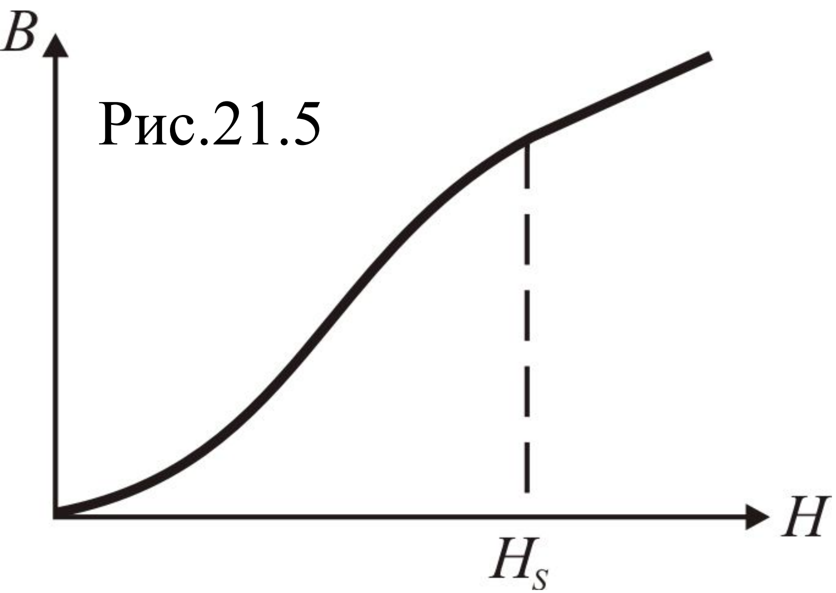


Рис.21.5

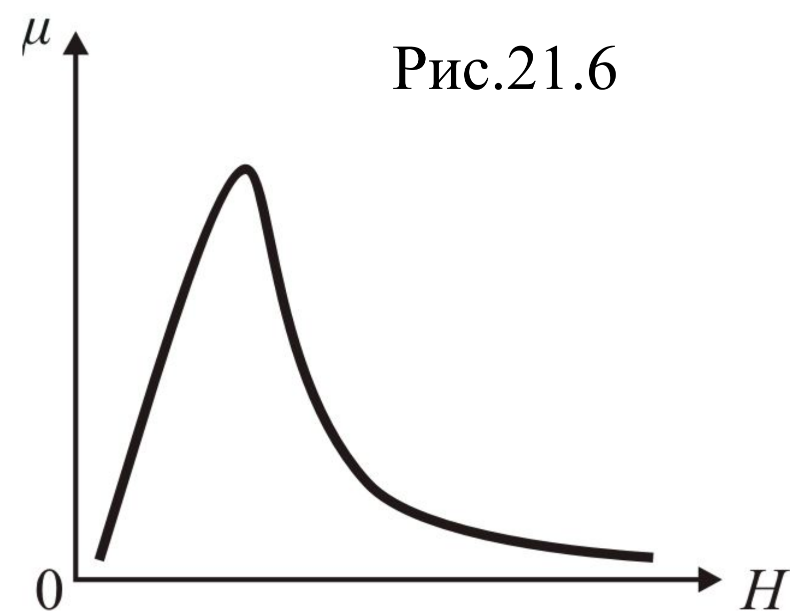


Рис.21.6

4)У каждого ферромагнетика имеется такая температура называемая ***точкой Кюри***, выше которой это вещество теряет свои особые магнитные свойства.

5)Существование *магнитного гистерезиса*.

На (рис. 21.7) показана петля гистерезиса – график зависимости намагниченности вещества от напряженности магнитного поля H.

Намагниченность J_S при $H = H_S$ называется *намагниченность насыщения*.

Намагниченность J_R при $H=0$ называется *остаточной намагниченностью* (что служит для создания постоянных магнитов)

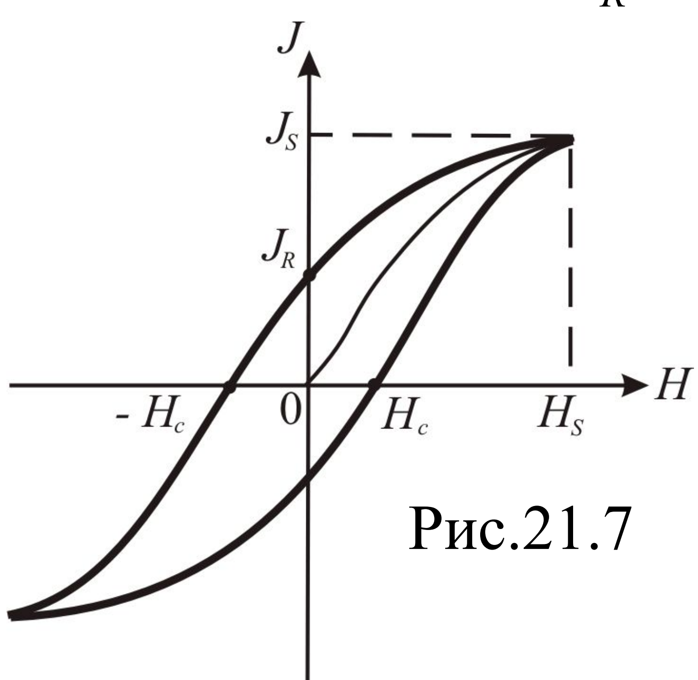
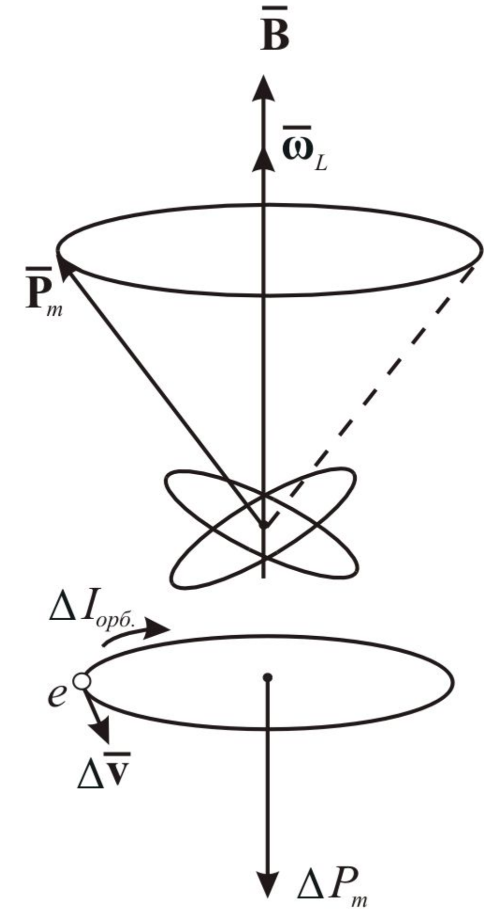


Рис.21.7

Напряженность H_c магнитного поля, полностью размагниченного ферромагнетика, называется ***коэрцитивной силой***. Она характеризует способность ферромагнетика сохранять намагниченное состояние.

Большой коэрцитивной силой (широкой петлей гистерезиса) обладают *магнито-твердые материалы*, используемые для изготовления постоянных магнитов. Малую коэрцитивную силу имеют *магнито-мягкие материалы*, используемые для изготовления сердечников трансформаторов.



Измерение гиромагнитного отношения для ферромагнетиков показали, что элементарными носителями магнетизма в них являются спиновые магнитные моменты электронов.

Вследствие вращения вокруг ядра электрон оказывается подобным волчку. Это обстоятельство лежит в основе так называемых гиромагнитных или магнитомеханических явлений, заключающихся в том, что намагничение магнетика приводит к его вращению и, наоборот, вращение магнетика вызывает его намагничение. Существование первого явления было доказано экспериментально Эйнштейном и де Хаасом, второго — Барнеттом.

В основе опыта Эйнштейна и де Хааса лежат следующие соображения. Если намагнитить стержень из магнетика, то орбитальные магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, а механические моменты — против поля. В результате суммарный механический момент электронов ΣL_i станет отличным от нуля (первоначально вследствие хаотической ориентации отдельных моментов он был равен нулю). Момент импульса системы стержень + электроны должен остаться без изменений. Поэтому стержень приобретает момент импульса, равный $-\Sigma L_i$, т. е. придет во вращение. Изменение направления намагничения приведет к изменению направления вращения стержня.

Механическую модель этого опыта можно осуществить, поставив человека на вращающийся стул и дав ему в руки вращающееся велосипедное колесо. Поворачивая велосипедное колесо вверх, человек приходит во вращение в сторону, противоположную направлению вращения колеса. Поворачивая колесо вниз, человек приходит во вращение в противоположную сторону.

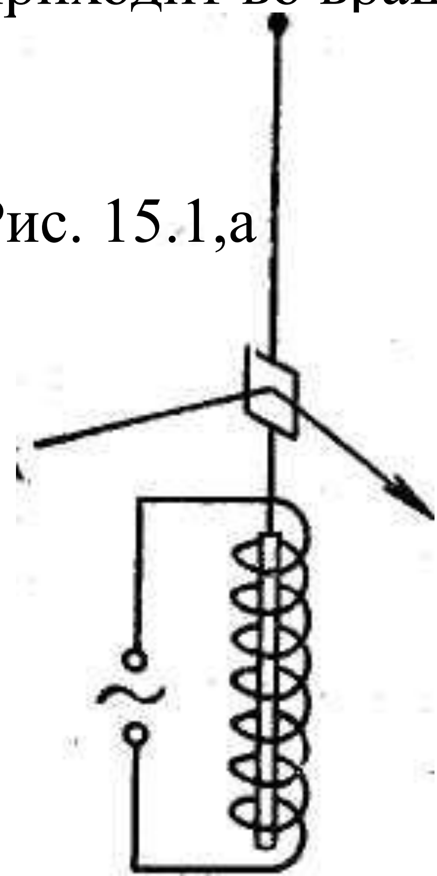


Рис. 15.1,а

Опыт Эйнштейна и де Хааса осуществлялся следующим образом (рис.15.1,а). Тонкий железный стержень подвешивался на упругой закручивающейся нити и помещался внутрь соленоида. Закручивание нити при намагничении стержня постоянным магнитным полем получалось весьма малым. Для усиления эффекта был применен метод резонанса — соленоид питался переменным током, частота которого подбиралась равной собственной частоте механических колебаний системы.

При этих условиях амплитуда колебаний достигала значений, которые можно было измерить, наблюдая смещения светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити. Из данных опыта было вычислено гиромагнитное отношение, которое получилось равным $-e/m$. Таким образом, знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона. Однако полученный результат превысил ожидаемое значение гиромагнитного отношения (15.1.3) в два раза.

Чтобы понять опыт Барнетта, вспомним, что при попытках вовлечь гироскоп во вращение вокруг некоторого направления ось гироскопа поворачивается так, чтобы направления собственного и принудительного вращений гироскопа совпали. Если установить гироскоп, закрепленный в карданном подвесе, на диск центробежной машины и привести ее во вращение, то ось гироскопа установится по вертикали, причем так, что направление вращения гироскопа совпадет с направлением вращения диска. При изменении направления вращения центробежной машины ось гироскопа поворачивается на 180°, т. е. так, чтобы направления обоих вращений снова совпали.

Барнетт приводил железный стержень в очень быстрое вращение вокруг его оси и измерял возникающее при этом намагничение. Из результатов этого опыта Барнетт также получил для гиромагнитного отношения величину, в два раза превышающую значение (15.1.3).

В дальнейшем выяснилось, что кроме орбитальных моментов (15.1.1) и (15.1.2) электрон обладает собственным механическим L_s и магнитным p_{ms} моментами, для которых гиромагнитное отношение равно

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m},$$

т. е. совпадает со значением, полученным в опытах Эйнштейна и де Хааса и Барнетта. Отсюда следует, что магнитные свойства железа обусловлены не орбитальным, а собственным магнитным моментом электронов. Существование собственных моментов электрона первоначально пытались объяснить, рассматривая электрон как заряженный шарик, вращающийся вокруг своей оси. В соответствии с этим собственный механический момент электрона получил название спин (от английского to spin — вращаться). Однако вскоре обнаружилось, что такое представление приводит к ряду противоречий, и от гипотезы о «вращающемся» электроне пришлось отказаться. В настоящее время принимается, что собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд,

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы.

Спин элементарных частиц оказывается целым или полуцелым кратным величины, которая равна постоянной Планка h, деленной на 2π:

$$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c$$

В частности, для электрона $L_s = \frac{1}{2}\hbar$, , в связи с чем говорят, что спин электрона равен ½. Таким образом, $\hbar$ представляет собой как бы естественную единицу момента импульса, подобно тому как элементарный заряд *e* является естественной единицей заряда.

Спину электрона L_{eS} соответствует *спиновый магнитный момент* электрона P_{mS}, направленный в противоположную сторону:

$$\vec{\mathbf{P}}_{mS} = \gamma_S \vec{\mathbf{L}}_{eS} \qquad (15.1.5)$$

Величину γ_S называют *гиромагнитным отношением спиновых моментов*

$$\gamma_S = -\frac{e}{m} \qquad (15.1.6)$$

Проекция спинового магнитного момента электрона на направление вектора индукции магнитного поля может принимать только одно из следующих двух значений

$$P_{mSB} = \pm\frac{e\hbar}{2m} = \pm\mu_Б \qquad (15.1.7)$$

где $\mu_Б$ – *магнетон Бора*. *Орбитальным магнитным моментом P_m атома* называется геометрическая сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома

$$\vec{\mathbf{P}}_m = \sum_{i=1}^{Z} \vec{\mathbf{P}}_{mi}; \qquad (15.1.8)$$

где Z – число всех электронов в атоме – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева.

Орбитальным моментом импульса L атома называется геометрическая сумма моментов импульса всех электронов атома:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{Z} \vec{\mathbf{L}}_{ei} \qquad (15.1.9)$$

Более подробно вышеназванные характеристики мы обсудим в разделе «Атомная и ядерная физика».

Магнитный момент атома слагается из орбитальных и собственных моментов входящих в его состав электронов, а также из магнитного момента ядра (который обусловлен магнитными моментами входящих в состав ядра элементарных частиц — протонов и нейтронов). Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов, поэтому при рассмотрении многих вопросов им можно пренебречь и считать, что магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Магнитный момент молекулы также можно считать равным сумме магнитных моментов входящих в ее состав электронов.

*Сегодня: **

Лекция

Тема: УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Содержание лекции:

1. Введение

2. Уравнения Максвелла в интегральной – дифференциальной формах

1. Введение

Английский физик Дж. Максвелл обобщил эмпирические закономерности, установленные Ампером, Кулоном, Эрстедом, Фарадеем в 60-х гг. XIX в., и сформулировал фундаментальные уравнения классической макроскопической электродинамики.

Эти уравнения описывают электромагнитные явления в любой среде и в вакууме.

Особенно велико было влияние на Дж. Максвелла работ М. Фарадея.

Максвелл отмечал, что установленные им законы являются «математическим выражением той идеи, которая лежала в основе хода мыслей Фарадея в его экспериментальных исследованиях».

Уравнения Максвелла для электромагнитных явлений аналогичны по своей значимости законам Ньютона в классической динамике.

Уравнения Максвелла связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, с его источниками – распределенными в пространстве электрическими зарядами и токами.

В вакууме электромагнитное поле характеризуется напряженностью электрического поля **E** и магнитной индукцией **B** – векторными величинами, зависящими от пространственных координат **r** и времени *t*.

Эти величины определяют силы, действующие на заряды и токи, распределение которых задается плотностью заряда ρ и плотностью электрического тока **j** – плотность сил Лоренца и плотность сил Ампера:

$$\mathbf{f} = \frac{d\,\mathbf{F}}{dV} = \rho\,\mathbf{E} + \rho\left[\mathbf{v},\mathbf{B}\right],$$

$$\mathbf{f} = \frac{d\,\mathbf{F}}{dV} = \left[\mathbf{j},\mathbf{B}\right].$$

f – силы, действующие на элемент объема dV, в котором локализовано поле **E** и (или) **B**.

Для описания электромагнитных процессов в среде кроме вектора напряженности электрического поля **E** и вектора магнитной индукции **B** вводятся вспомогательные векторы.

Эти векторы зависят от состояния и свойств среды, – электрическая индукция **D** и напряженность магнитного поля **H**.

Уравнения Максвелла определяют основные характеристики электромагнитного поля (**E**,**B**,**D**,**H**) как функции координат и времени **r**, *t*, если известны распределения зарядов ρ и токов **j** в пространстве и их изменение во времени.

2. Уравнения Максвелла в интегральной – дифференциальной формах

Уравнения Максвелла могут быть записаны в интегральной и дифференциальной формах и определяют векторы (**E**,**B**,**D**,**H**) как функции источников поля – зарядов и токов.

Интегральные величины зависят от распределения характеристик поля – циркуляции векторов **E** и **H** вдоль произвольных замкнутых контуров и от потоков векторов **D** и **B** через произвольные замкнутые поверхности.

Интегральная форма записи ближе к идее дальнодействия – мгновенное взаимодействие, осуществляющееся через пустое пространство.

Эти две формы записи уравнений Максвелла хотя психологически и философски совершенно противоположны, но математически полностью эквивалентны.

Для доказательства этого необходимо уравнение Максвелла в интегральной форме записать для бесконечно малых произвольных контуров и поверхностей, а затем воспользоваться теоремами Стокса и Остроградского для перехода от объемных интегралов к поверхностным и от контурных к поверхностным.

В результате из интегральной формы записи уравнений Максвелла перейдем к дифференциальной.

Полная система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{H}, d\,\mathbf{l}) = \int_{(S)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\,\mathbf{S} \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_{\Gamma} (\mathbf{E}, d\,\mathbf{l}) = -\int_{(S)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\,\mathbf{S} \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad \oint_{(S)} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \int_V \rho\, dV \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \oint_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = 0 \quad (4)$$

Первое уравнение Максвелла является обобщением на случай переменных полей закона Био – Савара, описывающего возбуждения магнитного поля электрическими токами.

Максвелл обосновал гипотезу о возможности возбуждения магнитного поля не только токами **j**, текущими в проводниках, но и переменными электрическими полями в диэлектриках и вакууме.

Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа Максвеллом током смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Полный ток, возбуждающий магнитное поле, равен сумме токов проводимости и смещения.

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме говорит, что циркуляция вектора **H** по произвольному замкнутому контуру Г равна полному току, проходящему через произвольную поверхность S, ограниченную контуром Г.

Второе уравнение Максвелла служит математической формулировкой закона электромагнитной индукции Фарадея: циркуляция вектора напряженности электрического поля **E** по произвольному замкнутому контуру Г равна скорости изменения потока вектора магнитной индукции **B** через произвольную поверхность *S*, ограниченную контуром Г

Третье уравнение Максвелла, обычно называемое теоремой Гаусса и служит обобщением закона Кулона, описывающего взаимодействие неподвижных зарядов: поток вектора электрической индукции **D** через произвольную поверхность *S* равен электрическому заряду, находящемуся в объеме *V*, ограниченном поверхностью *S*.

Четвертое уравнение Максвелла говорит о том экспериментальном факте, что свободные магнитные заряды отсутствуют – поток вектора магнитной индукции **B** через произвольную замкнутую поверхность *S* равен нулю.

Этим объясняется и асимметрия уравнений Максвелла – отсутствие магнитных токов во втором уравнении и магнитных зарядов в четвертом.

Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной формах полностью эквивалентен.

Записанные четыре уравнения Максвелла не образуют замкнутой системы, позволяющей рассчитать электромагнитные процессы при наличии материальной среды, поскольку число неизвестных в этих уравнениях больше числа уравнений.

Эти уравнения следует дополнить соотношениями, связывающими векторы **D**, **E**, **H**, **B** и **j**. Связь между ними определяется свойствами среды и ее состояниями

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}),\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}),\ \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Эти уравнения называются уравнениями состояния или материальными уравнениями. Вид этих уравнений определяется электрическими и магнитными свойствами среды.

В вакууме

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}),$$

причем ток проводимости может присутствовать и в вакууме, например в виде тока термоэлектронной эмиссии.

Уравнения поля и уравнения состояния образуют полную систему уравнений.

Для большинства изотропных сред, вплоть до сильных полей, уравнения состояния имеют простую линейную форму

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{стр}}.$$

Здесь ε – диэлектрическая а μ – магнитная проницаемость среды σ – удельная проводимость ; $\mathbf{j}_{стр}$ – плотность сторонних токов – токов, поддерживаемых любыми силами, кроме консервативных сил электрического поля, в частности, диффузией, магнитным полем.

Величины ε, μ, σ могут быть найдены экспериментально либо рассчитаны теоретически.

В общем случае уравнения состояния очень сложны и нелинейны.

Уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и при наличии поверхностей разрыва – границ сред, на которых свойства среды и полевые характеристики изменяются скачкообразно.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме следует дополнить соответствующими граничными условиями, позволяющими связать величины векторов (**E**,**B**,**D**,**H**) на границах раздела.

Взяв бесконечно малую цилиндрическую поверхность на границе раздела двух сред, по теореме Гаусса получаем для векторов электрической и магнитной индукции (рис. 1)

$$(n\mathbf{D})_2 - (n\mathbf{D})_1 = \sigma_{\text{пов}},$$

$$(n\mathbf{B})_2 - (n\mathbf{B})_1 = 0.$$

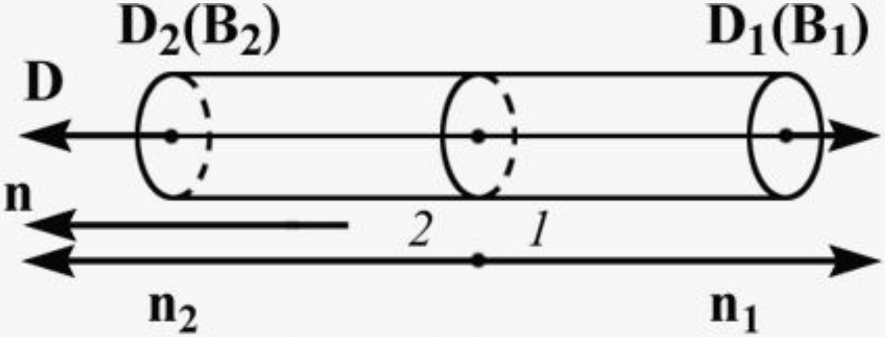
Соответственно по теореме о циркуляции для векторов **H** и **E** получаем

$$[\mathbf{n},\mathbf{E}]_2 - [\mathbf{n},\mathbf{E}]_1 = 0,$$

$$[\mathbf{n},\mathbf{H}]_2 - [\mathbf{n},\mathbf{H}]_1 = \mathbf{i}.$$

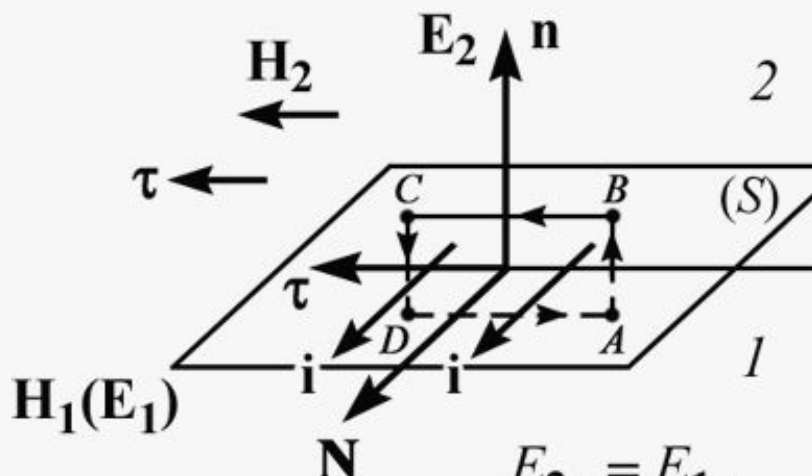
Здесь σ, **i** – поверхностная плотность заряда и тока; **n** – вектор нормали к поверхности в направлении от первой сферы ко второй, индексы относятся к разным сторонам границ раздела.

Рис. 1. К выводу граничных условий для уравнений Максвелла в дифференциальной форме: σ − поверхностная плотность свободных электрических зарядов на границе раздела (*а*); **i** – поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой поверхности *S* (*б*).
D_{2n}, D_{1n}, B_{2n}, B_{1n} – проекции векторов $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_1$ на нормаль **n**.
H_{2t}, E_{2t}, H_{1t}, E_{1t} – тангенциальные составляющие векторов **H**, **E** вдоль нормали к контуру
N = = [**n**,**τ**]



$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$
$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

а



б

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}$$
$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N$$

В частности, когда на границах раздела нет поверхностных токов и зарядов $i = 0$, $\sigma = 0$, то можем записать

$$D_{1n} = D_{2n}, \qquad B_{1n} = B_{2n},$$
$$E_{1t} = E_{2t}, \qquad H_{1t} = H_{2t}$$

– на границах раздела не изменяются

нормальные компоненты векторов индукции и

тангенциальные – напряженностей.

В случае стационарных полей $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$

уравнения Максвелла распадаются на две группы

независимых уравнений.

Электростатики:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$$

Магнитостатики:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

В этом случае электрическое и магнитное поля независимы друг от друга.

Источниками электрических полей являются заряды, магнитных − токи проводимости.

Уравнения Максвелла для поля линейны.

Уравнения состояния, в общем случае, нелинейны.

Нелинейность уравнений состояний обычно проявляется в сильных полях.

В вакууме и линейных средах, удовлетворяющих условиям $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, уравнения Максвелла линейны, и поэтому для них справедлив принцип суперпозиции – при наложении полей они не оказывают влияние друг на друга.

Поэтому поле, созданное совокупностью электрических зарядов и токов, равно сумме полей, создаваемых этими зарядами и токами по отдельности.

Как мы увидим в дальнейшем, уравнения Максвелла приводят к фундаментальному выводу о конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий.

Это означает, что при изменении плотности заряда или тока источников электромагнитного поля эти изменения на расстоянии R от источников скажутся лишь спустя конечное время $t = R/v$, где v – скорость распространения электромагнитных полей.

Вследствие конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий возможно существование электромагнитных волн, частным случаем которых являются световые волны.

Электромагнитные явления, как и все другие физические явления, должны удовлетворять принципу относительности.

В соответствии с этим принципом уравнения Максвелла не должны менять своей формы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Выполнение принципа относительности для электромагнитных процессов оказалось несовместимым с классическими представлениями о пространстве и времени как о независимых понятиях, где реализуется бесконечная скорость передачи взаимодействия.

Пересмотр этих представлений привел А. Эйнштейна к созданию специальной теории относительности.

Релятивистки инвариантная форма уравнений Максвелла подчеркивает тот факт, что электрическое и магнитное поля образуют единое электромагнитное поле.

Уравнения Максвелла описывают огромную область явлений.

Они лежат в основе электротехники и радиотехники и играют важнейшую роль в раскрытии таких актуальных направлений современной физики, как физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза, магнитная термодинамика, нелинейная оптика, конструирование ускорителей заряженных частиц, астрофизика и т.п.

Уравнения Максвелла неприменимы лишь при очень больших частотах электромагнитных волн, когда становятся существенными квантовые эффекты, т.е. когда энергия отдельных квантов электромагнитного поля – фотонов – велика и в процессах участвует сравнительно небольшое число фотонов.