

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ: ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ

Комбинаторика – раздел математики, который занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать наилучшую.

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова «combinare», что в переводе на русский означает – «сочетать», «соединять». Термин "комбинаторика" был введён знаменитым Готфридом Вильгельмом Лейбницем, - всемирно известным немецким учёным.

Комбинаторные задачи делятся на несколько групп:



Задачи на
перестановки

Задачи на
размещение

Задачи на
сочетание

ЗАДАЧИ НА ПЕРЕСТАНОВКИ



Сколькими способами можно расставить 3 различные книги на книжной полке?

Это задача на **перестановки**

Запись $n!$ читается так: «эн факториал»

Факториал - это произведение всех натуральных чисел от 1 до n

Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Факториалы растут удивительно быстро:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n!	1	4	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Задача. Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?



$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

**Перестановкой из n
элементов
называется каждое
расположение этих
элементов в
определённом
порядке.**

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

$P_n = n!$

Задача.

Квартет

Проказница Мартышка

Осёл,

Козёл,

Да косолапый Мишка

Затеяли играть квартет

...

Стой, братцы стой! –

Кричит Мартышка, - погодите!

Как музыке идти?

Ведь вы не так сидите...

И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.

Вот пуще прежнего пошли у них разборы

И споры,

Кому и как сидеть...



Сколькими способами можно рассадить четырех музыкантов?

$$P = 4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$$

ЗАДАЧИ НА РАЗМЕЩЕНИЯ

Задача: У нас имеется 5 книг, что у нас всего одна полка, и что на ней вмещается лишь 3 книги. Сколькими способами можно расставить на полке 3 книги?



Выбираем одну из 5-ти книг и ставим на первое место на полке. Это мы можем сделать 5-ю способами. Теперь на полке осталось два места и у нас осталось 4 книги. Вторую книгу мы можем выбрать 4-мя способами и поставить рядом с одной из 5-ти возможных первых. Таких пар может быть $5 \cdot 4$. Осталось 3 книги и одно место. Одну книгу из 3-ёх можно выбрать 3-мя способами и поставить рядом с одной из возможных $5 \cdot 4$ пар. Получится $5 \cdot 4 \cdot 3$ разнообразных троек. Значит всего способов разместить 3 книги из 5-ти $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Это задача на размещения.

Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Задача.

Учащиеся второго класса изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 4 различных предмета?



$$A^4_9 = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

Решите

самостоятельно:

В классе 27 учащихся.

Нужно отправить одного

учащегося за мелом,

второго дежурить в

столовую, а третьего

вызвать к доске. Сколькими

способами можно это

сделать?

ЗАДАЧИ НА СОЧЕТАНИЯ:

Задача. Сколькими способами можно расставить 3 тома на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии внешне неразличимых 5 книг?



Книги внешне неразличимы. Но они различаются, и существенно! Эти книги разные по содержанию. Возникает ситуация, когда важен состав элементов выборки, но несущественен порядок их расположения.

123 124 125 134 135 145
234 235 245
345

ответ: 10

Это задача на **сочетания**

Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Задача.

В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$$



Решите самостоятельно:

В классе 7 учащихся успешно занимаются по математике. Сколькими способами можно выбрать двоих из них, чтобы направить для участия в математической олимпиаде?

**Особая примета
комбинаторных задач –
вопрос, который можно
сформулировать так, чтобы
он начинался словами
«Сколькими способами...»
или «Сколько
вариантов...»**

Составим таблицу:

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n клеток	n элементов k клеток	n элементов k клеток
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$P_n = n!$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Решите самостоятельно задачи:

1. В коробке находится 10 белых и 6 черных шаров. Сколькими способами из коробки можно вынуть один шар любого цвета?
2. Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается тремя цифрами 5, 7, 8 но забыла, в каком порядке эти цифры расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.
3. В магазине “Филателия” продается 8 разных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

СПАСИБО ЗА УРОК!