# Моделирование систем

**Лекция 4:**

**Детерминированные нелинейные модели с непрерывными переменными**

# содержание

1. Текущий контроль знаний
2. Технологии исследования нелинейных математических моделей:

- аналитическое исследование методом множителей Лагранжа;
- численное исследование.

# Текущий контроль знаний

- Решить графически задачу(k-номер студента в списке):

$$\begin{cases} 2kx_1 + (4k-1)x_2 \to \max; \\ 5x_1 + kx_2 \le 6; \\ 3kx_1 + 11x_2 \le 15; \\ \forall i : x_i \ge 0. \end{cases}$$

- Перейти к двойственной задаче и решить ее графически:

$$\begin{cases} (7+k)x_1 + 4kx_2 - (k-5)x_3 \to \max; \\ 9kx_1 - (k+5)x_2 + (k-2)x_3 = 15k; \\ 3kx_1 + (k+7)x_2 + 0x_3 = 5k. \end{cases}$$

# Исследование моделей

Два класса технологий исследования нелинейных моделей с непрерывными переменными:

1. Аналитическое исследование моделей.
2. Численное исследование:

- рандомизированное;
- детерминированное.

# Метод множителей Лагранжа

- Используется для решения однокритериальных задач на условный экстремум с непрерывно меняющимися переменными вида:

$$\begin{cases} f(\vec{x}) \to \min\ (\max); \\ \forall \mathrm{j} : \varphi_j(\vec{\mathrm{x}}) = b_j; \\ \vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots., x_n\}; \\ \forall 1 \le i \le n : a_i \le x_i \le b_i. \end{cases} \qquad (1)$$

# Создание и исследование функции Лагранжа

Идея заключается в замене решения системы (1) поиском экстремума функции Лагранжа L вида:

$$L = f(\vec{x}) - \sum_j \lambda_j (b_j - \varphi_j(\vec{x})). \qquad (2)$$

Экстремум L отвечает решению системы:

$$\begin{cases} \forall i : \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \\ \forall j : \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

# Пример: задача о консервной банке

**Содержательная постановка:** требуется выбрать такое соотношение между высотой и диаметром консервной банки, чтобы ее поверхность  была минимальной при заданном объеме.

**Формальная постановка:**

$$\begin{cases} 2\pi r(h+r) \to \min; \\ \pi r^2 h = V; \\ r \ge 0;\ \ h \ge 0. \end{cases} \qquad (4)$$

# Функция Лагранжа и ее исследование на экстремум

1. Функция Лагранжа:

$$L = 2\pi r(h + r) - \lambda(V - \pi r^2 h). \qquad (5)$$

2. Условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = h + 2r - rh\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = 2r - \lambda r^2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = V - \pi r^2 h = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

3. Результат решения системы (6):

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}; \\ \lambda = \dfrac{2}{r}; \\ h = 2r. \end{cases} \qquad (7)$$

# Исследование экстремума

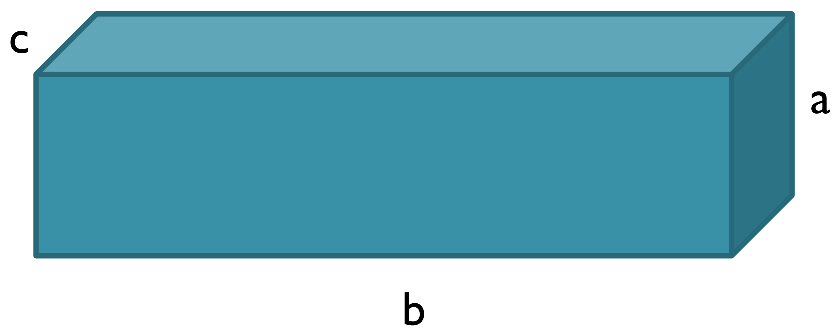
- Пусть новое значение радиуса банки равно r+Ɛ, где Ɛ>0, тогда из системы (4) следует, что площадь банки равна S*:

$$S^* = 2\pi\left[(r+\varepsilon)^2 + \frac{V}{\pi(r+\varepsilon)^2}\right].$$

Так как производная $\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon} > 0,$ то определяемые (7) значения r и h отвечают минимуму S.

# САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Задан параллелепипед, ребра которого равны a, b, c, объем равен V. Требуется определить соотношение между размерами ребер, минимизирующее поверхность параллелепипеда.



# Поиск оптимального решения методом Монте-Карло

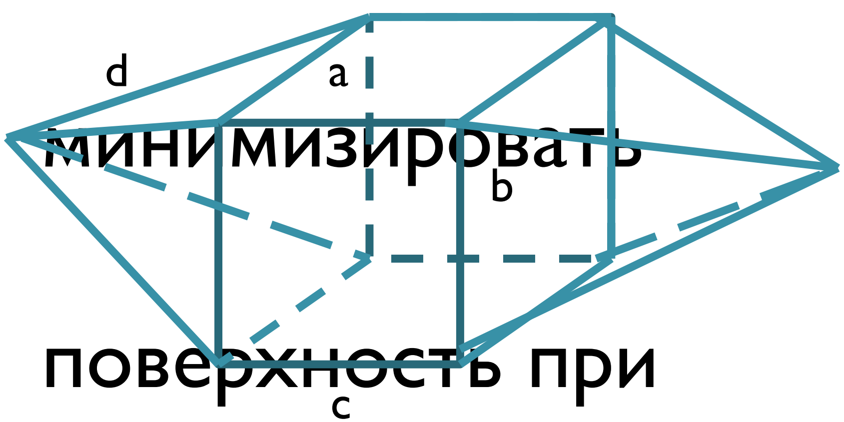
- Допущения:
- 1. Имеется генератор случайных чисел в диапазоне «0 – 1».
- 2. Известны верхняя и нижняя границы, в которых заключена i-я переменная.

# Поиск оптимального решения методом Монте-Карло

- **Алгоритм:**
- 0. R= «плохое значение».
- 1. i = 1.
- 2. Выбирается случайное число α.
- 3. x(i)= a(i) + [b(i)-a(i)]· α.
- 4. Если i=n, то перейти к шагу 6, в противном случае – к шагу 5.
- 5. i = i+1, перейти к шагу 2.
- 6. Проверка ограничений. Если они выполняются, то переход к шагу 7, в противном случае – к шагу 1.
- 7. Вычисляется новое значение целевой функции R1.
- 8. Если R1 «лучше» R, то перейти к шагу 9, в противном случае – к шагу 1.
- 9. R присваивается значение, равное R1.
- 10. Если выполняются условия останова, то перейти к шагу 11, нет – шагу 1.
- 11. Печать R, конец алгоритма.

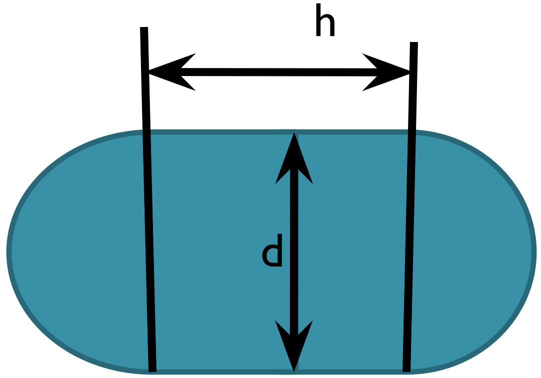
# САМОСТОЯТЕЛЬНО 1

1. Пользуясь описанными выше технологиями, построить модель и определить оптимальные соотношения параметров фигуры, образованной прямоугольным параллелепипедом и двумя пирамидами (см. ниже). Цель: минимизировать поверхность при



# Самостоятельно 2

Пользуясь описанными выше технологиями, построить модель и определить оптимальные соотношения параметров цилиндра, основания которого заменены полушариями:



# САМОСТОЯТЕЛЬНО 3

Транспортное средство проходит расстояние **S** за время **t**, двигаясь с постоянным ускорением **a**. Полагая, что горючее тратится только в процессе ускоренного движения и его затраты пропорциональны произведению **at**, требуется построить математическую модель и определить такие значения **t** и **a**, при которых затраты горючего **Q** минимальны.

# Достоинства и недостатки

1. **Достоинства:**

- Глобально оптимальное решение.
- Ответ получается аналитически, т.е. не требует для определения численных значений больших ресурсов компьютера.

2. **Недостатки:**

- Возможность исследовать модель таким образом зависит от свойств полученной системы уравнений.