

Арксинус. Решение уравнения *$\sin t = a.$*

урок алгебры, 10 класс,
УМК А.Г. Мордкович

Автор: Лазарчук Владимир Николаевич,
учитель математики и физики
МБОУ СОШ № 4
н.п. Енский Ковдорского района Мурманской
области

Цели

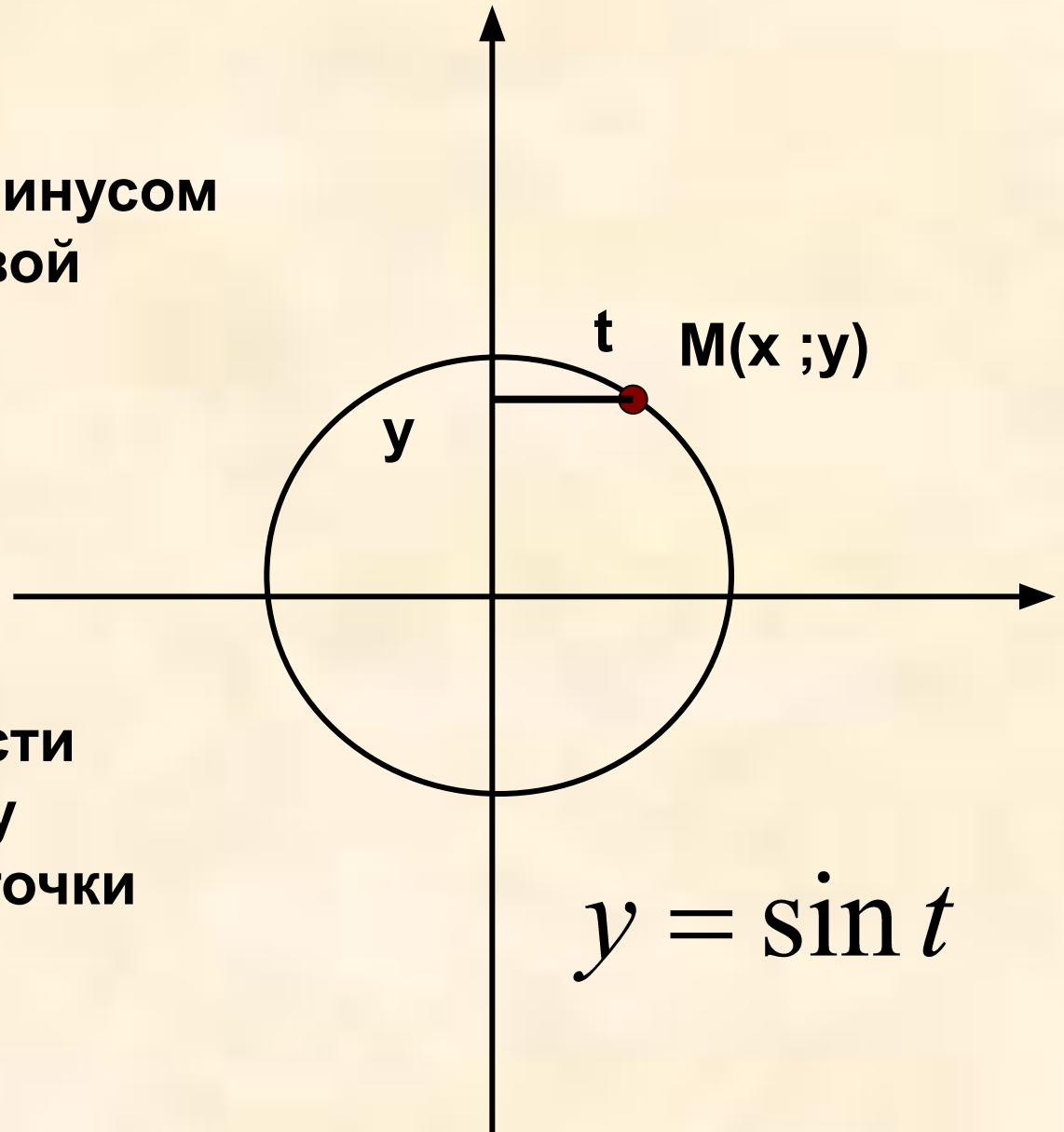
- Изучить определение арксинуса числа.
- Изучить формулы решения простейшего тригонометрического уравнения $\sin t = a$.



Повторим

Что называется синусом числа t на числовой окружности.

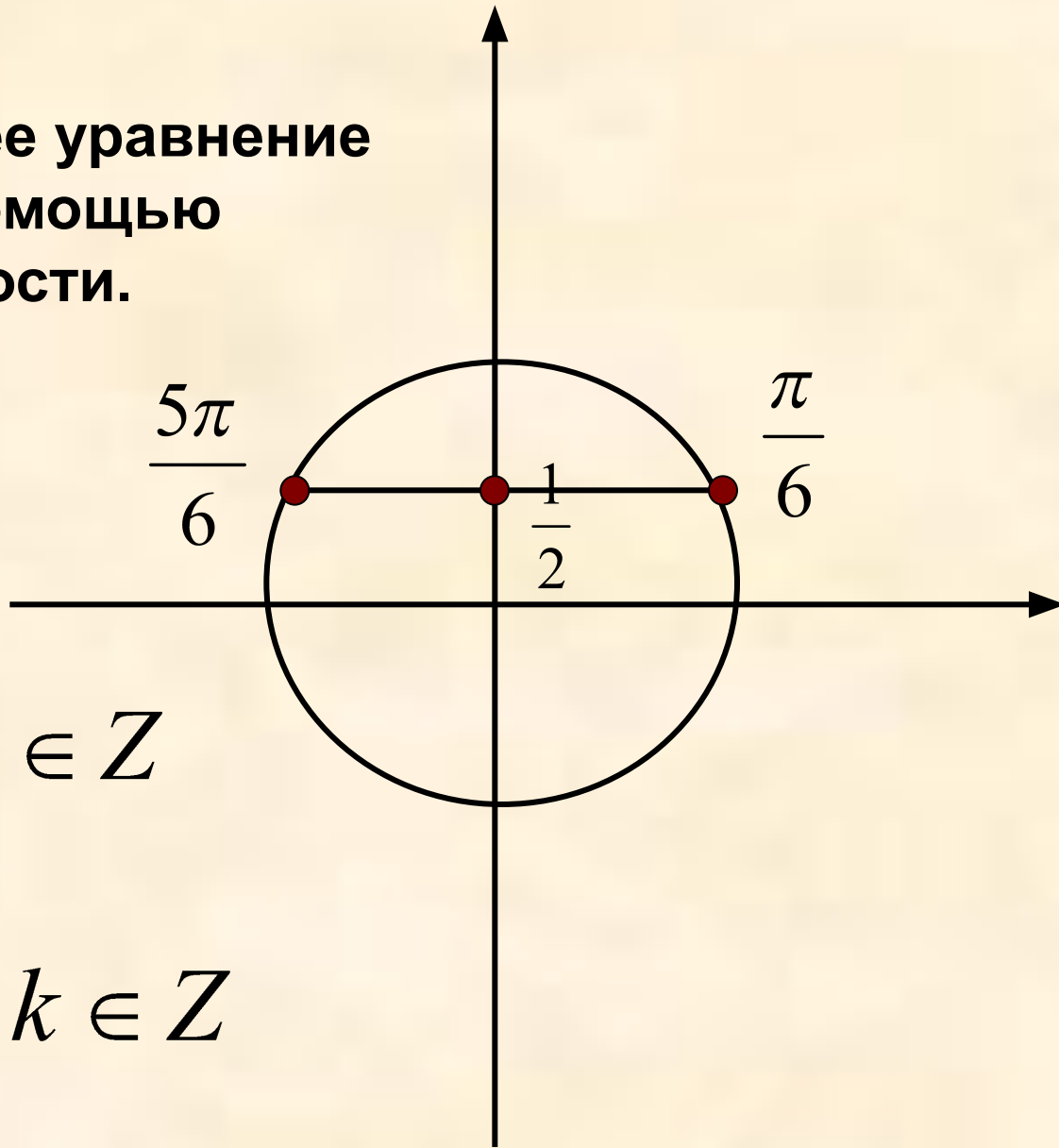
Синусом числа t на числовой окружности называют ординату соответствующей точки окружности



Повторим

Решим простейшее уравнение вида $\sin t = a$ с помощью числовой окружности.

$$\sin t = \frac{1}{2}$$



$$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решим уравнение

$$\sin t = \frac{3}{5}$$

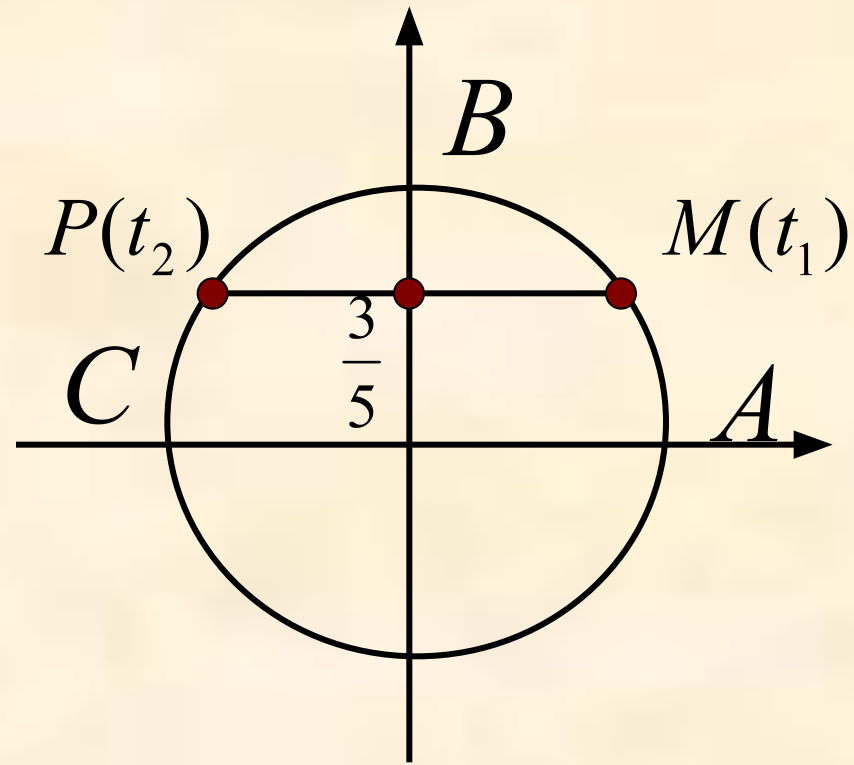
С помощью числовой окружности получим решение.

$$t = t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = t_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

t_1 – длина дуги AM

t_2 – длина дуги AP



Поскольку $AP = AC - PC$,
 $AC = \pi$, а $PC = AM$, получаем,
что $t_2 = \pi - t_1$

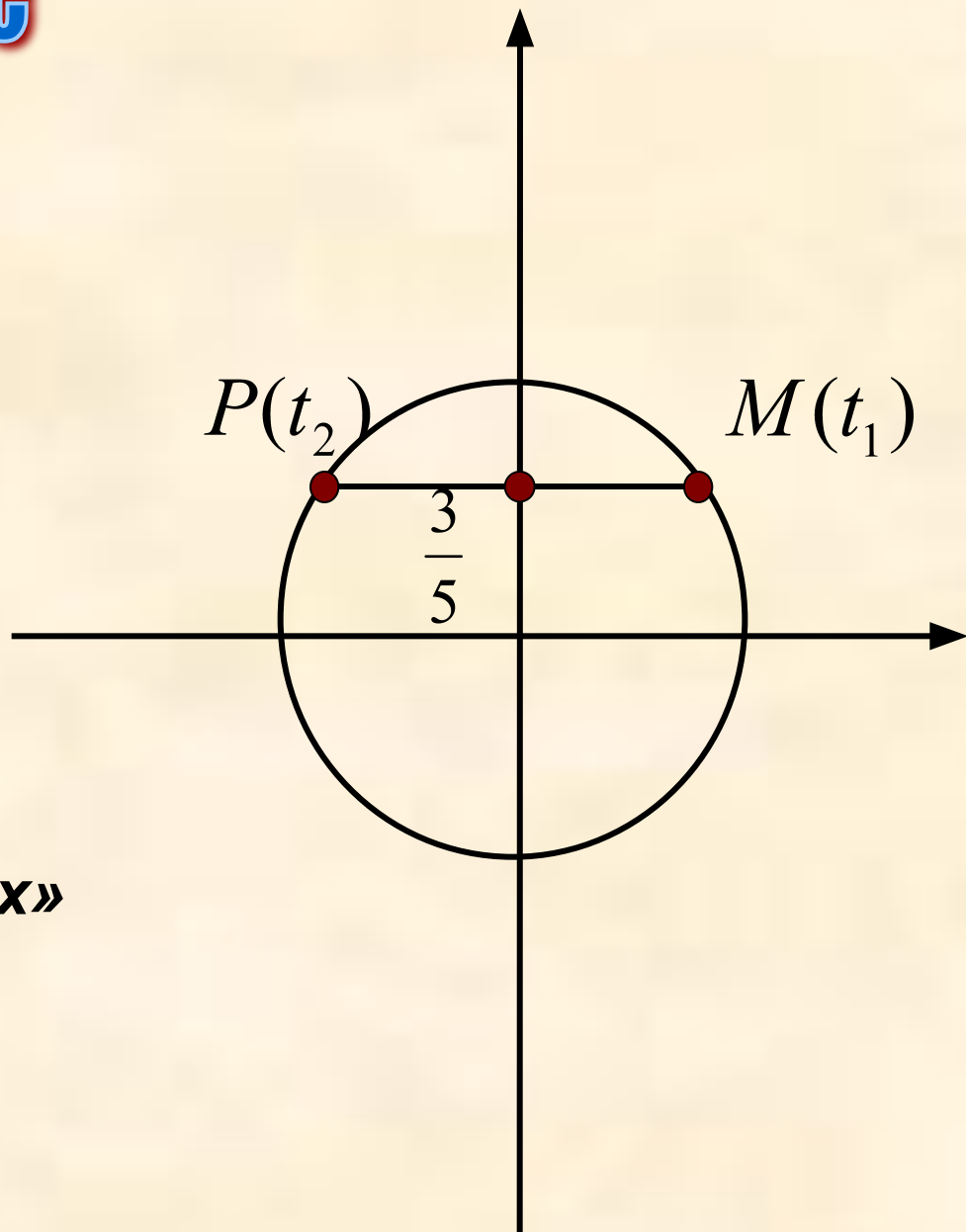
Решим уравнение

? Что это за число t_1 ?

В рассмотрение введён
новый символ

$$\arcsin \frac{3}{5}$$

«арксинус трёх пятых»



С помощью введённого символа можно записать корни

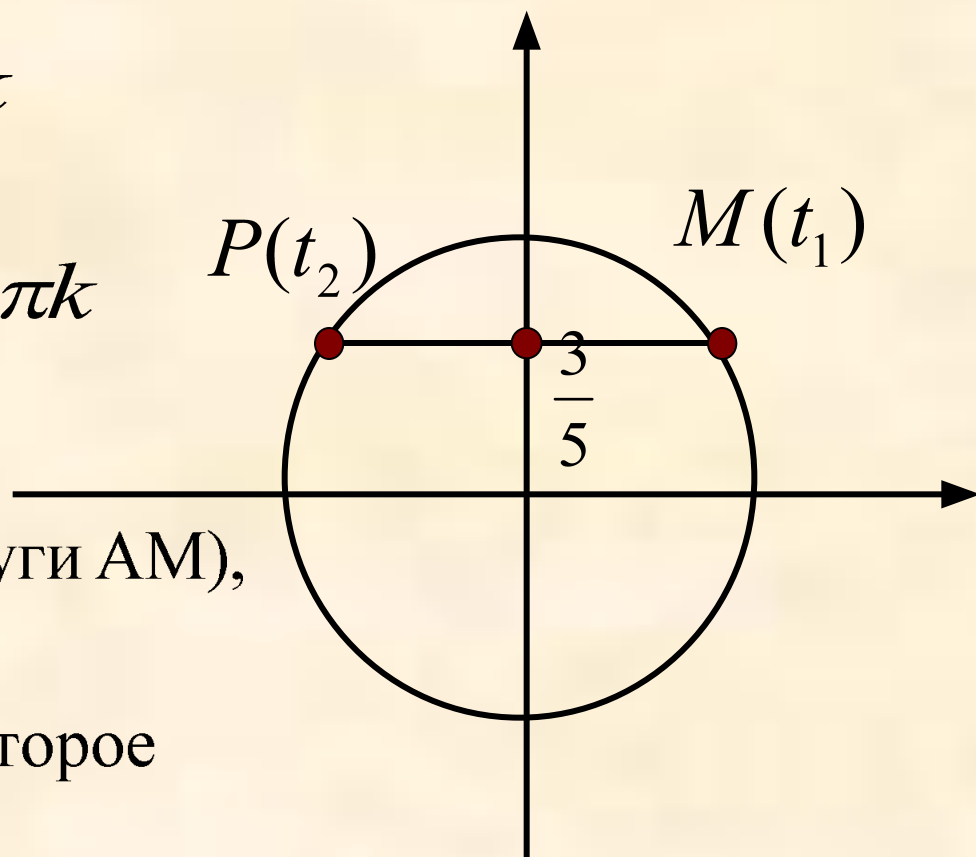
$$t_1 = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$$

$$t_2 = \pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k$$

$\arcsin \frac{3}{5}$ – это число (длина дуги AM),

синус которого равен $\frac{3}{5}$ и которое

принадлежит отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



Решим уравнение

$$\sin t = -\frac{3}{5}$$

С помощью числовой окружности получим решение.

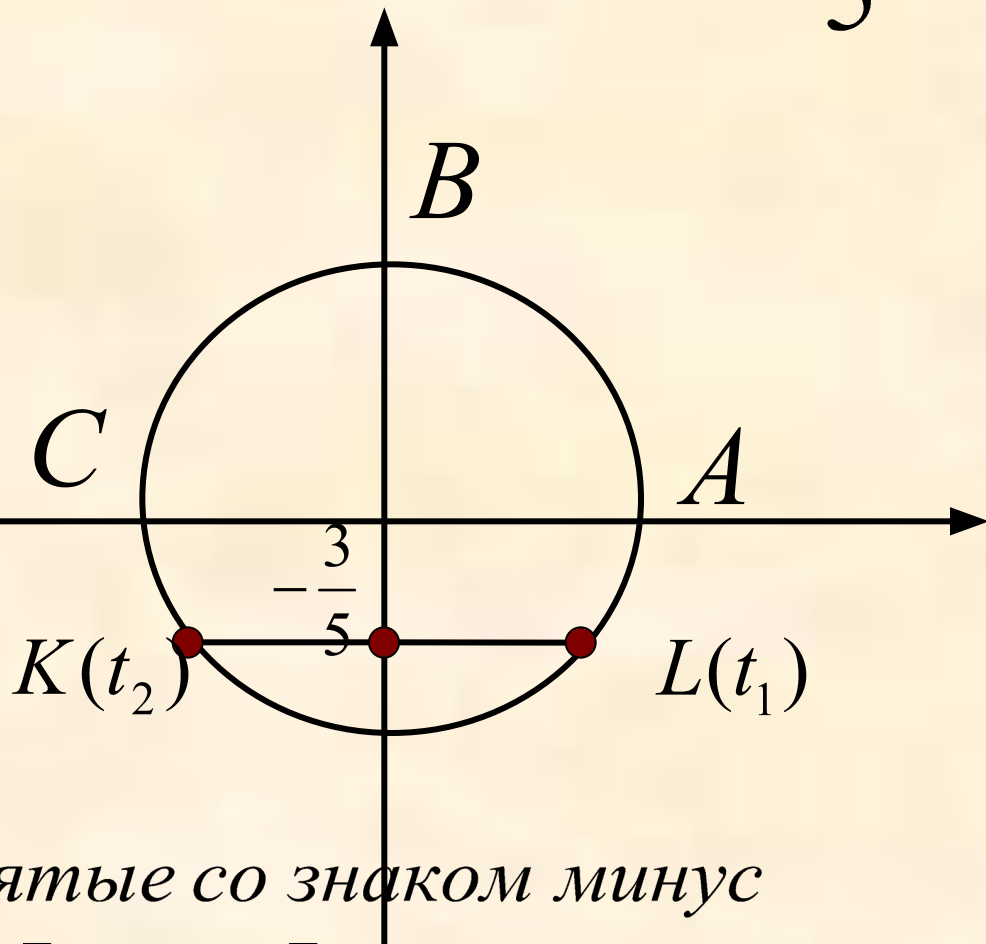
$$t = t_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = t_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

t_1 – длина дуги AL

t_2 – длина дуги AK , взятые со знаком минус

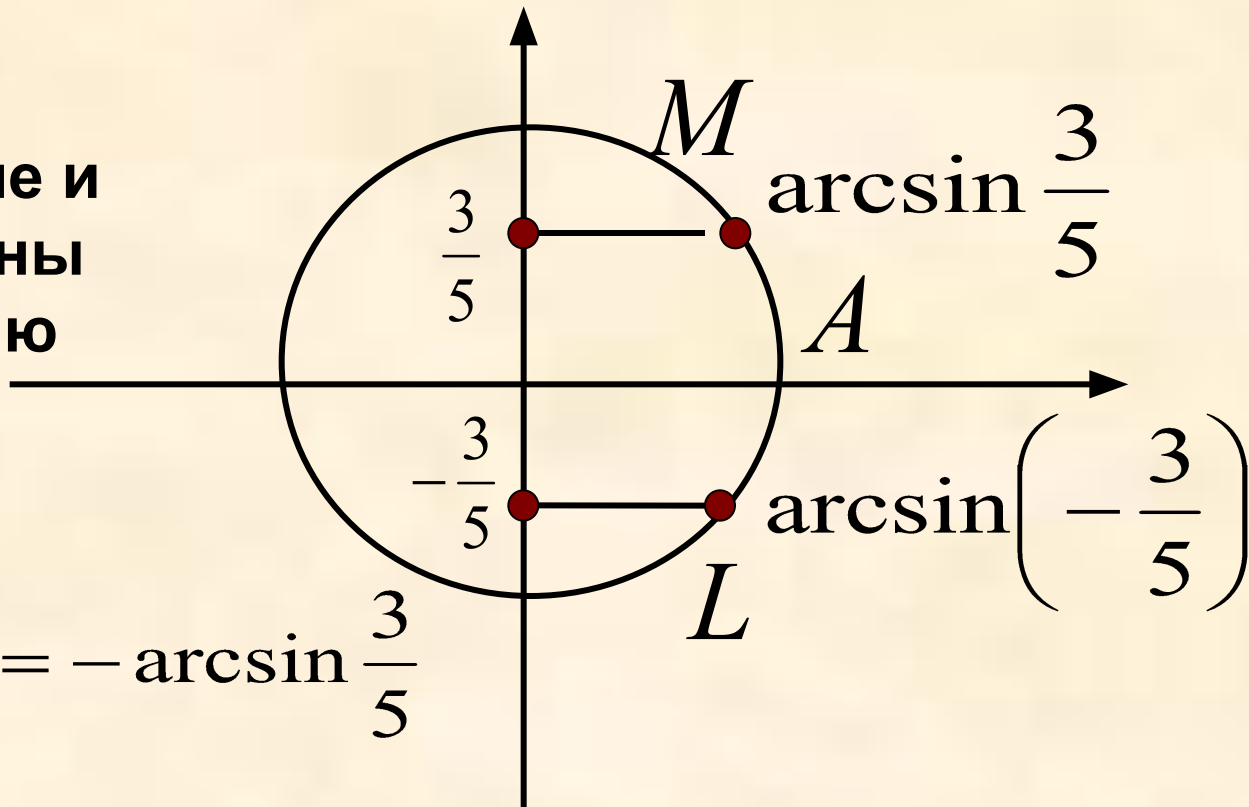
$$t_1 = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



С помощью числовой окружности сравним

$$\arcsin \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \arcsin \left(-\frac{3}{5} \right)$$

Дуги AM и AL
равны по длине и
противоположны
по направлению

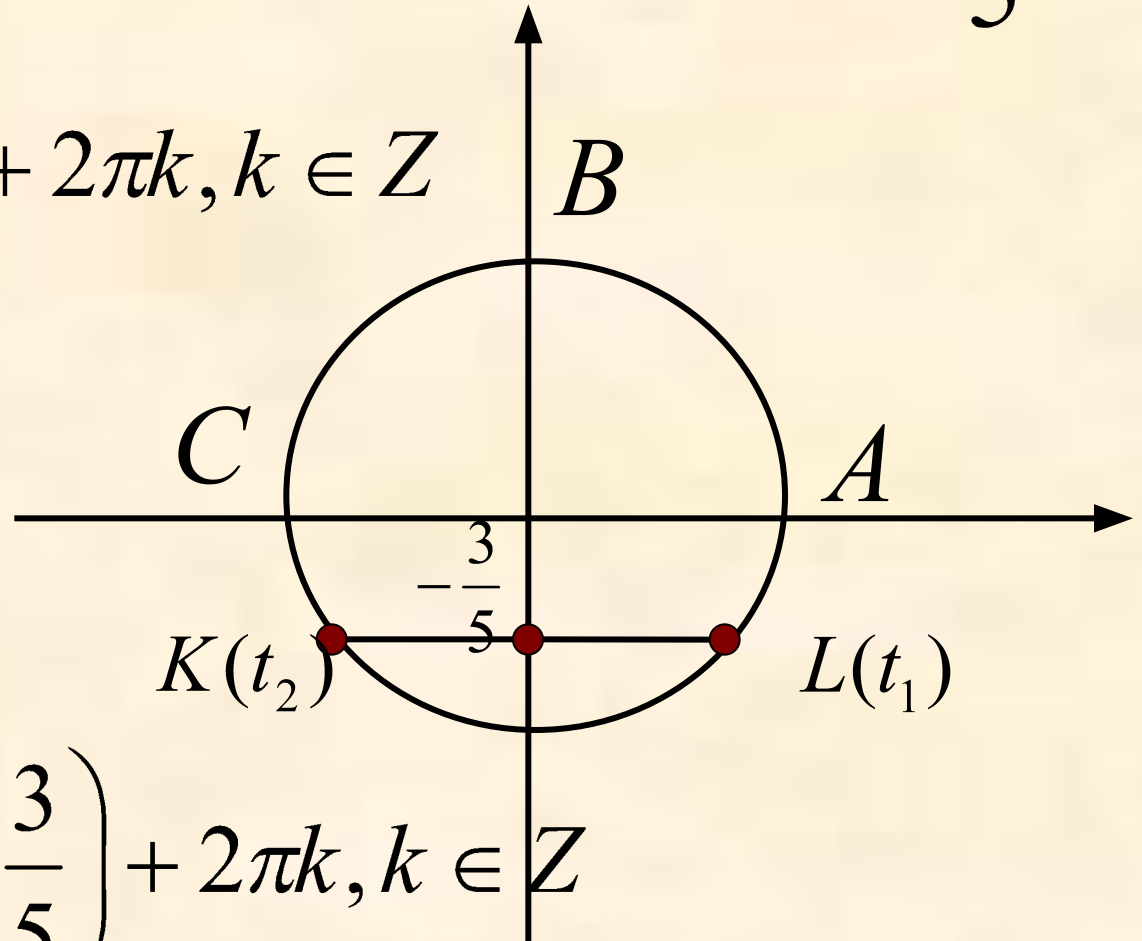


$$\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) = -\arcsin \frac{3}{5}$$

Получим

$$\sin t = -\frac{3}{5}$$

$$t = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$t = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Определение

Если $|a| \leq 1$, то $\arcsin a$ (арксинус a) – это

такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус

которого равен a .

Если $|a| \leq 1$, то

$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

*Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\sin t = a$
имеет две серии решения*

$$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z,$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$$

**Существует три частных случая решения уравнения
 $\sin t = a$**

$$\sin t = 0, \quad t = \pi k;$$

$$\sin t = 1, \quad t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$\sin t = -1, \quad t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Пример 1.

Вычислить:

$$a) \arcsin \frac{1}{2}$$

Пусть $\arcsin \frac{1}{2} = t$. Тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Значит, $t = \frac{\pi}{6}$, поскольку $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$



Пример 1.

Вычислить:

$$б) \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Пусть $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = t$. Тогда $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, $t = -\frac{\pi}{4}$, поскольку $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

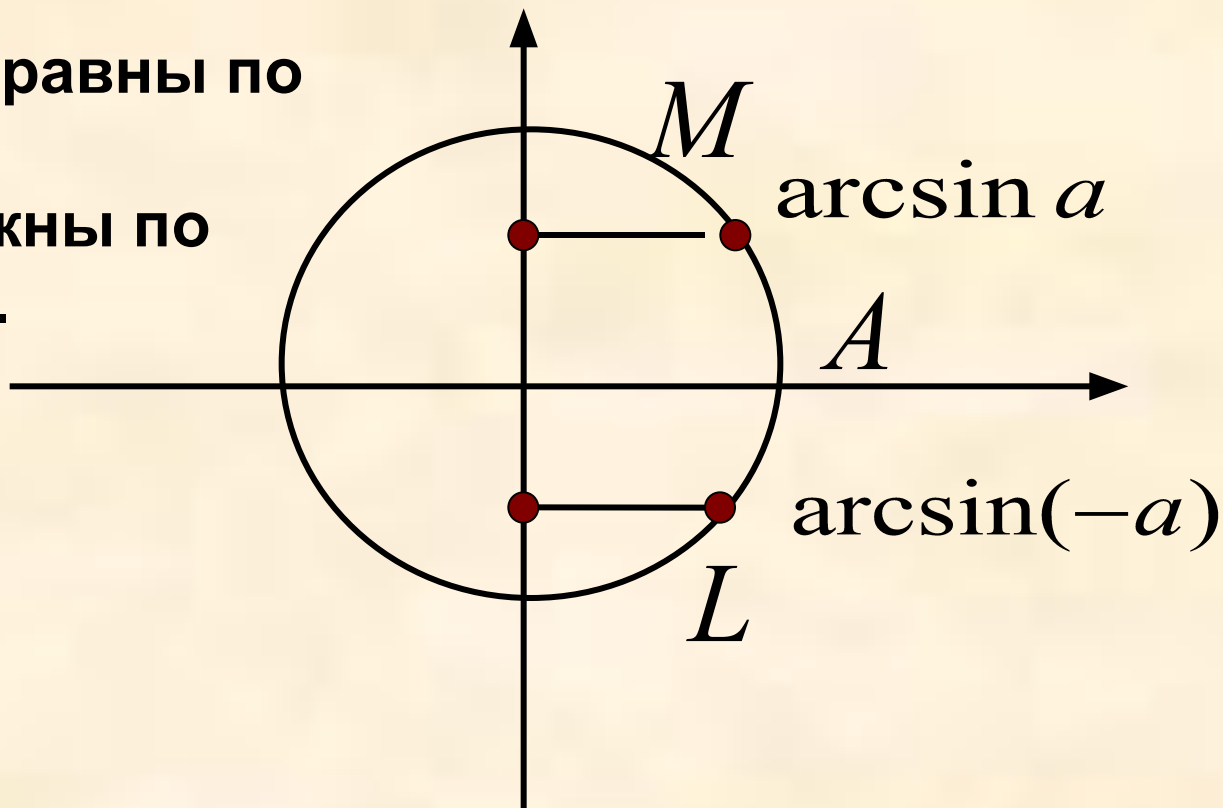
$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$



Для любого $a \in [-1;1]$, справедлива формула

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

Дуги AM и AL равны по модулю и противоположны по направлению.



Пример 2.

Решить уравнение

$$a) \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k.$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Пример 2.

Решить уравнение

$$б) \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$$t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \quad t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

Пример 2.

Решить уравнение

$$в) \sin t = \frac{7}{12}$$

$$t = \arcsin \frac{7}{12} + 2\pi k, \quad t = \pi - \arcsin \frac{7}{12} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$з) \sin t = 1,2$$

Т.к. $1,2 > 1$, то уравнение $\sin t = 1,2$ не имеет корней.

Принята общая формула решения
тригонометрического уравнения $\sin t = a$

$$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$t = \arcsin a + \pi 2k, k \in \mathbb{Z},$$

$$t = -\arcsin a + \pi(2k + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

Пример 3.

Решить неравенство

$$\sin t > 0,6$$

Строим окружность

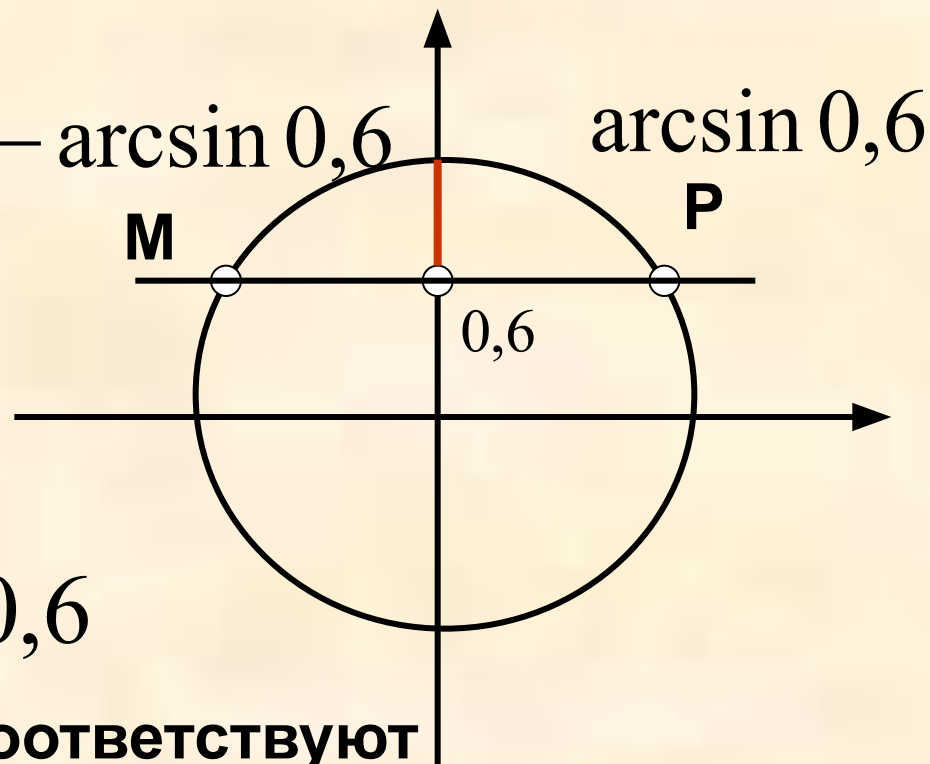
Учитываем, что синус – это ордината точки числовой окружности.

Следовательно $y > 0,6$

Данному неравенству соответствуют точки открытой дуги МР

Получим

$$\arcsin 0,6 + 2\pi k < t < \pi - \arcsin 0,6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Решите из учебника

- № 16.1, 16.3, 16.5, 16.9, 16.11



Задание на дом

- § 16 выучить
- № 16.2, 16.4, 16.6



Список используемых источников

- Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/А.Г.Мордкович. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 399 с. : ил.