
Теория множеств

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Понятие множества

Под ***множеством*** понимается некоторая, вполне определенная совокупность объектов или элементов.

Георг Кант: объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью.

Определение

Если a есть один из объектов множества A , то a есть элемент A , или принадлежит A .

$$a \in A$$

Не принадлежность: $a \notin A$

Определение.

Множество A есть подмножество множества B ($A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B ;

то есть, если $x \in A$, то $x \in B$.

В частности, каждое множество есть подмножество самого себя.

$A \not\subseteq B$, если существует элемент A , не принадлежащий B .

Определение

Пусть A и B – некоторые множества.

A равно B ($A = B$), если для любого $x : x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

$A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то элемент записывают $A \subset B$,
 A есть **собственное подмножество** B .

Определение.

Пустое множество \emptyset или $\{\}$, есть множество, которое не содержит элементов.

Универсальное множество U есть множество, обладающее свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Операции над множествами

Определение.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A , и B .

Обозначается $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Определение.

Пересечение множеств в общем случае:

Если $I = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, то

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k = \\ &= \{x : x \in A_i \text{ для всех } i \in I\}. \end{aligned}$$

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B .

Обозначается $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Определение.

Объединение множеств в общем случае:

Пусть $I = \{1, 2, 3, \dots, k\}$, то

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k = \\ &= \{x : \text{существует } i \in I \text{ такое, что } x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Определение

Пусть A и B множества. **Разностью множеств** $A - B$ называется множество всех тех и только тех элементов A , которые не содержатся в B .

$$A - B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Симметрическая разность множеств A и B обозначается $A \Delta B$ есть множество $(A - B) \cup (B - A)$

Определение.

Дополнение множества A , обозначается A'

- это множество элементов универсума, которые не принадлежат A .

$$U - A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Теорема

Для произвольных множеств A и B справедливо равенство

$$A - B = A \cap B'$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} a \in A - B &\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \notin B) \Leftrightarrow && \text{определение разности } A - B \\ &\Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in B') \Leftrightarrow && \text{определение дополнения} \\ &\Leftrightarrow a \in (A \cap B'). && \text{определение пересечения} \end{aligned}$$

Теорема

Для произвольных множеств A и B имеет место

а) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

б) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Доказательство (а):

$a \in (A \cap B)'$	$\Leftrightarrow a \notin (A \cap B)$	определение дополнения
	$\Leftrightarrow \sim(a \in (A \cap B))$	определение \notin
	$\Leftrightarrow \sim((a \in A) \wedge (a \in B))$	определение пересечения
	$\Leftrightarrow \sim(a \in A) \vee \sim(a \in B)$	закон логики де Моргана
	$\Leftrightarrow (a \notin A) \vee (a \notin B)$	определение \notin
	$\Leftrightarrow (a \in A') \vee (a \in B')$	определение дополнения
	$\Leftrightarrow a \in (A' \cup B')$	определение объединения

Теорема

Для произвольных множеств A , B и C справедливы равенства

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Доказательство (а):

$a \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (a \in A) \wedge (a \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$	определение пересечения
$\Leftrightarrow (a \in A) \wedge ((a \in B) \vee a \in C) \Leftrightarrow$	определение объединения
$\Leftrightarrow ((a \in A) \wedge (a \in B)) \vee$	определение пересечения
$\vee ((a \in A) \wedge (a \in C)) \Leftrightarrow$	закон логики де Моргана
$\Leftrightarrow (a \in (A \cap B)) \vee (a \in (A \cap C)) \Leftrightarrow$	определение пересечения
$\Leftrightarrow a \in ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \Leftrightarrow$	определение \notin
$\Leftrightarrow (a \in A') \cup (a \in B')$	определение объединения

Определение

Множество всех подмножеств множества A , или **булеан** множества A ,

обозначается $P(A)$,

есть множество, состоящее из всех подмножеств множества A .

Следовательно, булеан множества $A = \{1, 2, 3\}$ есть множество

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Определение.

Декартово произведение множеств A и B ,

обозначается $A \times B$,

есть множество $\{(a, b) : a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Объект (a, b) называется упорядоченной парой с первой компонентой a второй компонентой b .

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, и $B = \{r, s\}$. Тогда

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}.$$

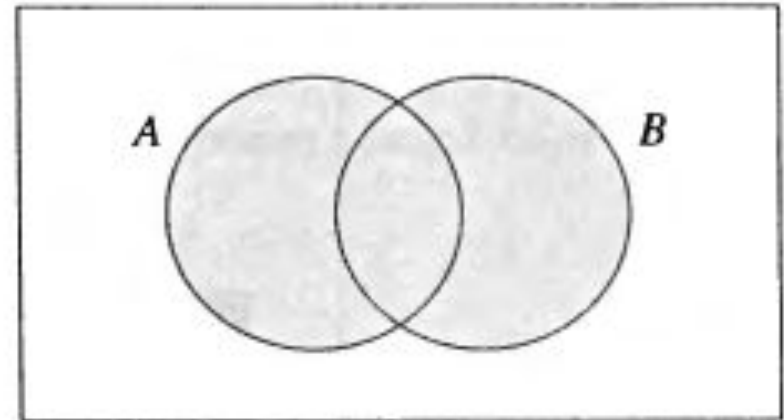
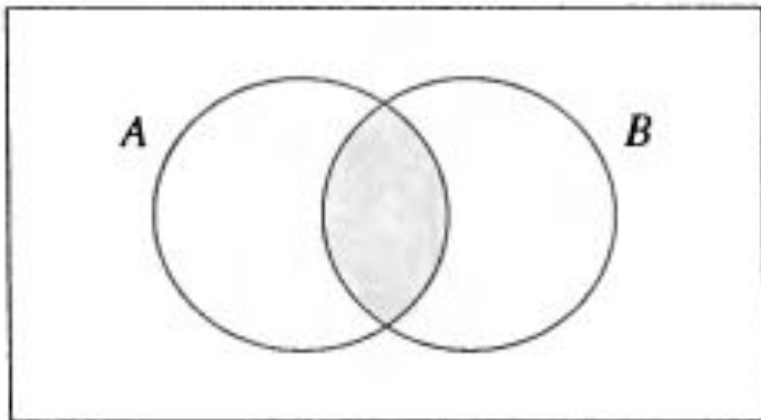
Если каждое из множеств A и B представляет собой множество действительных чисел, то $A \times B$ представляет собой **декартову плоскость**, на которой упорядоченные пары чисел используются для графического изображения функций.

Диаграммы Венна

Перейдем к обозначениям, принятым в булевой записи

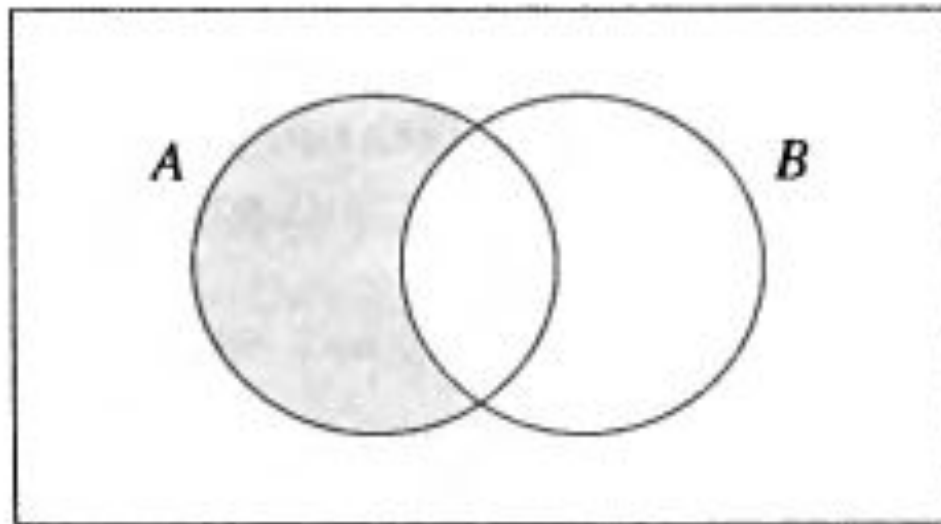
$$A \cap B$$

$$A \cup B$$

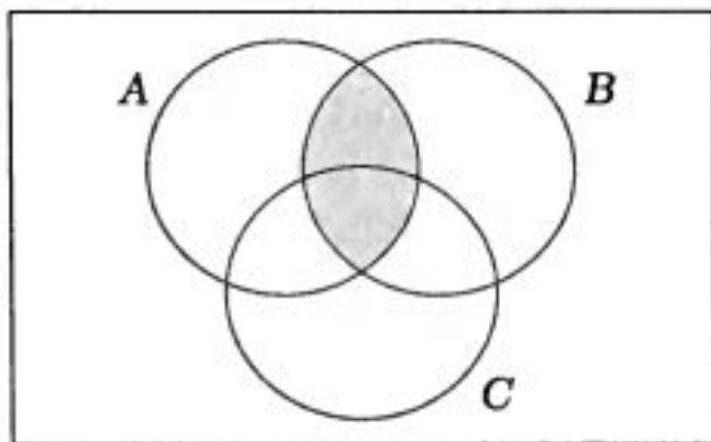
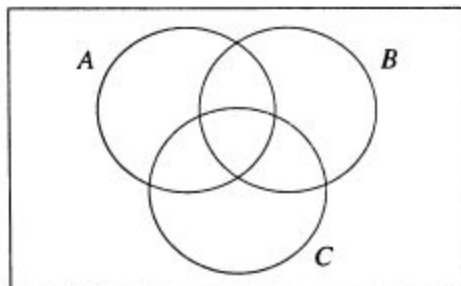


Диаграммы Венна

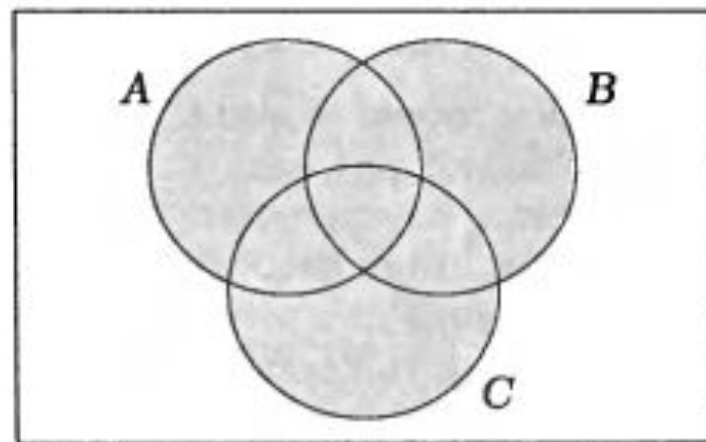
$A - B$



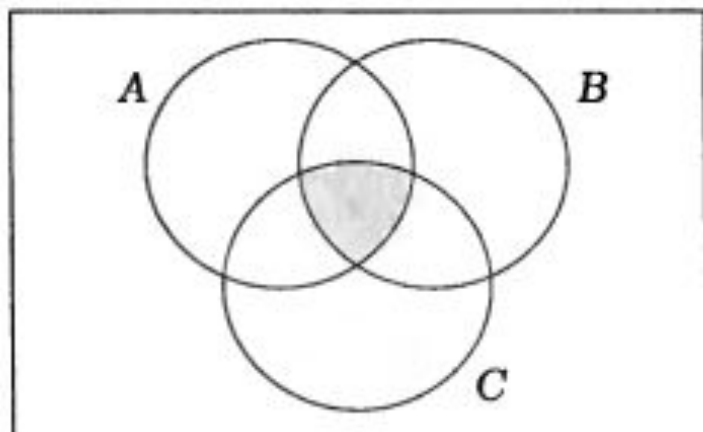
Диаграммы Венна



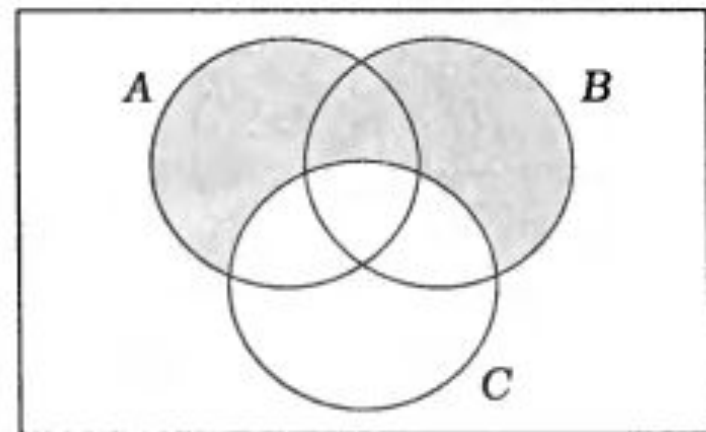
$$A \cap B$$



$$A \cup B \cup C$$

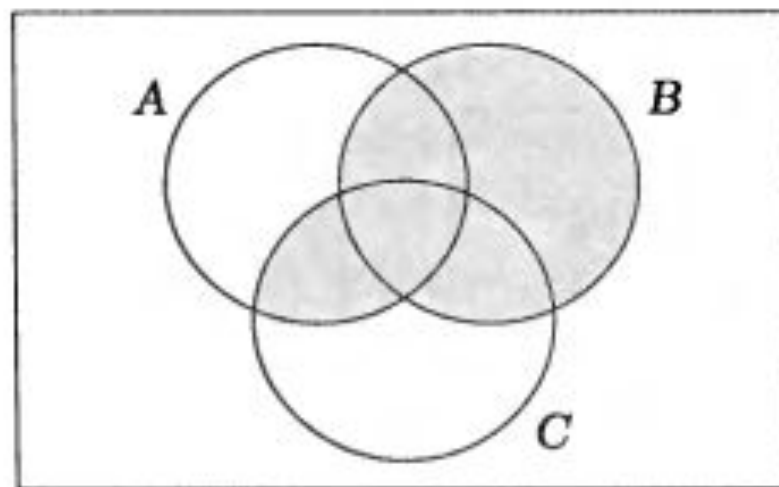


$$A \cap B \cap C$$



$$(A \cup B) - C$$

Диаграммы Венна



$$(A \cap C) \cup B$$

Теорема

Пусть A , B и C – подмножества универсального множества U .
Тогда справедливы

а) Законы идемпотентности

$$A \cap A = A;$$

$$A \cup A = A.$$

б) Двойное дополнение

$$(A')' = A.$$

в) Законы де Моргана

$$(A \cup B)' = A' \cap B';$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

г) *Свойства коммутативности*

$$A \cap B = B \cap A;$$

$$A \cup B = B \cup A.$$

д) *Свойства ассоциативности*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

е) *Свойства дистрибутивности*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ж) *Свойства тождества*

$$A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cap U = A.$$

з) *Свойства дополнения*

$$A \cup A' = U;$$

$$A \cap A' = \emptyset.$$

МОЩНОСТЬ

Определение

Мощность множества есть просто количество содержащихся в нем элементов.

Пустое множество есть конечное множество мощности 0.

Если существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, то A есть конечное множество мощности n .

Множество A называется счетно бесконечным, если существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Множество называется счетным, если оно конечно или счетно бесконечно.

Теорема

- а) Пусть A и B – непересекающиеся конечные множества. Тогда множество $A \cup B$ конечно. Если A имеет мощность n и B имеет мощность m , то $A \cup B$ имеет мощность $m + n$.
- б) Пусть A и B – непересекающиеся счетно бесконечные множества. Тогда множество $A \cup B$ – счетно бесконечное множество.
- в) Пусть A и B – непересекающиеся счетные множества. Тогда множество $A \cup B$ – счетное множество.

Теорема.

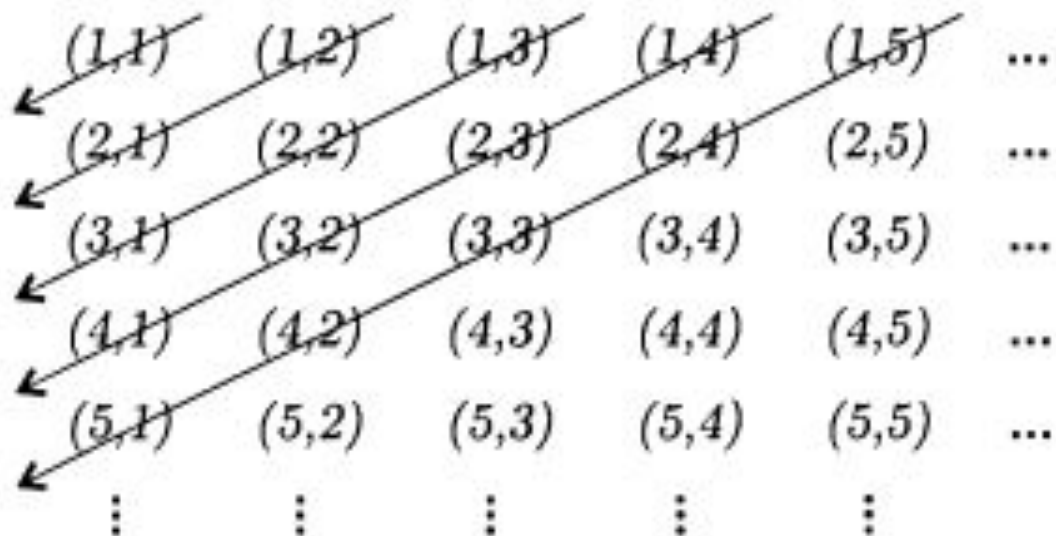
Подмножество счетного множества счетно.

Теорема.

Пусть S – счетно бесконечное множество, тогда множество $S \times S$ также счетно бесконечное.

Доказательство:

Если N – множество натуральных положительных чисел, то $N \times N$ счетно.



По диагональным стрелкам определяют соотношение φ :

$\varphi(1)=(1, 1)$, $\varphi(2)=(1, 2)$, $\varphi(3)=(2, 1)$, $\varphi(4)=(1, 3)$, $\varphi(5)=(2, 3)$...

Функция φ устанавливает взаимно однозначное соответствие.

Упорядоченная пара (m, n) расположена на $m+n-1$ диагонали и является m -ым элементом вдоль диагональной линии. \Rightarrow

Множество $N \times N$ счетно. S – счетно бесконечное множество. \Rightarrow

Существует взаимно однозначное соответствие $\theta : N \rightarrow S$.

Соответствие $\theta \times \theta : N \times N \rightarrow S \times S$ определяется так:

$$\theta \times \theta (a, b) = (\theta(a), \theta(b)).$$

Функция $\theta \times \theta$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $N \times N$ и $S \times S$.

Теорема.

Множество Q^+ положительных рациональных чисел является счетно бесконечным.

Доказательство:

Рассмотрим подмножество M множества $N \times N$ вида $\{(a, b) : (a, b) \in N \times N, a \text{ и } b \text{ – взаимно простые}\}$.

Функция $\varphi : Q^+ \rightarrow M$,

$\varphi(a/b) = (a, b)$ – есть искомое взаимно однозначное соответствие.

Множество $N \times N$ - счетно бесконечное множество $\Rightarrow M$ также счетно бесконечное. $\Rightarrow Q^+$ – счетно бесконечное множество.

Теорема.

Если A и B – счетные множества, то $A \cup B$ также счетно.

Доказательство:

Множество $A - B$ счетно как подмножество счетного множества A .

Множества $A - B$ не пересекаются, следовательно

$(A - B) \cup B = A \cup B$ являются счетными.

Все множества счетны?!

Существуют бесконечные, но несчетные множества!

Теорема.

Пусть R – множество действительных чисел. Множество $I = \{x : x \in R \text{ и } 0 < x < 1\}$ не является счетным.

$$a_1 = .a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \dots$$

$$a_2 = .a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \dots$$

$$a_3 = .a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \dots$$

$$a_4 = .a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45} \dots$$

$$a_5 = .a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55} \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_2 = .1425958273 \dots$$

$$a_3 = .2837462982 \dots$$

$$a_4 = .1985723986 \dots$$

$$a_5 = .2309847621 \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Теорема.

Множество действительных R несчетно.

Доказательство:

Если бы R было счетным, то множество $I \subseteq R$ было бы счетным.

Теорема.

Не существует взаимно однозначного соответствия между множеством S и его булеаном $P(S)$.

Пример (Парадокс Рассела)

Пусть S – множество всех множеств.

Пусть $W = \{x : x \notin x\}$. Пустое множество принадлежит W , т.к. оно не принадлежит самому себе.

На самом деле, большинство множеств принадлежит W .

Однако S не принадлежит W , т.к. $S \in S$.

$W \in W$?

Если $W \in W$, то оно принадлежит множеству всех множеств, которые сами себе не принадлежат. $\Rightarrow W \notin W$.

Однако, если предположить $W \notin W$, то W принадлежит множеству всех множеств, которые не принадлежат сами себе. Таким множеством является $W \Rightarrow W \in W$.

Противоречие.

Последний слайд лекции

!!