Иррациональные уравнения

Простейшие иррациональные уравнения

- Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на :

- возведение в степень (чаще всего возведение в квадрат);
- метод замены переменных;
- исследование области определения;
- метод исследования монотонности функции

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

- 1) если показатель корня - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно;
  при этом значение корня также является неотрицательным (определение корня с четным показателем степени);

- 2) если показатель корня - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом;
  в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

- $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, (*)
- при решении которого важную роль играет четность или нечетность n
- Если n нечетное, то уравнение (*) равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^n$

Если n - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $f(x) \geq 0$

уравнение (*) в этом случае равносильно системе: $\begin{cases} f(x) = (g(x))^n \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-2x+1}=1$.

Решение.

Так как в данном примере $n=3$ нечетное,

то после возведения обеих частей уравнения в третью степень,

получим равносильное данному уравнение:

$$x^3-2x+1=1^3 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=-\sqrt{2},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 2 - x$.

Решение. Так как $n = 2$ - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1 = (2-x)^2 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4 - 4x + x^2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x = (5 - \sqrt{13})/2$.

Иногда встречаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, которые решаются следующим образом:

n - нечетное $\Rightarrow f(x) = g(x)$

n - четное $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 0.$

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1}$.

Возводя обе части в квадрат и учитывая, что $x+1 \geq 0$, получим уравнение $2x+6=x+1$, решение которого есть $x=-5$ – не удовлетворяет выписанному условию.

Значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов (знак корня).

- В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-3}=1$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9}=1+\sqrt{x-3}$.

Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x-9=1+x-3+2\sqrt{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x-7=\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7\ge 0 \\ (x-7)^2=4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-14x+49=4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 7 \\ x^2-18x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 7 \\ x=9\pm\sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=9+\sqrt{20}.$$

Ответ: $x=9+\sqrt{20}$.

В классе стр. 206 № 100

- Домашнее задание стр. 198 № 61,62