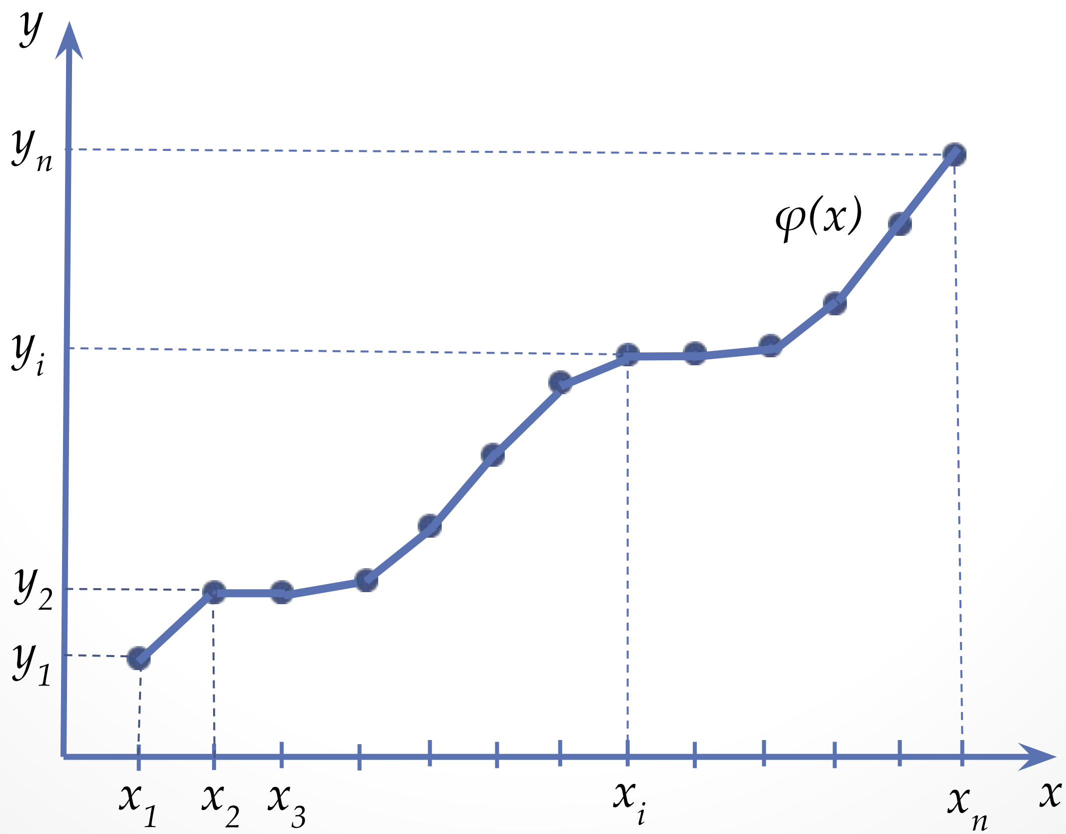
Интерполяции сплайнами

Интерполирование полиномом (*n*-1)-ой степени по совокупности по *n* точкам часто бывает неудовлетворительным, особенно при больших значениях n. В этих случаях полином степени *n-1* может иметь *n*-2 локальный максимум и минимум и график может раскачиваться, чтобы пройти через заданные точки, что часто бывает недопустимым.

В таких случаях часто применяют интерполяцию сплайнами. Английское слово «*spline*» можно перевести как «гибкая линейка».

Интерполяции сплайнами

Когда надо провести график по ее известным точкам, то пользуются лекалом. Если точки расположены достаточно часто, то в качестве лекало применяется обычная линейка, с помощью которой две соседние точки графика соединяются обычной прямой линией. Результирующая кривая в этом случае выглядит подобно ломаной линии.



Интерполяции сплайнами

Эту ломаную линию называют *линейным сплайном*. Его можно записать в виде формулы:

$$S_i(x) = y_i + d_i(x - x_i) \qquad (1)$$

где

$$d_i = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i)$$

Интерполяции сплайнами

Совокупность таких прямых *линий* на всех n-1 отрезках будет определять результирующую кривую *ϕ(x)* , представляющую собой *линейный* сплайн :

$$\varphi(x)=\begin{cases} y_1+d_1(x-x_1) \text{ для } x \text{ в } [x_1, x_2] \\ y_2+d_2(x-x_2) \text{ для } x \text{ в } [x_2, x_3] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_i+d_i(x-x_i) \text{ для } x \text{ в } [x_i, x_{i+1}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}+d_{n-1}(x-x_{n-1}) \text{ для } x \text{ в } [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad (2)$$

Интерполяции сплайнами

Если точки расположены редко, то в качестве лекало можно применить металлическую линейку, которую ставят на ребро и изгибают, придерживая в нескольких местах пальцами так , чтобы ее ребро проходило сразу через все точки графика. В этом случае кривая на отрезке между двумя точками представляет собой полином 3-й степени.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x) + c_i(x)^2 + d_i(x)^3 \qquad x_{i-1} \le x \le x_i \qquad (3)$$

совокупность таких полиномов на всех *n-1* отрезках будет определять результирующую кривую *ϕ(x)*, представляющую собой кубический сплайн.

$$\varphi(x) = \begin{cases} S_1(x) \ \text{для} \ x \ \text{в} \ [x_1, x_2] \\ S_2(x) \ \text{для} \ x \ \text{в} \ [x_2, x_3] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_i(x) \ \text{для} \ x \ \text{в} \ [x_i, x_{i+1}] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{n-1}(x) \ \text{для} \ x \ \text{в} \ [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \qquad (4)$$

Интерполяции сплайнами

Или в развернутом виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x) + c_1(x)^2 + d_1(x)^3 \quad \text{для} & [\ _1,\ _2] \\ a_2 + b_2(x) + c_2(x)^2 + d_2(x)^3 \quad \text{для} & [\ _2,\ _3] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_i + b_i(x) + c_i(x)^2 + d_i(x)^3 \quad \text{для} & [\ _i,\ _{i+1}] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n-1} + b_{n-1}(x) + c_{n-1}(x)^2 + d_{n-1}(x)^3 \quad \text{для} & [\ _{n-1},\ _n] \end{cases} \qquad (5)$$

Интерполяции сплайнами

Для построения кривой *ϕ(x),* необходимо определить неизвестные коэффициенты

$$a_i, b_i, c_i, d_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

общее число которых, как следует из формулы (8), составляет величину *4(n-1)* значений. Следовательно необходимо составить систему состоящую из *4(n-1)* уравнений и ее решить.

В этой системе *n* уравнений определяют условие совпадения значений сплайнов со значениями исходной функции

$$\left.\begin{aligned} &S_i(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ &S_{n-1}(x_n) = y_n \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Интерполяции сплайнами

Так как функция $\phi(x)$ должна быть непрерывной, то непрерывными должны быть и все ее производные до второго порядка включительно. Условие непрерывности записывается в виде

Непрерывность самой функции $\phi(x)$

$$S_i\left(x_{i+1}\right) = S_{i+1}(x_{i+1}) \qquad i = 1, 2, \dots, n-2 \qquad (7)$$

Непрерывность первой производной функции $\phi(x)$

$$S_i'\left(x_{i+1}\right) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad i = 1, 2, \dots, n-2 \qquad (8)$$

Непрерывность второй производной функции $\phi(x)$

$$S_i''\left(x_{i+1}\right) = S_{i+1}''(x_{i+1}) \qquad i = 1, 2, \dots, n-2 \qquad (9)$$

Интерполяции сплайнами

Первая производная от *S(x)* вычисляется по формуле

$$S_i^{'}\left(x\right)=b_i+2c_ix+3d_ix^2 \qquad i=1,2,\dots,n-2$$

Вторая производная определяется формулой

$$S_i^{''}\left(x\right)=2c_i+6d_ix \qquad i=1,2,\dots,n-2$$

Интерполяции сплайнами

Мы получили *n* +3(*n*-2) = 4*n*-6 уравнений из необходимых 4(*n*-1). Недостающие два уравнения обычно определяют, исходя из тех или иных граничных условий. Предположим, что функция $\phi(x)$ на своих границах удовлетворяет условиям

$$\varphi''(x_1) = \varphi''(x_n) = 0$$

тогда имеем следующую недостающую пару значений

$$\varphi''(x_1) = S_1''(x_1) = 0$$

$$\varphi''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 0$$

Интерполяции сплайнами

Или в развернутом виде

$$\varphi''(x_1) = S_1''(x_1) = (a_1 + b_1(x_1) + c_1(x_1)^2 + d_1(x_1)^3)'' = 0$$
$$\varphi''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = (a_{n-1} + b_{n-1}(x_n) + c_{n-1}(x_n)^2 + d_{n-1}(x_n)^3)'' = 0$$

Вычисляя производные первого и второго порядка получим

$$\varphi''(x_1) = S_1''(x_1) = 2c_1 = 0$$
$$\varphi''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 2c_{n-1}(x_n) + 6d_{n-1}(x_n) = 0$$

или

$$\left.\begin{aligned} &c_1 = 0 \\ &c_{n-1}(x_n) + 3d_{n-1}(x_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Интерполяции сплайнами

Таким образом мы получили все *4(n-1)* уравнений, которых достаточно для определения всех коэффициентов

$$a_i, b_i, c_i, d_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Уравнения 9 ÷ 13 однозначно определяют кубический сплайн $\phi(x)$.

Пример 2.

Из эксперимента получены такие значения функции *f(x)*:

x	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	$x_5 = 4$
$f(x)$	$y_1 = 1$	$y_2 = 1.8$	$y_3 = 2.2$	$y_4 = 1.4$	$y_5 = 1$

Требуется представить приближенно функцию $y = f(x)$ линейным и кубическим сплайном. В данном случае n=5.

Интерполяция линейным сплайном

Для аппроксимации данной табличной функции линейным сплайном используем формулу (1). Определим сначала значения d_i, число которых составит величину $n-1=4$

$$d_1=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=(1.8-1)/(1-0)=\frac{0.8}{1}$$

$$d_2=(y_3-y_2)/(x_3-x_2)=(2.2-1.8)/(2-1)=\frac{0.4}{1}$$

$$d_3=(y_4-y_3)/(x_4-x_3)=(1.4-2.2)/(3-2)=\frac{-0.8}{1}$$

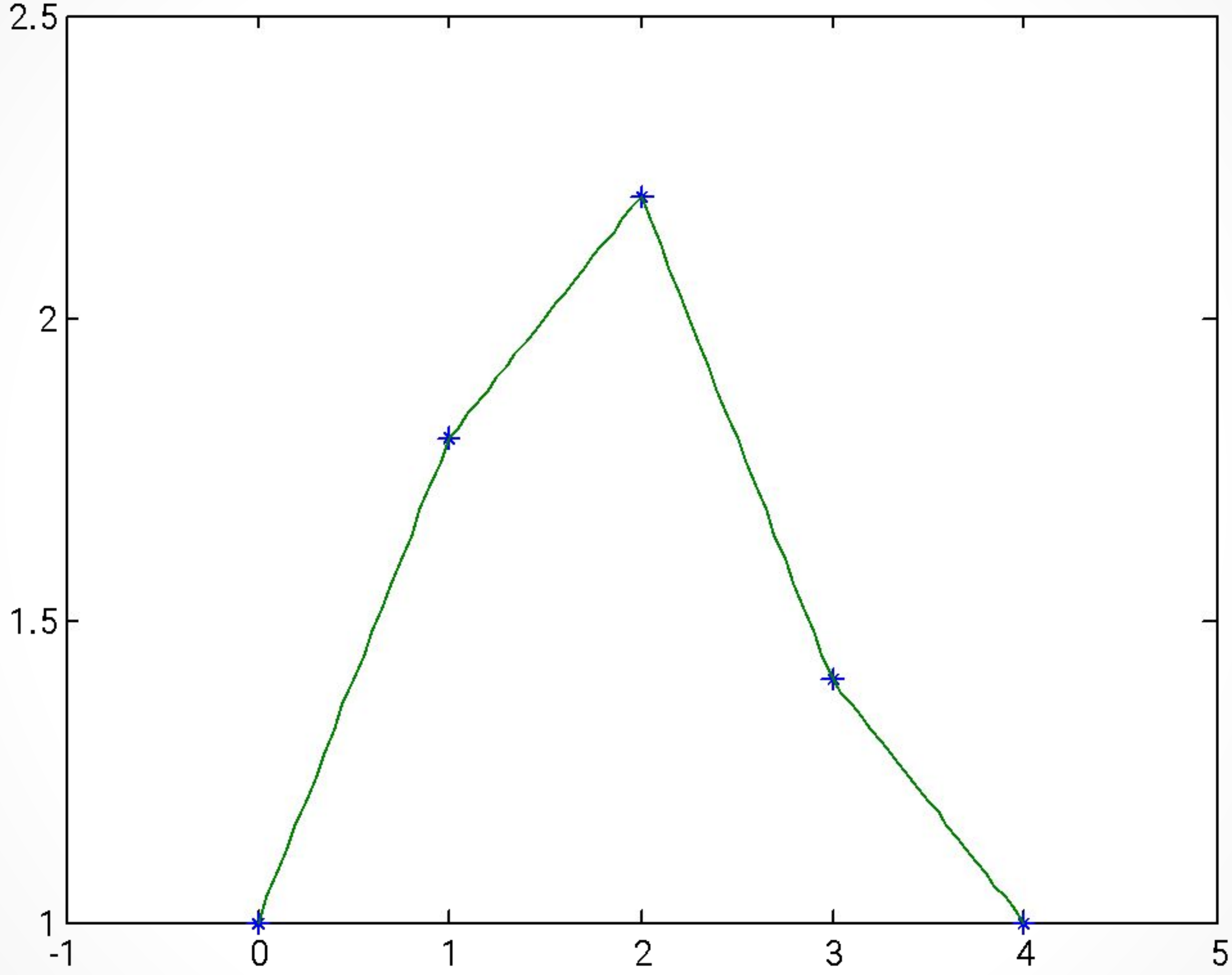
$$d_4=(y_5-y_4)/(x_5-x_4)=(1-1.4)/(4-3)=\frac{-0.4}{1}$$

Подставляем значения d_i, в формулу (2)

$$
\varphi(x) = \begin{cases}
S_1(x) = y_1 + d_1(x - x_1) = 1 + \frac{0.8}{1}(x - 0) = 1 + 0.8x & \text{для } x \text{ в } [x_1 = 0,\ x_2 = 1] \\
S_2(x) = y_2 + d_2(x - x_2) = 1.8 + \frac{0.4}{1}(x - 1) = 1.4 + 0.4x & \text{для } x \text{ в } [x_2 = 1,\ x_3 = 2] \\
S_3(x) = y_3 + d_3(x - x_3) = 2.2 + \frac{-0.8}{1}(x - 2) = 3.8 + 0.8x & \text{для } x \text{ в } [x_3 = 2,\ x_4 = 3] \\
S_4(x) = y_4 + d_4(x - x_4) = 1.4 + \frac{-0.4}{1}(x - 3) = 2.6 - 0.4x & \text{для } x \text{ в } [x_4 = 3,\ x_5 = 4]
\end{cases}
$$

Построим график этой функции…

График линейного сплайна.



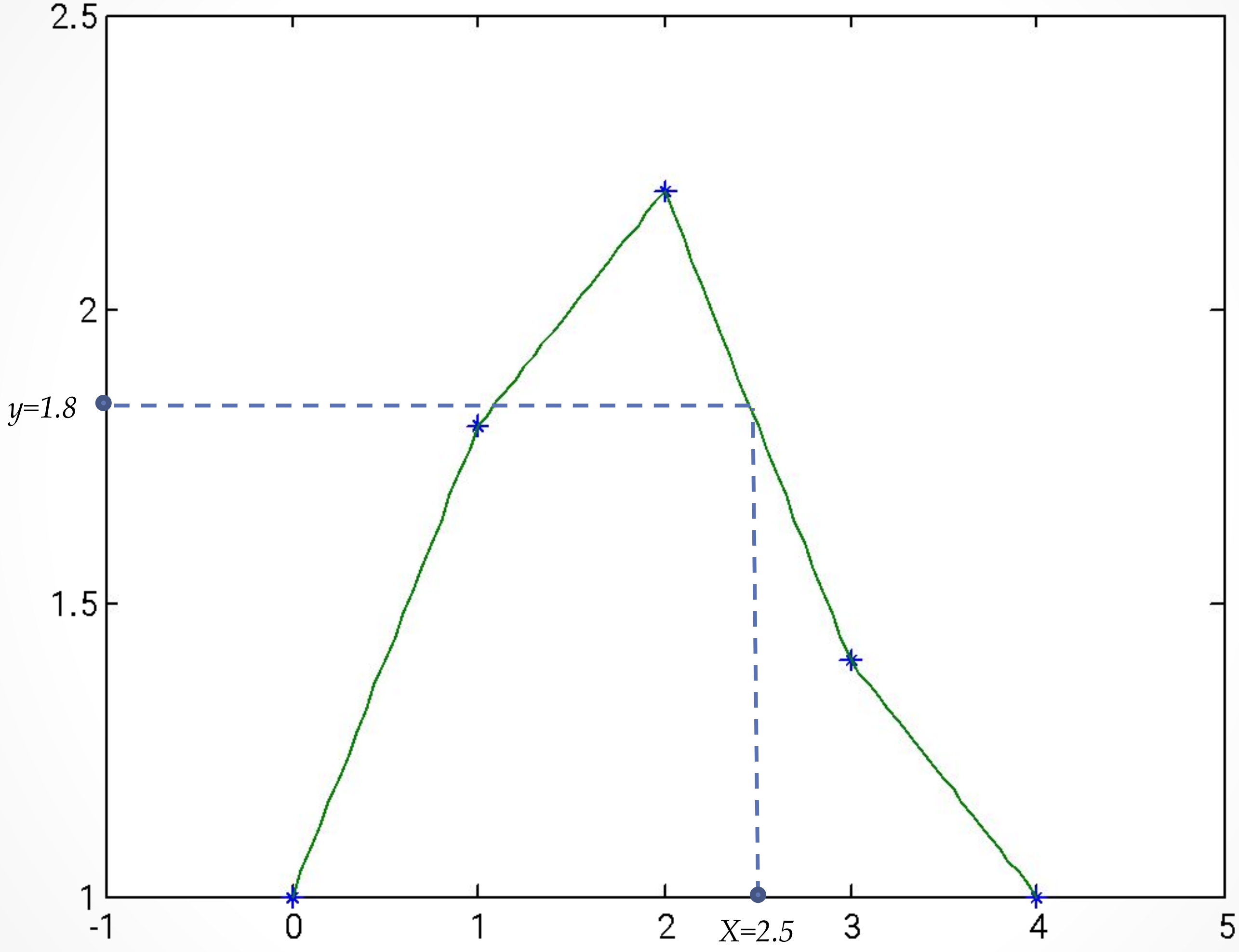
Определим значение функции *ϕ(x)* при *x=2.5*. Для этого расчета принимаем сплайн номер три, для отрезка *x=2÷3*.

$$S_3(x) = 3.8 - 0.8x \quad \text{для } x \in \quad [\ _3 = 2, \ _4 = 3]$$

Подставляем *x=2.5* и получаем

$$S_3(x) = 3.8 - 0.8 * 2.5 = 3.8 - 2 = 1.8$$

График линейного сплайна.



Интерполяция кубическим сплайном

Для интерполяции кубическим сплайном требуется составить систему, состоящую из $4(n\text{-}1)=4(5\text{-}1)=16$ уравнений с 16 неизвестными коэффициентами

В матричной форме эта система будет выглядеть следующим образом

$$W * X = Z$$

где W – квадратная матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных параметрах системы, в нашем случае имет размер 16 х 16;

X– вектор неизвестных параметров системы, в нашем случае состоит из 16 значений неизвестных

$$a_i, b_i, c_i, d_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Z – вектор правых частей уравнений ситемы, состоит также из 16 значений.

Неизвестные параметры системы будут определятся как

$$X = \frac{Z}{W}$$

Для вычислений сначала составим матрицу W и вектор Z.

Для этого заполним строки следующей таблицы…

Таблица коэффициентов при неизвестных параметрах системы и значений правых частей системы.

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	

Область, определяющая матрицу коэффициентов при неизвестных W

Таблица коэффициентов при неизвестных параметрах системы и значений правых частей системы.

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	

Область, определяющая вектор Z правых частей уравнений

Система уравнений *для* интерполяции кубическим сплайном, состоящая из $4(n\text{-}1)\text{=}4(5\text{-}1)\text{=}16$ уравнений с 12 неизвестными коэффициентами составляется поэтапно

Сначала составим 5 уравнений согласно формуле (5)

$$\left.\begin{array}{l}
S_1(x_1) = S_1(0) = a_1 + b_1 0 + c_1 0 + d_1 0 = 1.0 \\
S_2(x_2) = S_2(1) = a_2 + b_2 1 + c_2 1 + d_2 1 = 1.8 \\
S_3(x_3) = S_3(2) = a_3 + b_3 2 + c_3 4 + d_3 8 = 2.2 \\
S_4(x_4) = S_4(3) = a_4 + b_4 3 + c_4 9 + d_4 27 = 1.4 \\
S_4(x_5) = S_4(4) = a_4 + b_4 4 + c_4 16 + d_4 64 = 1.0
\end{array}\right\}$$

На основании этих уравнений заполняются первые пять строк матрицы…

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1.8
3	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	2.2
4	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9	0	0	0	27	1.4
5	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	16	0	0	0	64	1
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	

Составим еще *n-2=5-2 =3* уравнений согласно формуле (7), которые обеспечивают соблюдение условия непрерывности функции

$$\left.\begin{array}{ll} S_1(x_2) = S_2(x_2) & S_1(1) = S_2(1) \\ S_2(x_3) = S_3(x_3) & S_2(2) = S_3(2) \\ S_3(x_4) = S_4(x_4) & S_3(3) = S_4(3) \end{array}\right\}$$

Составляя уравнения и производя определенные преобразования, получаем

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - a_2 + b_1 - b_2 + c_1 - c_2 + d_1 - d_2 = 0 \\ a_2 - a_3 + 2b_2 - 2b_3 + 4c_2 - 4c_3 + 8d_2 - 8d_3 = 0 \\ a_3 - a_4 + 3b_3 - 3b_4 + 9c_3 - 9c_4 + 27d_3 - 27d_4 = 0 \end{array}\right\}$$

На основании этих уравнений заполняются 6, 7 и 8 строки матрицы…

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1.8
3	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	2.2
4	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9	0	0	0	27	1.4
5	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	16	0	0	0	64	1
6	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0
7	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	4	-4	0	0	8	-8	0	0
8	0	0	1	-1	0	0	3	-3	0	0	9	-9	0	0	27	-27	0
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	

Составим еще *n-2=5-2 =3* уравнений согласно формуле (8), которые обеспечивают соблюдение условия непрерывности 1-й производной функции

$$\left.\begin{aligned} S_1'(x_2) &= S_2'(x_2) \quad & S_1'(1) &= S_2'(1) \\ S_2'(x_3) &= S_3'(x_3) \quad & S_2'(2) &= S_3'(2) \\ S_3'(x_4) &= S_4'(x_4) \quad & S_3'(3) &= S_4'(3) \end{aligned}\right\}$$

Также составляя уравнения и производя над ними определенные преобразования, получаем

$$\left.\begin{aligned} b_1 - b_2 + 2c_1 - 2c_2 + 3d_1 - 3d_2 &= 0 \\ b_2 - b_3 + 4c_2 - 4c_3 + 12d_2 - 12d_3 &= 0 \\ b_3 - b_4 + 6c_3 - 6c_4 + 27d_3 - 27d_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

На основании этих уравнений заполняются 9, 10 и 11 строки матрицы…

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1.8
3	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	2.2
4	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9	0	0	0	27	1.4
5	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	16	0	0	0	64	1
6	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0
7	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	4	-4	0	0	8	-8	0	0
8	0	0	1	-1	0	0	3	-3	0	0	9	-9	0	0	27	-27	0
9	0	0	0	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	3	-3	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	4	-4	0	0	12	-12	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	6	-6	0	0	27	-27	0
12																	
13																	
14																	
15																	
16																	

Составим еще *n-2=5-2 =3* уравнений согласно формуле (9), которые обеспечивают соблюдение условия непрерывности 2-й производной функции

$$\left.\begin{array}{ll} S_1''(x_2) = S_2''(x_2) & S_1''(1) = S_2''(1) \\ S_2''(x_3) = S_3''(x_3) & S_2''(2) = S_3''(2) \\ S_3''(x_4) = S_4''(x_4) & S_3''(3) = S_4''(3) \end{array}\right\}$$

Также составляя уравнения и производя над ними определенные преобразования, получаем

$$\left.\begin{array}{l} 2c_1 - 2c_2 + 6d_1 - 6d_2 = 0 \\ 2c_2 - 2c_3 + 12d_2 - 12d_3 = 0 \\ 2c_3 - 2c_4 + 18d_3 - 18d_4 = 0 \end{array}\right\}$$

На основании этих уравнений заполняются 12, 13 и 14 строки матрицы…

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1.8
3	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	2.2
4	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9	0	0	0	27	1.4
5	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	16	0	0	0	64	1
6	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0
7	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	4	-4	0	0	8	-8	0	0
8	0	0	1	-1	0	0	3	-3	0	0	9	-9	0	0	27	-27	0
9	0	0	0	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	3	-3	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	4	-4	0	0	12	-12	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	6	-6	0	0	27	-27	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	6	-6	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	12	-12	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	18	-18	0
15																	
16																	

Составляем последние 2 уравнения по формуле (10), которые обеспечивают соблюдение условия нулевой кривизны функции на ее концах в точках *1* и *n* , что соответствует отпущенным концам *линейки*

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_4 + 12d_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

На основании этих уравнений заполняются последние 15 и 16 строки матрицы…

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4	d1	d2	d3	d4	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1.8
3	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	4	0	0	0	8	0	2.2
4	0	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9	0	0	0	27	1.4
5	0	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	16	0	0	0	64	1
6	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0
7	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	4	-4	0	0	8	-8	0	0
8	0	0	1	-1	0	0	3	-3	0	0	9	-9	0	0	27	-27	0
9	0	0	0	0	1	-1	0	0	2	-2	0	0	3	-3	0	0	0
10	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	4	-4	0	0	12	-12	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	6	-6	0	0	27	-27	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	6	-6	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	12	-12	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	18	-18	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12	0

Решаем эту систему уравнений любым из известных способов и получаем следующие неизвестные коэффициенты

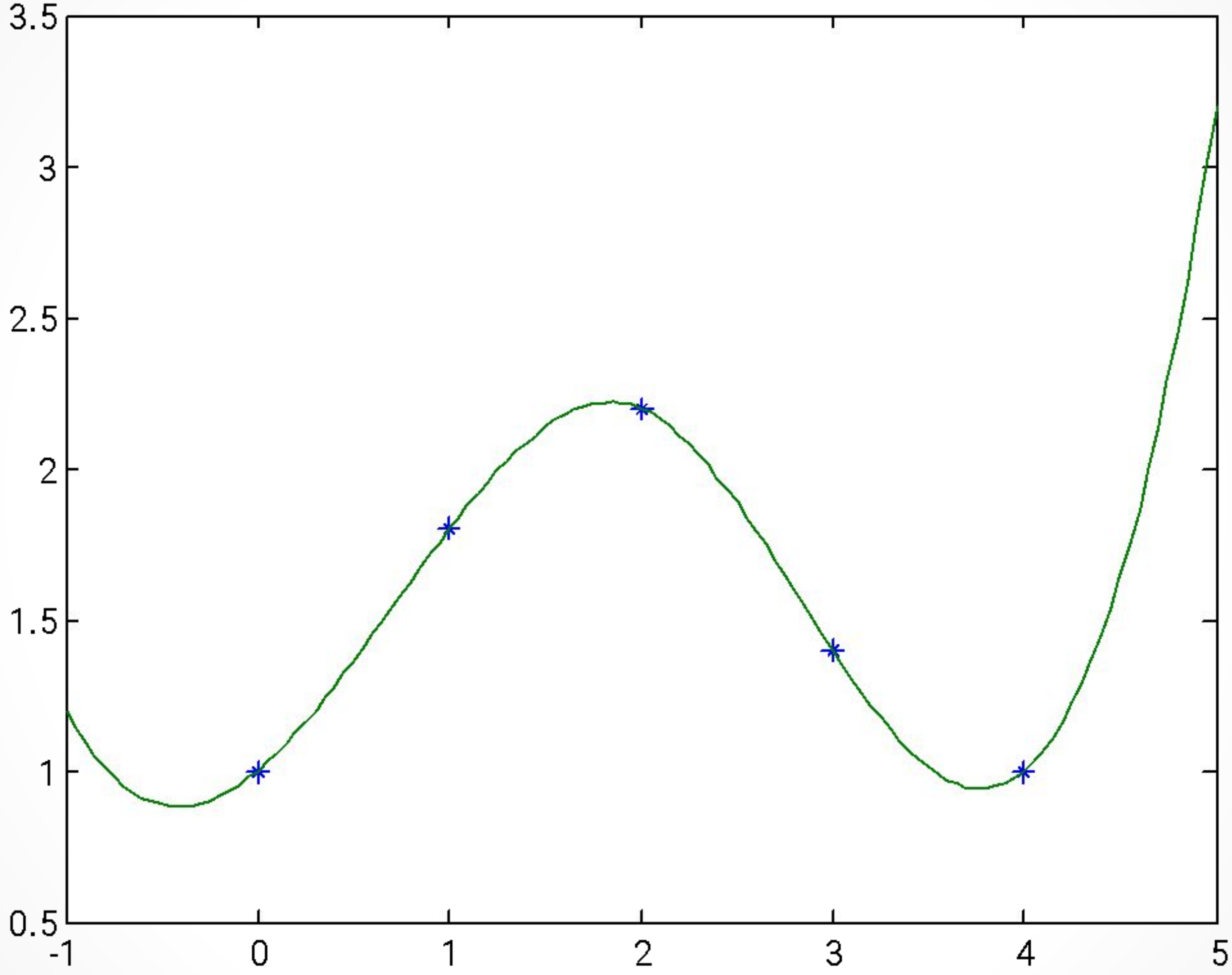
$a_1 = 1$	$b_1 = 0.8143$	$c_1 = 0$	$d_1 = -0.0143$
$a_2 = 1.3143$	$b_2 = -0.1286$	$c_2 = 0.9429$	$d_2 = -0.3286$
$a_3 = -5.5429$	$b_3 = 10.1571$	$c_3 = -4.2$	$d_3 = 0.5286$
$a_4 = 13.7429$	$b_4 = -9.1286$	$c_4 = 2.2286$	$d_4 = -0.1857$

В итоге формула (5) принимает вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}1+0.8143(x)-0.0143(x)^3 & \text{для } x\in[x_1=0,\ x_2=1]\\ 1.3143-0.1286(x)+0.9429(x)^2-0.3286(x)^3 & \text{для } x\in[x_2=1,\ x_3=2]\\ -5.5429+10.1571(x)-4.2(x)^2+0.5286(x)^3 & \text{для } x\in[x_3=2,\ x_4=3]\\ 13.7429-9.1286(x)+2.2286(x)^2-0.1857(x)^3 & \text{для } x\in[x_4=3,\ x_5=4]\end{cases}$$

Построим график этой функции…

График кубического сплайна.



Определим значение функции *ϕ(x)* при *x=2.5*. Для этого расчета принимаем сплайн номер три, для отрезка *x=2÷3*.

$$S_3(x) = -5.5429 + 10.1571(x) - 4.2(x)^2 + 0.5286(x)^3$$

для x $[x_3 = 2,\ x_4 = 3]$

Подставляем *x=2.5* и получаем

$$S_3(x) = -5.5429 + 10.1571(2.5) - 4.2(2.5)^2 + 0.5286(2.5)^3 = 1.859$$

График кубического сплайна.

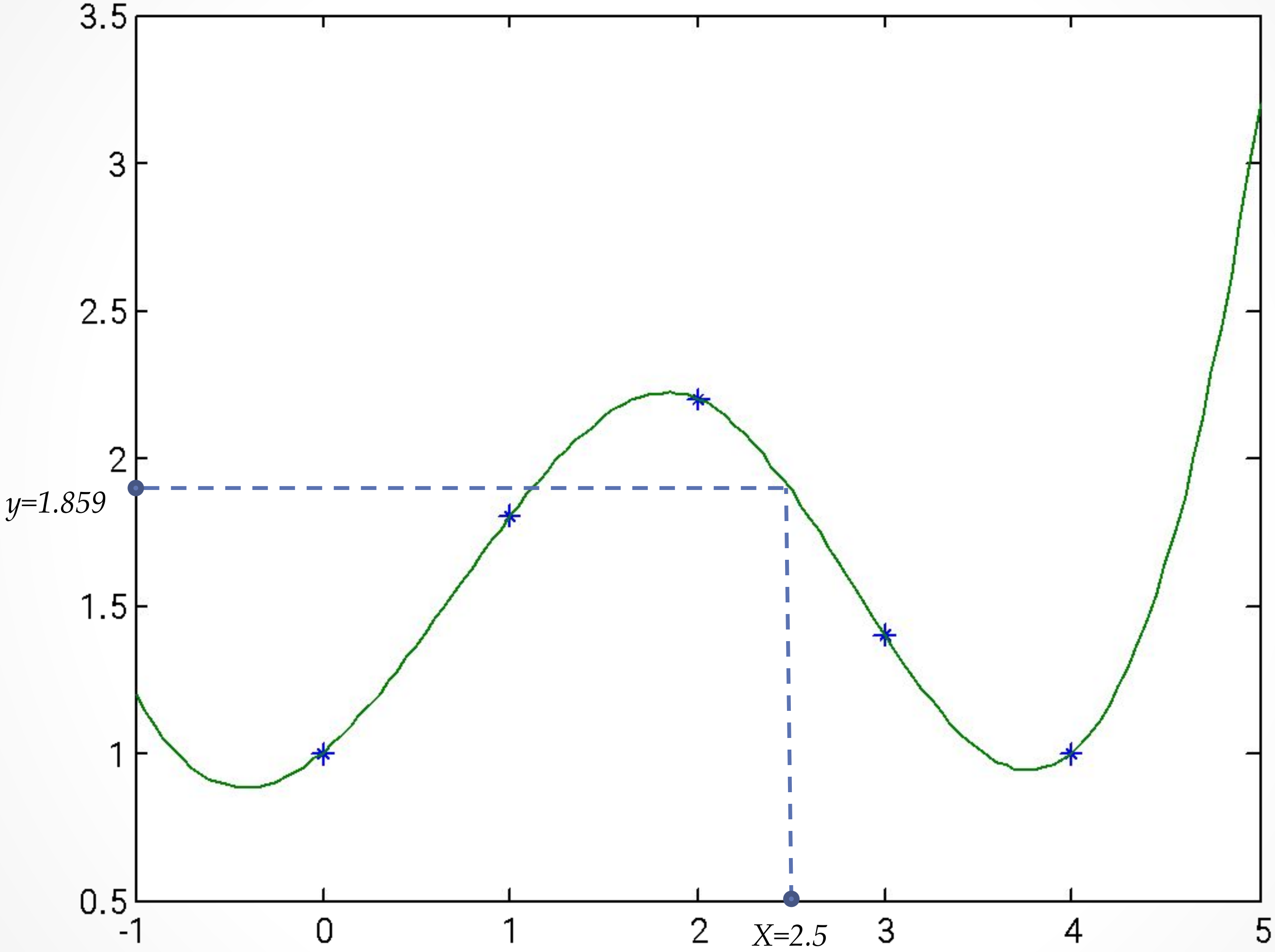


График линейного и кубического сплайна.