Высшая математика

1. Линейная и векторная алгебра.
2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.
3. Математический анализ.
4. Теория вероятностей.
5. Математическая статистика.

Литература

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб, 1999, 2000, …, 2009
2. Данко П.Е., Попов А.Г. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях М., Высшая школа ,1998 , 2000, …, 2009
3. Шипачев В. С. Высшая математика. М., Высшая школа, 1998 , 2000, …, 2009.

Матрицы и определители

1. Понятие матрицы.
2. Квадратные матрицы.
3. Действия с матрицами.
4. Определители.
5. Обратная матрица.
6. Ранг матрицы.
7. Решение систем линейных уравнений.

Понятие матрицы

Определение 1.
Таблицу чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots. & \dots.. & \dots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящую из *m* строк и *n* столбцов, называют матрицей.

Возможны другие обозначения

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \left\| a_{ij} \right\| = \left(a_{ij} \right)$$

Числа a_{ij} называют *элементами* матрицы

m,n **- размерность матрицы**

Квадратные матрицы

Определение. Матрица называется ***квадратной,*** если у нее число строк и число столбцов одинаково

Виды матриц:

1. Элементы квадратной матрицы a_{ii}, у которых номер строки совпадает с номером столбца, называются ***диагональными*** и образуют ***главную диагональ.***
2. Квадратная матрица D называется ***диагональной*** , если по главной диагонали стоят числа отличные от 0 и остальные элементы равны нулю.

Виды матриц:

3. Квадратная матрица Е называется ***единичной*** , если по главной диагонали стоят единицы, остальные элементы равны нулю.
4. Квадратная матрица О называется ***нуль-матрицей*** , если все её элементы равны нулю.

Виды матриц:

5. Диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны, называется **скалярной.**
6. Квадратная матрица элементы которой расположенные ниже главной диагонали равны 0, называется **треугольной.**
7. Квадратная матрица $A^т$ называется ***транспонированной*** для матрицы А, если строки матрицы А являются столбцами матрицы $A^т$.

ВИДЫ МАТРИЦ

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad C=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad A^{\tau}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Действия с матрицами

1.При умножении числа на матрицу это число умножается на каждый элемент матрицы

2.При сложении (вычитании) матриц одинакового размера соответствующие элементы матриц складываются (вычитаются)

3. Произведением матрицы $A_{m,n}$ на матрицу $B_{n,k}$ называется матрица $C = AB$ *размера (m, k)* , элемент которой, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, равен сумме произведений элементов *i-й* строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.

Примеры

$$1.\quad 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 3 & 9 & -12 \\ 6 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2.\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$3.\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot1-3\cdot3+4\cdot(-5) & 4+3+4 & -4+6+4 \\ 1\cdot1+3\cdot3-4\cdot(-5) & 2-3-4 & -2-6-4 \\ 2\cdot1+5\cdot3+0\cdot(-5) & 4-5+0 & -4-10+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -27 & 11 & 6 \\ 30 & -5 & -12 \\ 17 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$AB = ?$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & -11 & -15 \\ 10 & 8 & 15 \\ 4 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Определители

Определение. ***Определителем*** или ***детерминантом*** 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определение.

Определителем **или** ***детерминантом*** **3-го порядка называется число**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

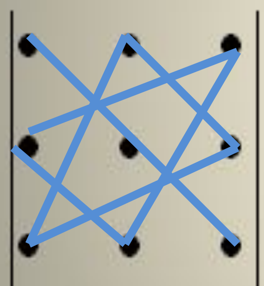
$$= 2\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot(-2)\cdot 1 + (-3)\cdot 0\cdot(-1) -$$

$$-(-3)\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot(-1) - 1\cdot 0\cdot 3 =$$

$$= 24 - 2 + 0 + 12 - 4 + 0 = 30$$

Определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$= -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot4\cdot3+1\cdot(-2)\cdot1+(-3)\cdot0\cdot(-1)-$$

$$-(-3)\cdot4\cdot1-2\cdot(-2)\cdot(-1)-1\cdot0\cdot3=$$

$$=24-2+0+12-4+0=30$$

Свойства определителей

1. **Если все элементы какой-либо строки или столбца равны нулю, определитель равен нулю**
2. **Если элементы двух строк или столбцов равны или пропорциональны, определитель равен нулю**
3. **При транспонировании величина определителя не меняется.**
4. **Если к элементам одной строки прибавить умноженные на одно и тоже не равное нулю число элементы другой строки, величина определителя не изменится.**
5. **При перестановке строк или столбцов местами определитель меняет знак.**
6. **Если элементы какой-либо строки или столбца умножить на одно и то же число. То определитель умножится на это число.**

Миноры.
Алгебраические дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы *А* называется определитель, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца в матрице *А*.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется ее минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

Пример

- Записать минор элемента a_{23} матрицы А

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Пример

- Записать алгебраическое дополнение элемента a_{23}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & -4 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -172$$

Свойства определителей

7. Определитель равен сумме произведений элементов ряда матрицы на соответствующие алгебраические дополнения.
8. Сумма произведений элементов ряда матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.
9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

Пример.

Вычислить определитель матрицы, разложив его по элементам первого столбца

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & -4 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{21} - 3 \cdot A_{31} - 1 \cdot A_{41}$$

Алгебраические дополнения

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & 5 \\ 4 & 1 & -4 & 4 \\ -3 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot A_{11}+4\cdot A_{21}-3\cdot A_{31}-1\cdot A_{41}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 7+(-4)\cdot 3\cdot(-2)+4\cdot 4\cdot 5-$$

$$-4\cdot 2\cdot(-2)-(-4)\cdot 4\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5=231$$

Алгебраические дополнения

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=-355$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{vmatrix}=-54$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}M_{41}=-\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}=61$$

Обратная матрица

<u>Определение</u>. Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице А, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю.

<u>Теорема</u>. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была не вырождена.

<u>Теорема</u>. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример. Найти обратную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22 \neq 0,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = |5| = 5, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -|-3| = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -|4| = -4, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = |2| = 2.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/22 & 3/22 \\ -2/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы

Определение. ***Рангом*** матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров.

Элементарные преобразования, не изменяющие ранга матрицы:

1) Изменение порядка строк и столбцов;
2) Умножение элементов одной строки или столбца на любое не равное нулю число;
3) Сложение строк с предварительным умножением любой из них на произвольное не равное нулю число;
4) Отбрасывание нулевой строки или столбца;
5) транспонирование

Пример. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -5 & 2\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 5 & -4\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4 & -1 & -5\\ 0 & 3 & 1\\ 8 & -2 & -10\end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=13$$

$$r(A)=2$$