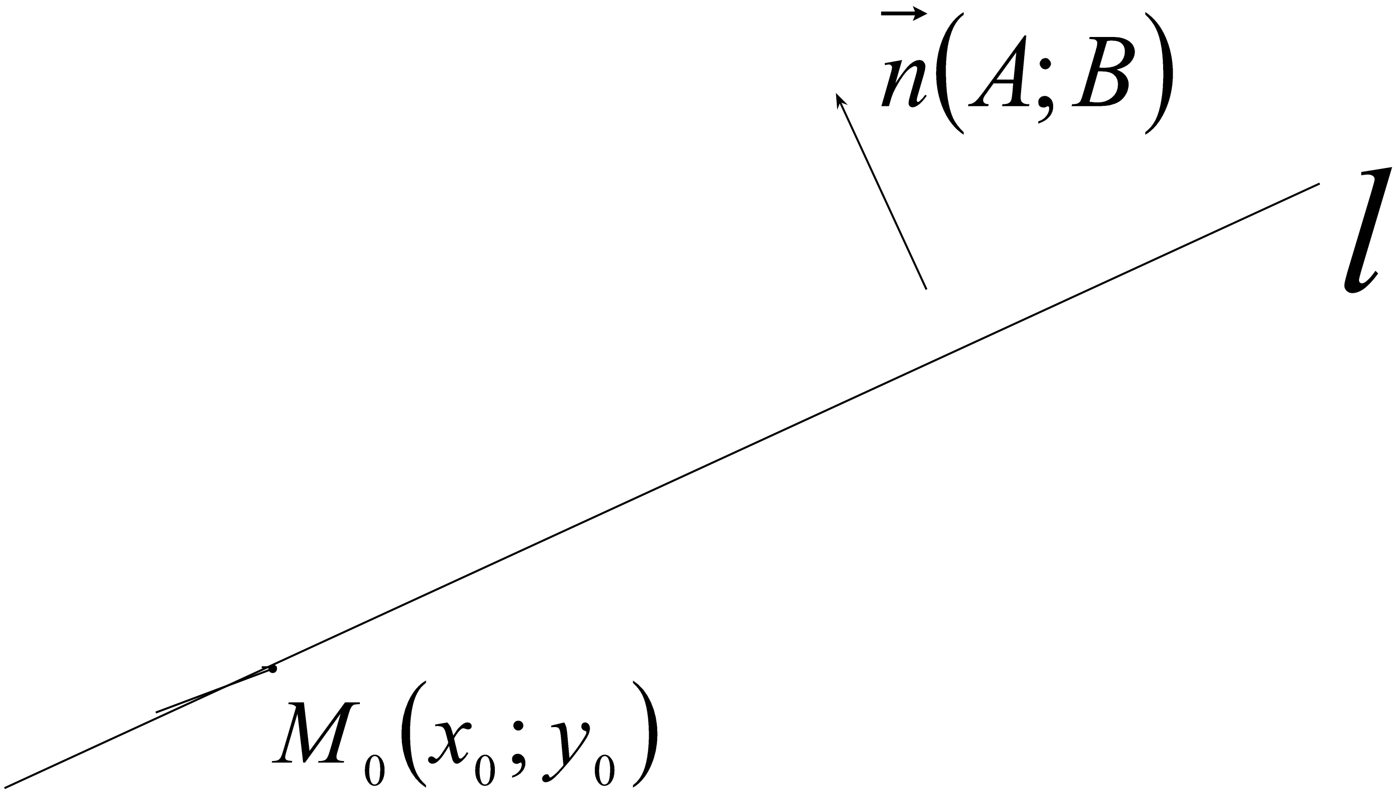
Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

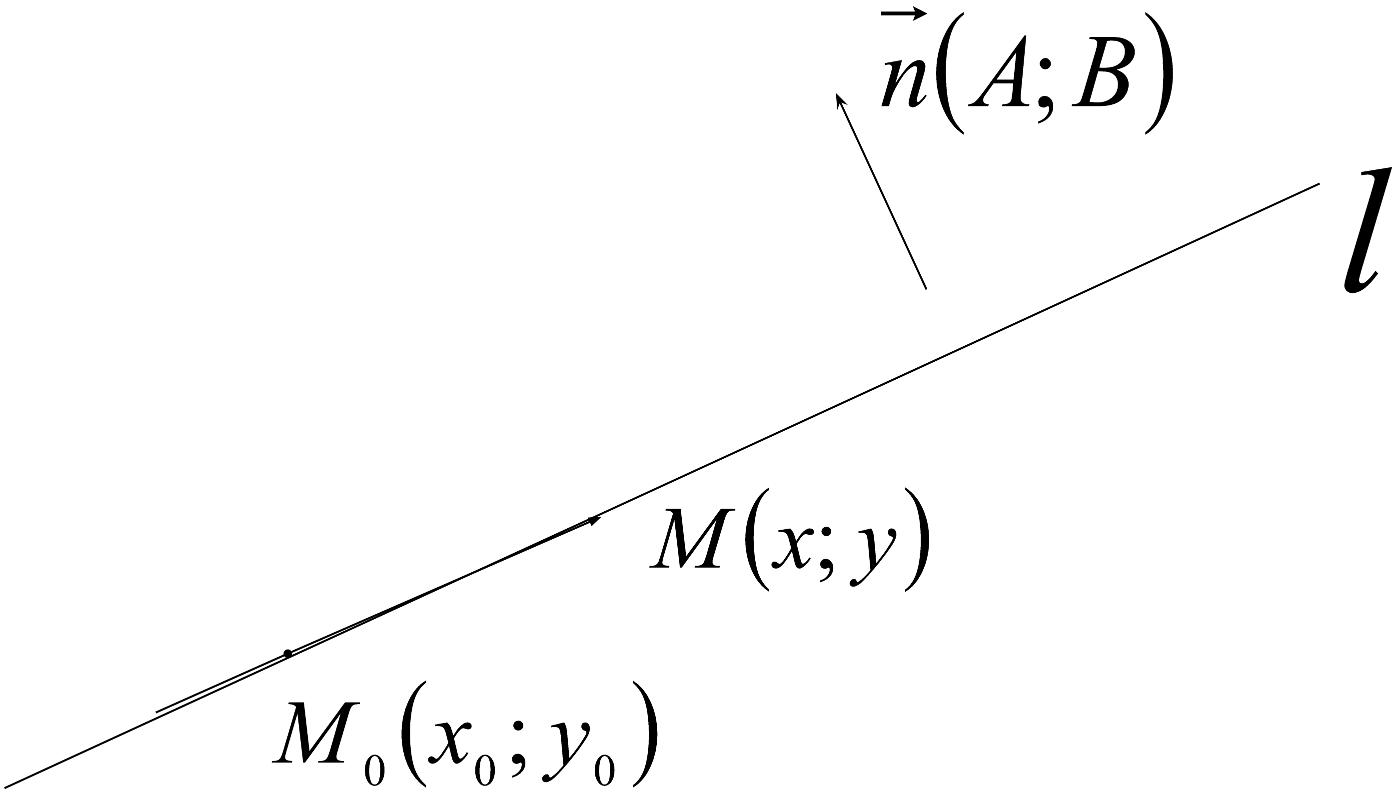
Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору


$\vec{n}(A;B)$
l
$M_0(x_0;y_0)$

$$M_0(x_0; y_0) \in l$$

$$\vec{n}(A; B) \perp l$$

$$M(x; y) \in l$$


$\vec{n}(A;B)$
l
$M(x;y)$
$M_0(x_0;y_0)$

$$\overline{M_0M} = \left\{x - x_0; y - y_0\right\}$$

$$\overline{n} = \left\{A; B\right\}$$

$$\overline{M_0M} \perp \overline{n}$$

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

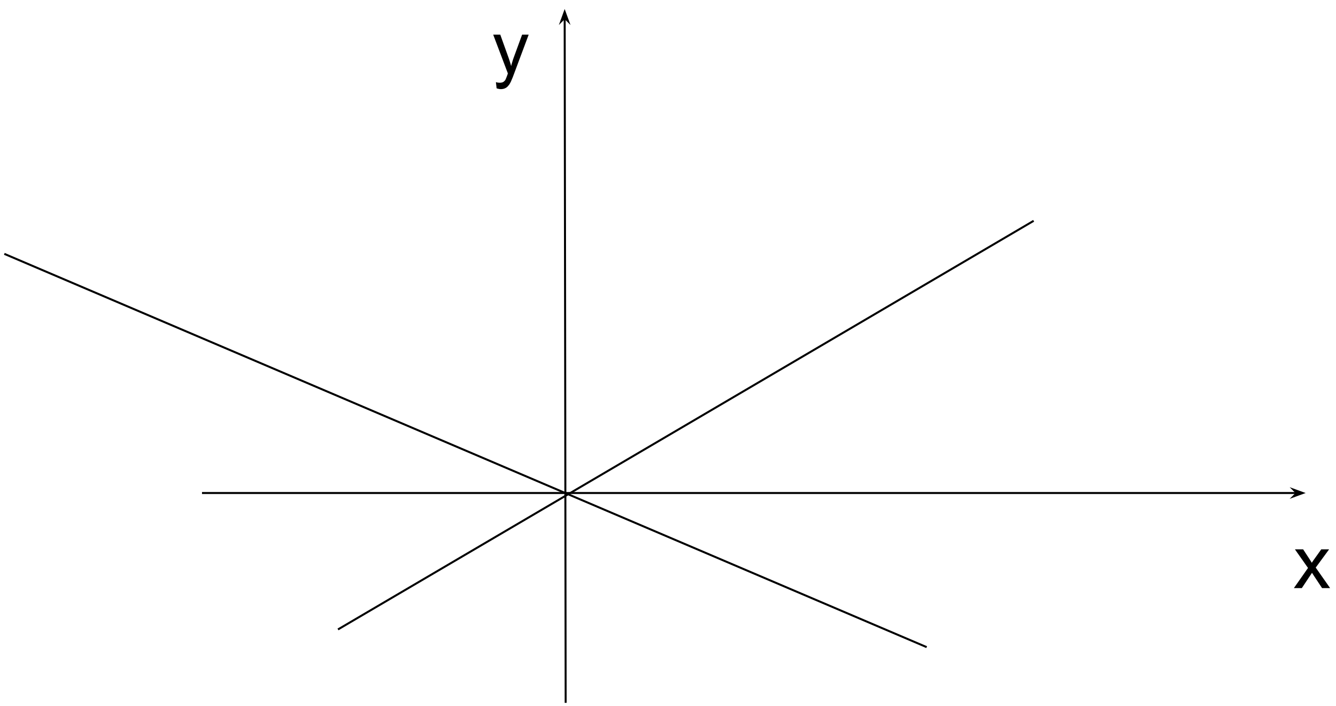
$$A(x-0)+B\left(y+\frac{C}{B}\right)=0$$

$$M_0\left(0;-\frac{C}{B}\right)$$

$$\vec{n}(A;B)\perp l$$

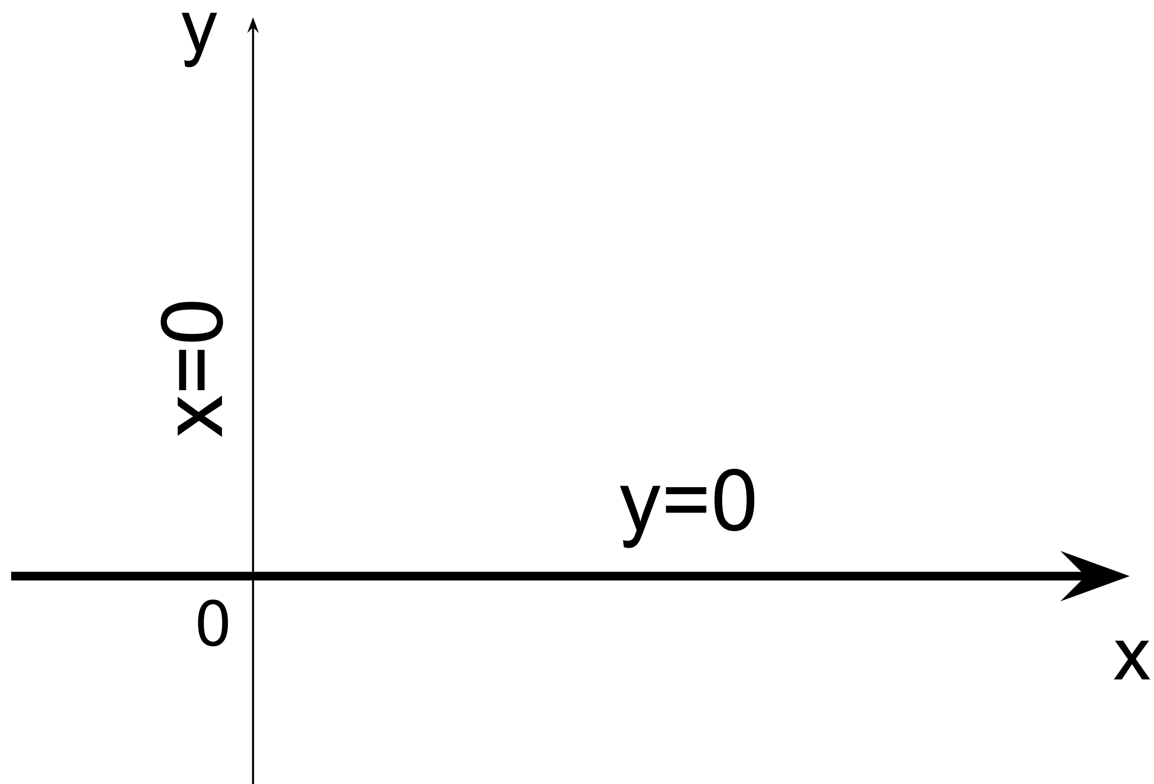
Частные случаи

$$1.\ C=0, B\neq 0,\ \ Ax+By=0,\ y=-\frac{A}{B}x;$$

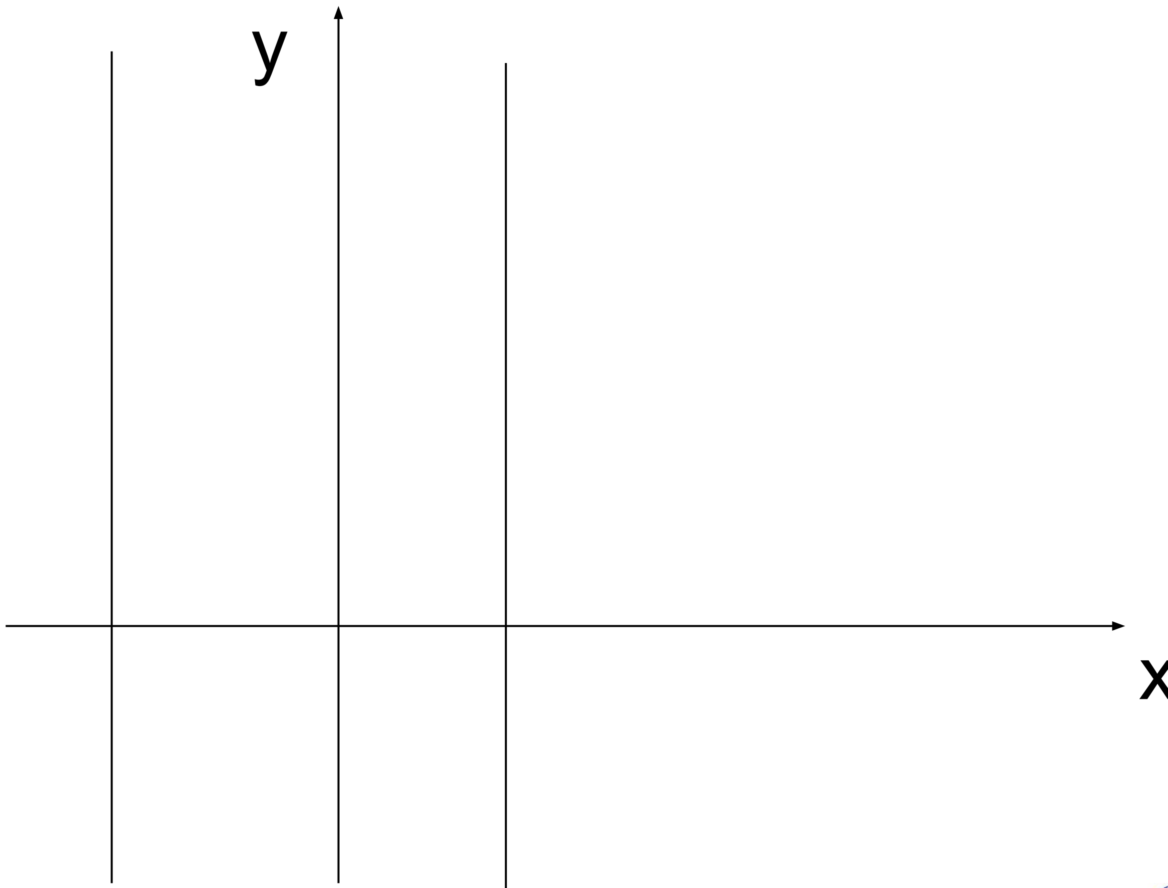


$$2.\ A=0, C=0, By=0,\ y=0;$$

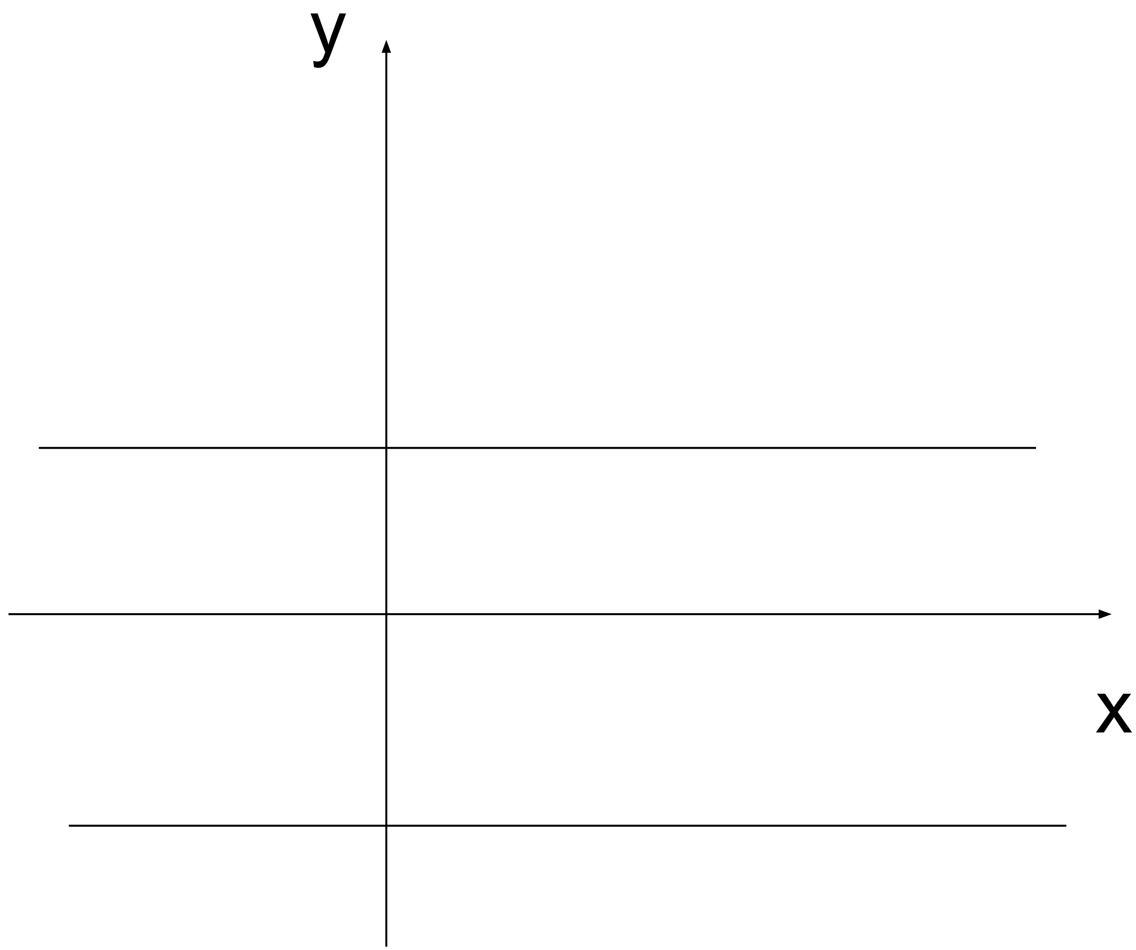
$$3.\ B=0, C=0, Ax=0,\ x=0;$$



$$4.\ A \neq 0, B = 0, C \neq 0,\ \ Ax + C = 0, x = -\frac{C}{A};$$



$$5.\ A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ By+C=0,\ y=-\frac{C}{B}.$$



Уравнение прямой в отрезках

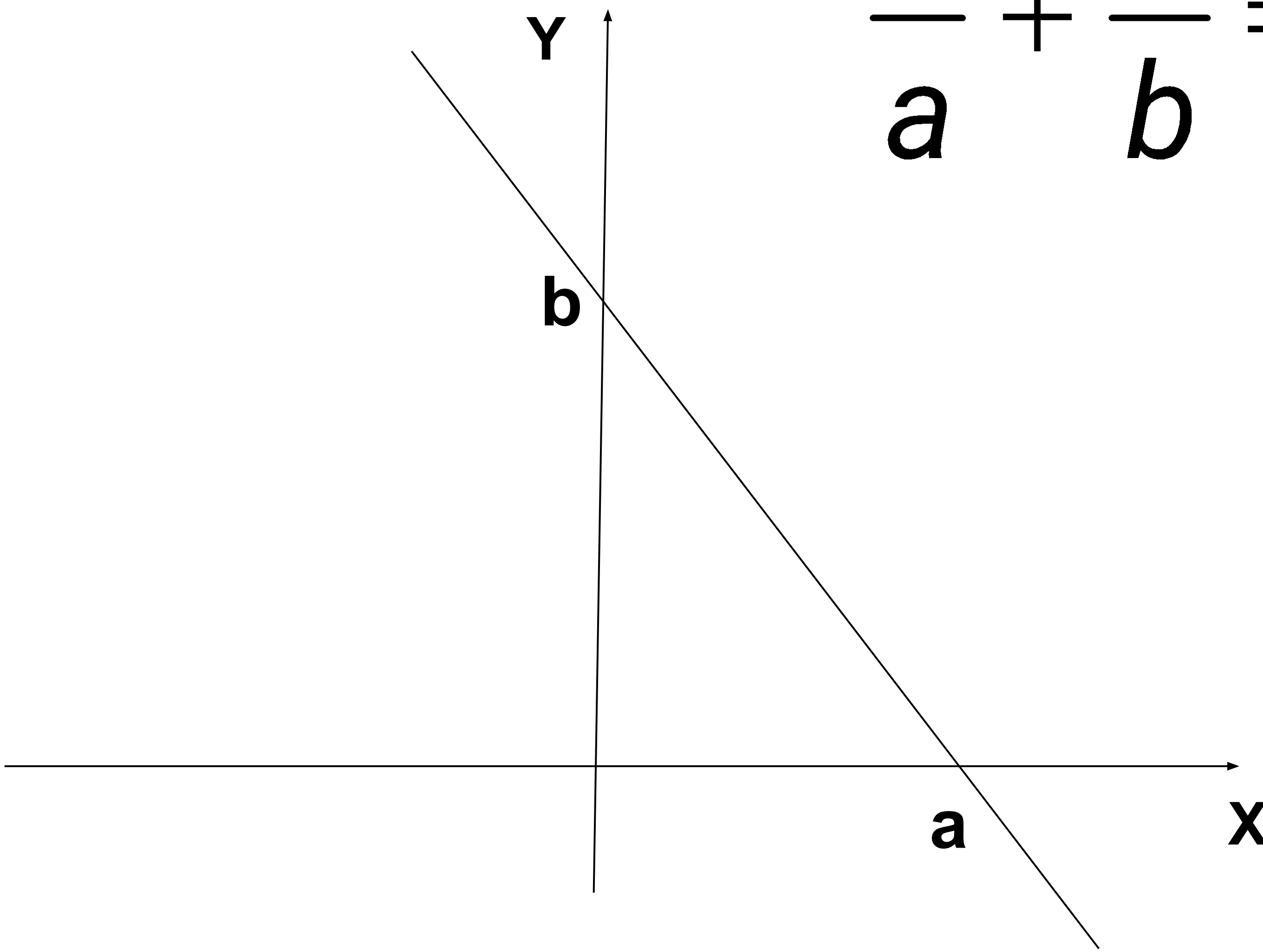
$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

$$a = \frac{-C}{A}, \; b = \frac{-C}{B}$$

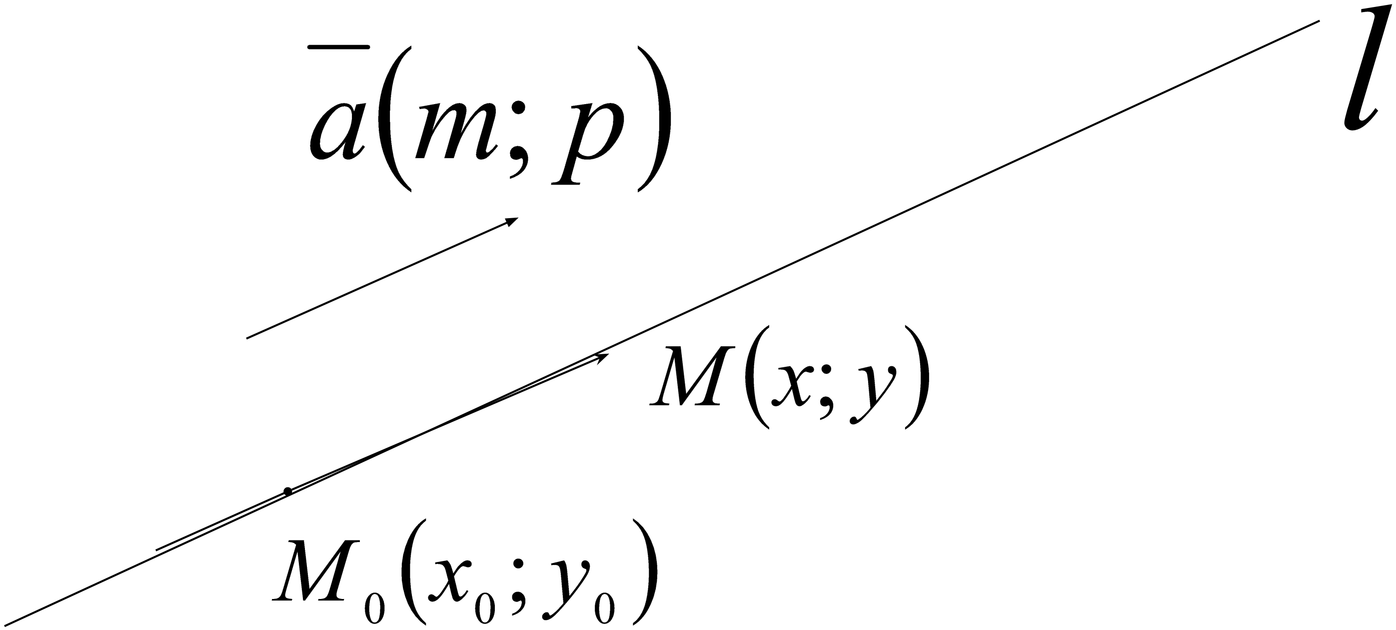
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Каноническое уравнение прямой

$$M_0(x_0; y_0) \in l$$

$$\overline{S} \parallel l$$


$\overline{a}(m; p)$
l
$M(x; y)$
$M_0(x_0; y_0)$

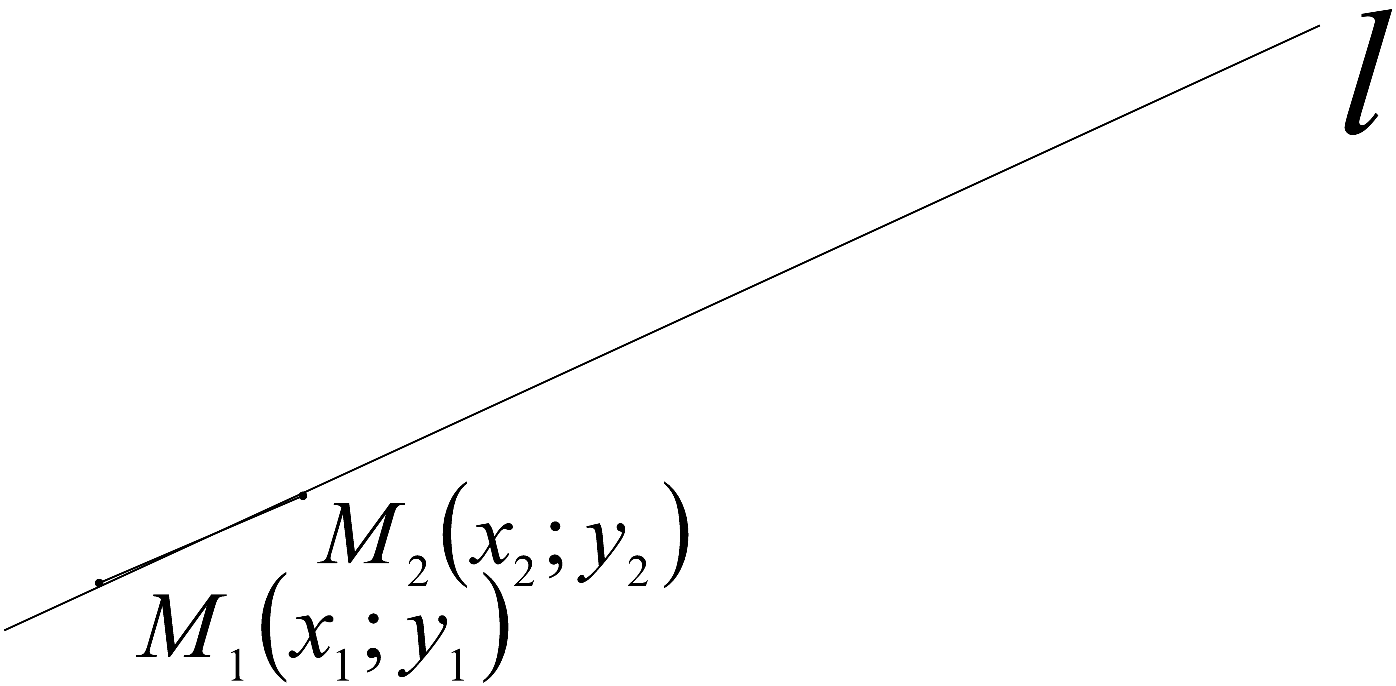
$$\overline{S} \parallel \overline{M_0 M}$$

$$\overline{M_0 M} = \{x - x_0; y - y_0\}$$

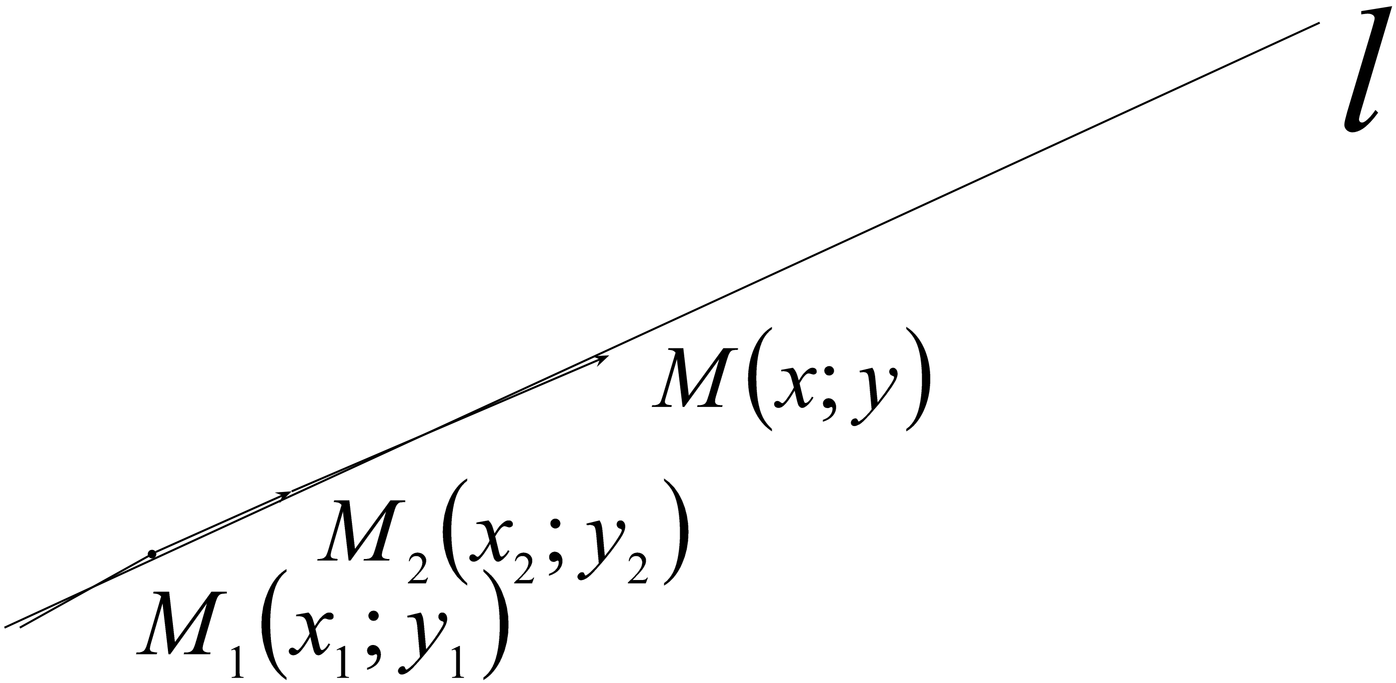
$$\overline{S} = \{m; p\}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки



l
$M_2(x_2; y_2)$
$M_1(x_1; y_1)$


l
$M(x; y)$
$M_2(x_2; y_2)$
$M_1(x_1; y_1)$

$$M_1(x_1; y_1) \in l$$

$$M_2(x_2; y_2) \in l$$

$$M(x; y) \in l$$

$$\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$$

$$\overline{M_1M} = \left\{x - x_1; y - y_1\right\}$$

$$\overline{M_1M_2} = \left\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\right\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Параметрические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = t$$

$$\frac{x - x_0}{m} = t$$

$$\frac{y - y_0}{p} = t$$

$$x = mt + x_0$$

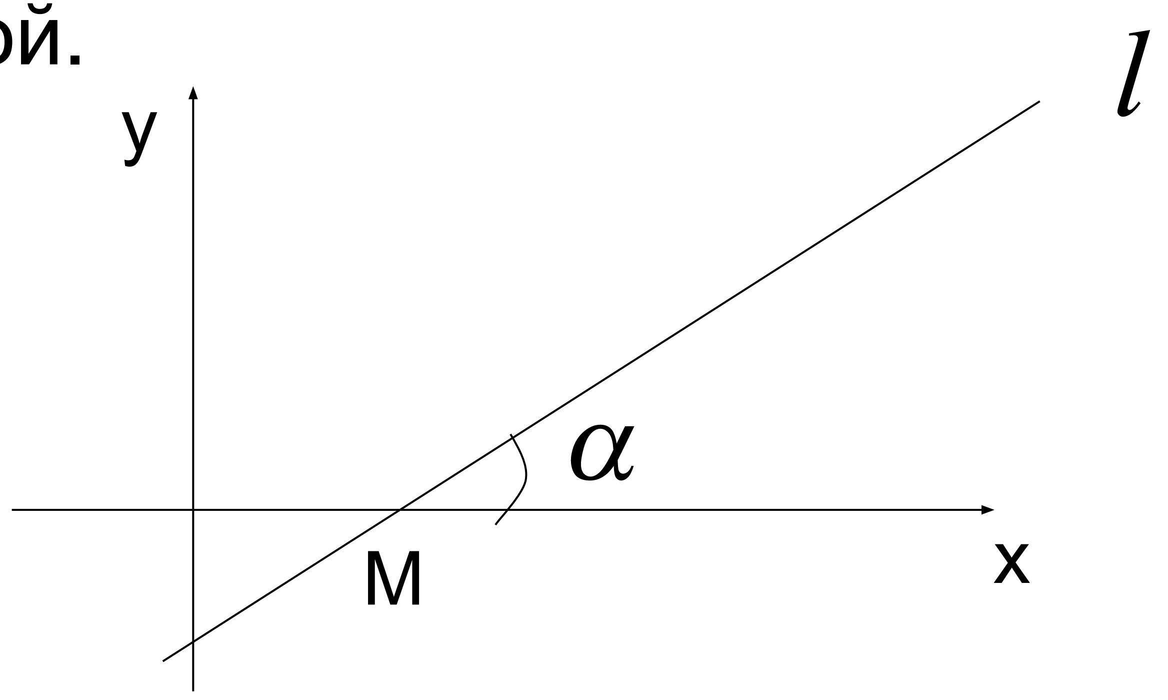
$$y = pt + y_0$$

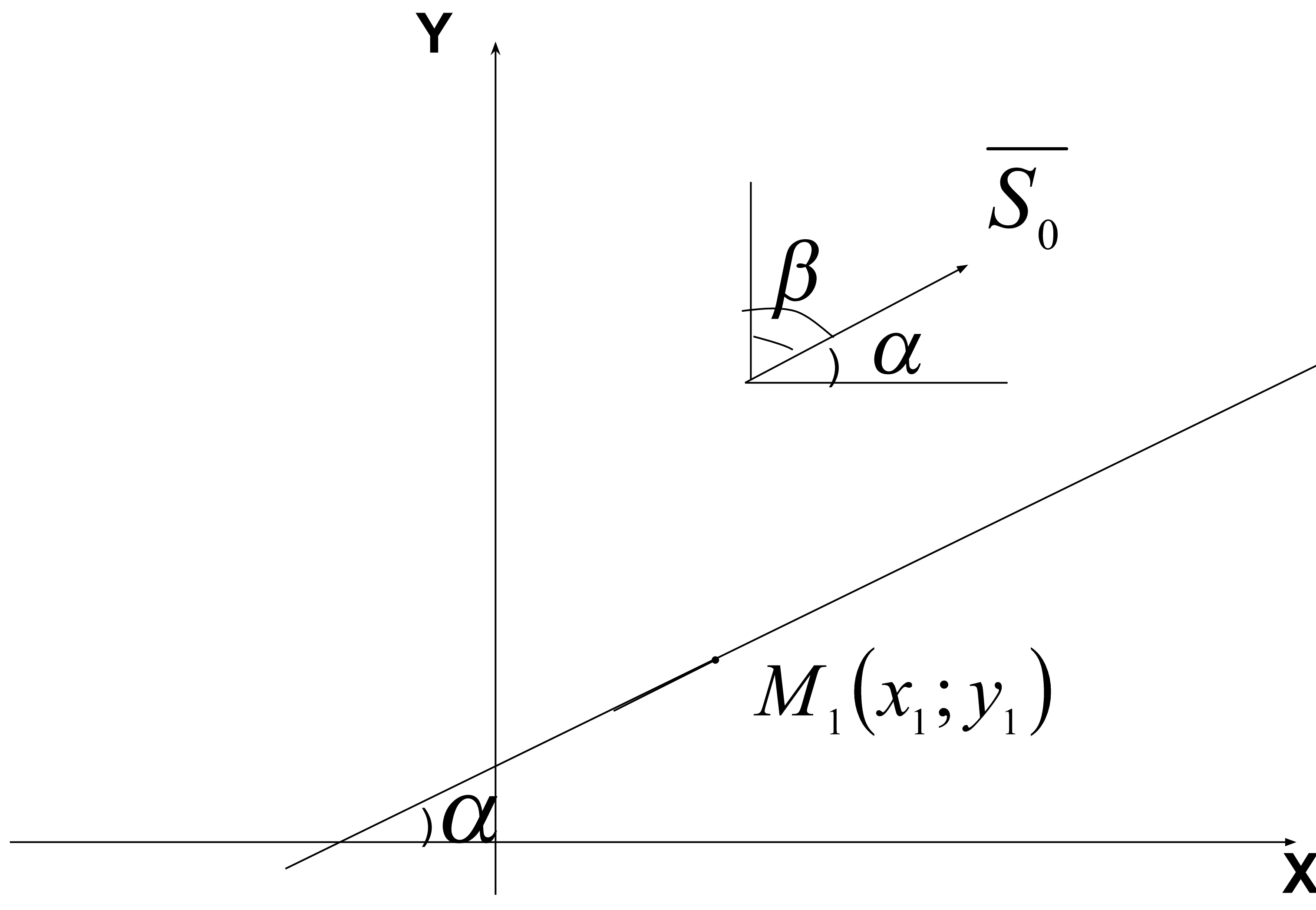
Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b \qquad (7)$$

Уравнение прямой проходящей через точку в заданном направлении

- Углом между осью Ох и прямой l наз. наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки М (против часовой стрелки) ось Ох до совпадения её с прямой.





Y
$\overline{S_0}$
β
α
l
$M_1(x_1;y_1)$
α
X

$$\overline{S_0}(\cos\alpha;\cos\beta)$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\overline{S_0}(\cos\alpha;\sin\alpha)$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha}$$

$$y - y_1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = tg\alpha(x - x_1)$$

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (8)$$

- **Замечание.** Если $l \parallel Oy$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и

$tg\frac{\pi}{2}$ не определен. Уравнение прямой

нельзя записать в виде (8).

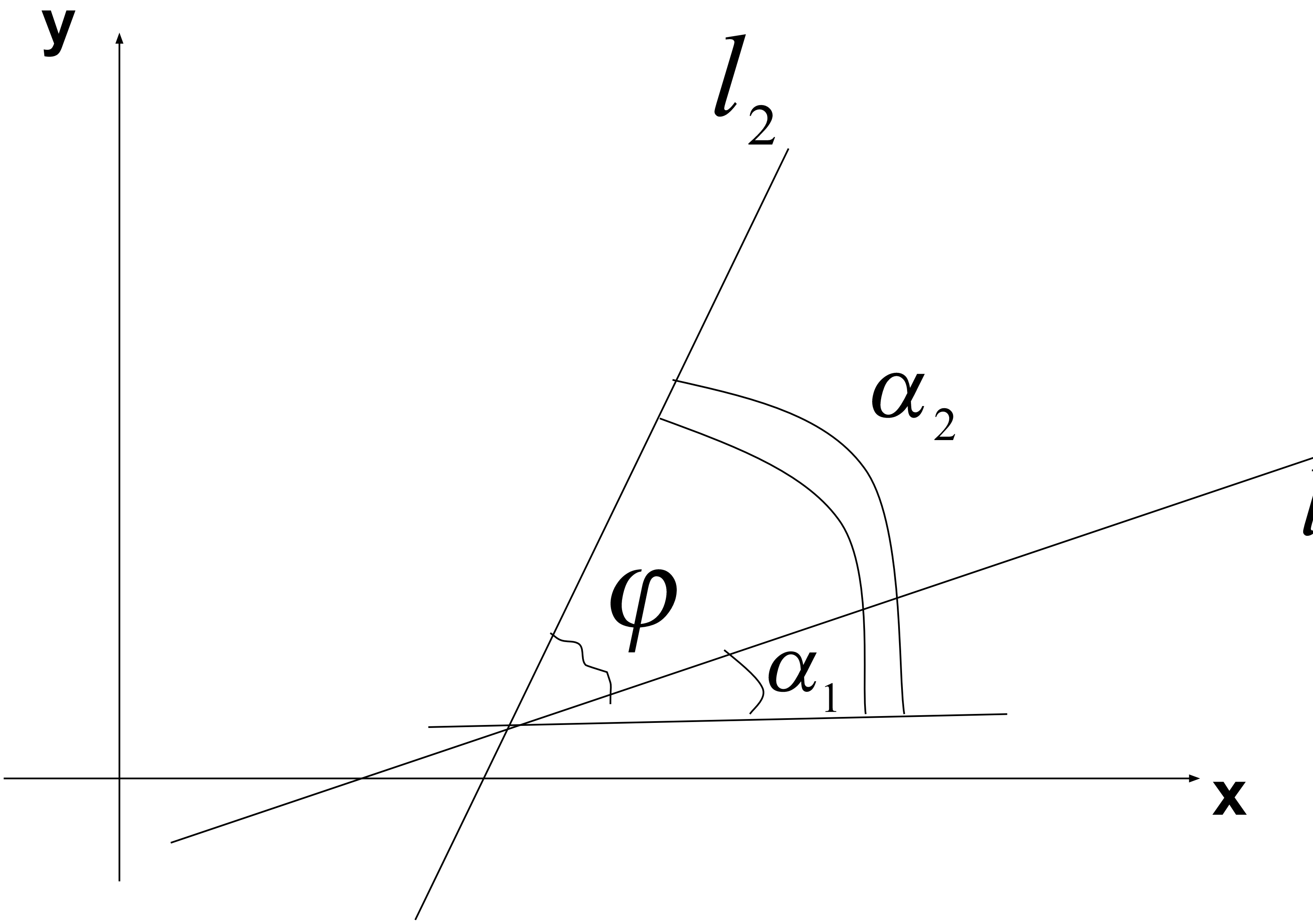
Угол между двумя прямыми

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,\ \overline{n_1}(A_1;B_1)$$

$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ \overline{n_2}(A_2;B_2)$$

$$l_1:\ y=k_1x+b_1$$

$$l_2:\ y=k_2x+b_2$$


y
l_2
α_2
l_1
φ
α_1
x

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

$$\widehat{(l_1, l_2)} = \widehat{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Условие параллельности

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

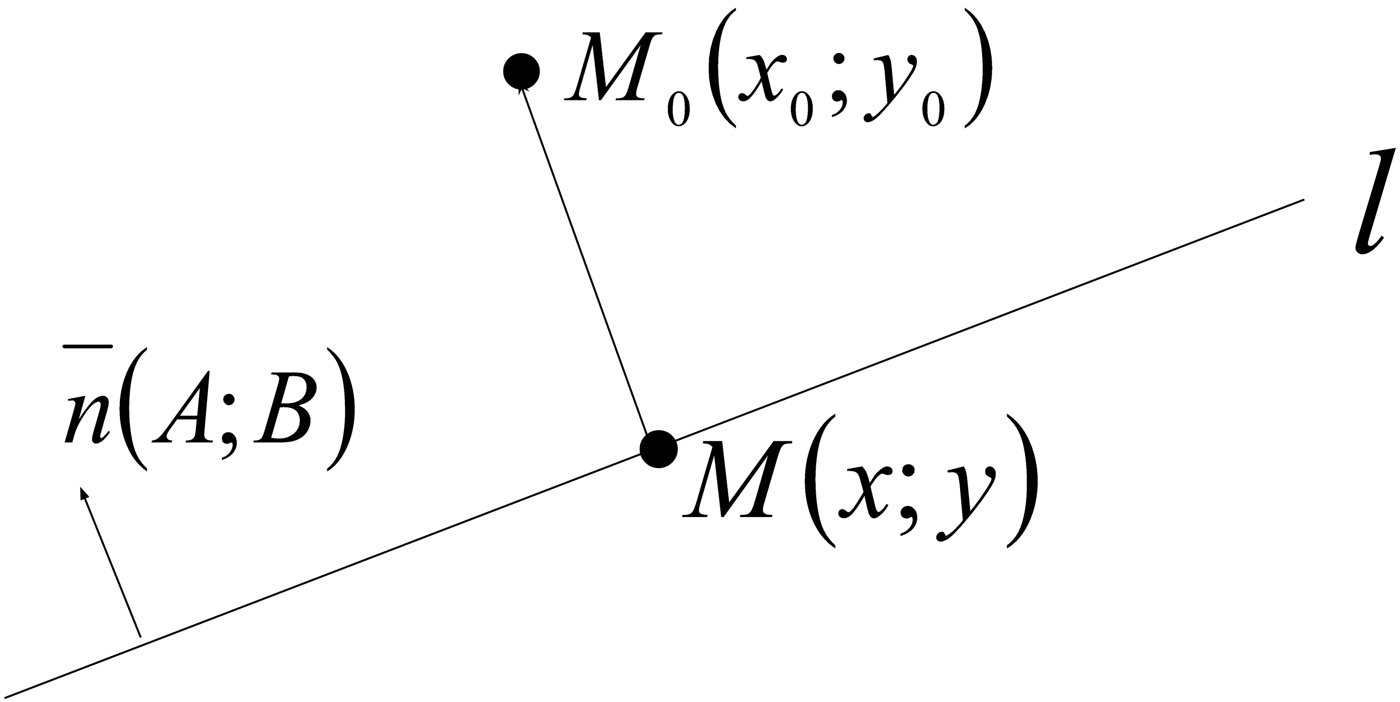
Условие перпендикулярности

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

$$l : Ax + By + C = 0$$



$$\overline{MM_0} = \{x_0 - x; y_0 - y\};$$

$$\bar{n} \cdot \overline{MM_0} = A(x_0 - x) + B(y_0 - y) = Ax_0 - Ax + By_0 - By =$$

$$= Ax_0 + By_0 + (-Ax - By) = Ax_0 + By_0 + C;$$

$$\bar{n} \cdot \overline{MM_0} = |\bar{n}| \cdot |\overline{MM_0}| \cdot \cos\varphi = \pm|\bar{n}| \cdot |\overline{MM_0}|;$$

$$\pm\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{MM_0}\right| = Ax_0 + By_0 + C;$$

$$\left|\overline{MM_0}\right| = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\left|\overline{n}\right|}$$

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$