Линейная алгебра

Лекции

Глава 1. Матрицы, определители, СЛАУ

- Матричное исчисление широко используется в различных областях математики (решение систем линейных уравнений, векторная алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей), механики, электротехники, теоретической физики и т.д. Матричное исчисление позволяет в компактной форме получить решение реальных задач, содержащих большое количество переменных.

§ 1. Матрицы. Действия над матрицами

- ***Опр.*** **1.** *Матрицей* называется прямоугольная таблица.
- Обозначают матрицы заглавными латинскими буквами A, B, C и т.д.
- Если м. содержит *m* строк и *n* столбцов, то таблица называется *матрицей размера (формата) m x n* (читается «эм на эн»). Матрицу записывают в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица-строка и матрица-столбец

- **Опр.2**. Матрица размером $1 \times n$ наз. матрицей-строкой.
- Например: матрица B=(5 6 9), размер 1 X 3.

- **Опр.3**. Матрица размером $m \times 1$ наз. матрицей-столбцом.
- Например: Матрица $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Размер 3 X 1.

Квадратные матрицы

- **Опр. 4**. Матрица наз. квадратной, если число её строк равно числу её столбцов, т.е. *m=n.* Число *n* называют порядком квадратной матрицы. Например, при *n=3* квадратная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Элементы квадратной матрицы, для которых номера строки и столбца совпадают, называются диагональными, а диагональ матрицы, на которой они находятся, называется главной диагональю.

Виды квадратных матриц

- 1. Верхняя треугольная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 2. Нижняя треугольная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 3. Диагональная матрица (все элементы матрицы, кроме главной диагонали, нулевые)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 4. Единичная матрица (на главной диагонали – единицы, все остальные элементы нулевые)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- 5. Нулевая матрица (все элементы нулевые):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- 6. Симметричная матрица (симметрия элементов относительно главной диагонали)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Действия с матрицами

- 1. Сложение и вычитание матриц.
- **Опр. 5.** Суммой (разностью) двух матриц А и В одинакового размера называется матрица С=А+В (С=А-В), элементы которой вычисляются по правилу:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

2. Произведение матрицы на число.

- **Опр. 6**. Произведением матрицы А на число α называется матрица αB , элементы которой вычисляются по правилу $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

3. Транспонирование матрицы.

- **Опр. 7**.Транспонированием матрицы называется преобразование, состоящее в замене строк столбцами с сохранением их номеров.

4. Умножение матриц

- **Опр. 8**. Произведением матриц A и B,   ,

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times p} \qquad B=\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$$

наз. матрица C=A ⋅B, элементы которой вычисляются по правилу:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$$

$$i=\overline{1,m} \qquad j=\overline{1,n}$$

- Замечание 1. Произведение матриц определено т. и т.т., когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.
- Замечание 2. Элемент c_{ij} матрицы произведения равен сумме произведений элементов i – строки первой матрицы на соответствующие элементы j – столбца второй матрицы.
- Замечание 3. В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$
- **Опр. 9**. Матрицы, для которых выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A$ называются коммутативными или перестановочными.

Свойства операции умножения матриц

$$1. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

$$2. (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

$$3. A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

$$4. A \cdot E = E \cdot A.$$

$$5. A \cdot \theta = \theta \cdot A = \theta.$$

$$6. (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

5. Возведение матрицы в степень.

- Возводятся в степень только квадратные матрицы.
- Возведение матрицы в степень сводится к операции умножения матриц.