РАЗДЕЛ 6

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1.1 ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

или, что тоже,

$$dF(x) = f(x)dx \tag{1.2}$$

Например, $F(x) = \sin x$ является первообразной для $f(x) = \cos x$ на всей числовой оси Ox, так как

$$(\sin x)' = \cos x$$

Теорема 1.1 Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$, то всякая другая первообразная для $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянное слагаемое, то есть может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C постоянная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на $[a;b]$, то выражение $F(x)+C$, где C произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: неопределенный интеграл от $f(x)$ на dx). Итак,

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad , \qquad (1.3)$$

где $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, а символ $\int$ - знаком неопределенного интеграла.

Отыскание всех первообразных или отыскание неопределенного интеграла для данной функции $f(x)$ называют интегрированием этой функции.

1.2 ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1^0 Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (1.4)$$

Действительно, $F'(x) = f(x)$ и согласно (1.3) $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$.

2^0 Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (1.5)$$

Действительно, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = f(x)dx$.

3^0 Неопределенный интеграл от производной равен самой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \qquad (1.6)$$

Действительно, $F'(x) = f(x)$. Тогда, $\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ согласно определения 1.2.

4^0 Неопределенный интеграл от дифференциала равен дифференцируемой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (1.7)$$

Действительно, $dF(x) = f(x)dx$. Тогда, $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

5^0 Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx. \tag{1.8}$$

6^0 Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функции равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_k(x)\right]dx = \\ = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\ldots+\int f_k(x)dx \qquad (1.9)$$

1.3 ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1 $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \in R,\ \alpha \neq -1$ (1.10)

2 $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (1.11)

3 $\int dx = x + C$ (1.12)

4 $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$ (1.13)

5 $\int e^{x} dx = e^{x} + C$ (1.14)

6 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ (1.15)

7 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ (1.16)

8 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$ (1.17)

9 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$ (1.18)

10 $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$ (1.19)

11 $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ a \neq 0$ (1.20)

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$ (1.21)

13 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,\ a \neq 0$ (1.22)

14 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ a \neq 0$ (1.23)

15 $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$ (1.24)

16 $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$ (1.25)

17 $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ (1.26)

18 $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ (1.27)

19 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ (1.28)

20 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ (1.29)

Например, для формулы (1.22) имеем

$$\left(\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Из равенства производных и следует справедливость равенства (1.22).

1.4 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
1.4.1 Интегрирование методом разложения

Пример 1.1 Найти $\int \frac{x^3 + 5x - 2}{x} dx$.

Решение.

Разделив почленно числитель на знаменатель в подынтегральной функции, получим $\frac{x^3 + 5x - 2}{x} = x^2 + 5 - \frac{2}{x}$; тогда, согласно (1.8) и (1.9) имеем

$$\int \frac{x^3 + 5x - 2}{x} dx = \int x^2 dx + \int 5dx - \int \frac{2}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 5x - 2\ln|x| + C$$

Пример 1.2 Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx +$$

$$+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

Пример 1.3 Найти $\int \frac{dx}{x^2\left(9+x^2\right)}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x^2\left(9+x^2\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{9dx}{x^2(9+x^2)} = \frac{1}{9}\int \frac{9+x^2-x^2}{x^2(9+x^2)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{9+x^2}{x^2(9+x^2)}dx -$$

$$-\frac{1}{9}\int \frac{x^2}{x^2(9+x^2)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{9+x^2} = -\frac{1}{9x} - \frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$$

Пример 1.4 Найти $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \left(x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}} \right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} + C$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций используются тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x,\ \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,\ \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right],$$

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x = \sin x - \cos^2 x \sin x,$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2},\ 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$ и другие.

1) $$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \underbrace{\int \frac{dx}{\cos^2 x}}_{\text{интеграл 8}} - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x -$$

$$- \underbrace{\int dx}_{\text{интеграл 1}} = \operatorname{tg} x - x + C$$

2) $$\int \frac{dx}{1-\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{\sin^2 x}}_{\text{интеграл 9}} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$$

3) $$\int (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x)dx = \int \frac{\pi}{2}dx = \frac{\pi}{2}\int dx = \frac{\pi}{2}x + C$$

4) $$\int 5\cos^2 \frac{x}{2}dx = \frac{5}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{5}{2}\left(\int dx + \int \cos x\,dx\right) = \frac{5}{2}(x+\sin x) + C$$

5) $$\int \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\cos 8x}dx = \int \frac{2\cos\frac{9x+7x}{2}\cdot\cos\frac{9x-7x}{2}}{\cos 8x}dx =$$

$$= 2\int \frac{\cos 8x\cdot\cos x}{\cos 8x}dx = 2\int \cos x\,dx = 2\sin x + C$$

6) $$\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C$$

$$1)\ \int\frac{dx}{10+x^2}=\int\frac{dx}{\underbrace{\left(\sqrt{10}\right)^2+x^2}_{\text{интеграл 10}}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}}+C$$

$$2)\ \int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=\int\frac{dx}{\underbrace{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-x^2}}_{\text{интеграл 12}}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$$

$$3)\ \int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}}+C$$

$$4)\ \int\frac{dx}{9-x^2}=\int\frac{dx}{\underbrace{3^2-x^2}_{\text{интеграл 11}}}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$$

$$5)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm16}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm16}\right|+C$$

Метод введения функции под знак дифференциала

Из дифференциального исчисления известно, что дифференциал функции f(x) вычисляется по формуле $d[f(x)] = f'(x)\,dx$. Использование этой формулы в обратном поряд

$$\boxed{f'(x)\,dx = d[f(x)]}$$

называется ***введением функции под знак дифференциала***. Таким образом, для известных функций справедливы следующие формулы:

$dx = d(x \pm C)$, $dx = \frac{1}{a} d(a \cdot x + b)$, где a, b, c = Const,

$e^x dx = d(e^x)$, $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$, $\operatorname{Sin} x\, dx = -d(\operatorname{Cos}$

$\operatorname{Cos} x\, dx = d(\operatorname{Sin} x)$, $\frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$, $\frac{dx}{\operatorname{Sin}^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$

$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(\operatorname{arccos}$

$$\int (x+3)^5\,dx = \begin{vmatrix} n=5 \\ dx = d(x+3) \end{vmatrix} = \int (x+3)^5\,d(x+3) = \frac{(x+3)^{5+1}}{5+1} + C =$$

$$= \frac{(x+3)^6}{6} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \int (x-3)^{-1/2}\,dx = \int (x-3)^{-1/2}\,d(x-3) = 2\cdot(x-3)^{1/2} + C =$$

$$= 2\cdot\sqrt{x-3} + C$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+5x+3)^2}\,dx = \int (\underbrace{x^2+5x+3}_{u})^{-2}\cdot\underbrace{(2x+5)dx}_{du} =$$

$$= \int (\underbrace{x^2+5x+3}_{u})^{-2}\cdot d(\underbrace{x^2+5x+3}_{u}) = \frac{(x^2+5x+3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x^2+5x+3} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^2} = \int (5x-2)^{-2}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\int (5x-2)^{-2}\,5dx = \begin{vmatrix} dx = \frac{1}{5}\cdot 5dx = \frac{1}{5}\,d(5x-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\int (\underbrace{5x-2}_{u})^{-2}\,\underbrace{d(5x-2)}_{du} = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{5\cdot(5x-2)} + C$$

$$\int \sin^2 x\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{d(\sin x)} = \int \underbrace{\sin^2 x}_{u^2}\cdot\underbrace{d(\sin x)}_{du} = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 2.6 Применяя формулу,
найти следующие интегралы:

Решение.

1). $$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d\overbrace{(x+1)}^{u}}{\underbrace{x+1}_{u}} = \ln|x+1| + C.$$

2). $$\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{d\overbrace{(x^2+1)}^{u}}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \ln(x^2+1) + C.$$

3). $$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d\overbrace{(x^2+1)}^{u}}{\underbrace{x^2+1}_{u}} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) + C.$$

4). $$\int \frac{4x^2}{8x^3+19}dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{6 \cdot 4x^2}{8x^3+19}dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{d\overbrace{(8x^3+19)}^{u}}{\underbrace{8x^3+19}_{u}} = \frac{1}{6} \cdot \ln\left|8x^3+19\right|$$

5). $$\int \frac{\operatorname{Sin} x}{1+\operatorname{Cos} x}dx = \int \frac{-d(\operatorname{Cos} x+1)}{\underbrace{1+\operatorname{Cos} x}_{u}} = -\ln(1+\operatorname{Cos} x) + C.$$

6). $$\int \frac{e^x dx}{5+e^x} = \int \frac{d(e^x+5)}{e^x+5} = \ln(e^x+5) + C.$$

Пример 2.7 Применяя формулу, найти следующие интегралы:

$$\boxed{\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C}$$

Решение.

1).

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

2).

$$\int 3^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x) \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int 3^{2x} d(\underbrace{2x}_{u}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x}}{\ln 3} + C.$$

3).

$$\int 2^{5x+4} dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot d(5x+4) \end{array} \right| = \frac{1}{5} \cdot \int 2^{5x+4} \cdot d(\underbrace{5x+4}_{u}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x+4}}{\ln 2} + C.$$

4).

$$\int e^{\sin x} \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{d(\sin x)} = \int e^{\sin x} \cdot d(\underbrace{\sin x}_{u}) = e^{\sin x} + C.$$

5).

$$\int \frac{e^{tg\, x} dx}{\cos^2 x} = \left| \frac{dx}{\cos^2 x} = d(tg\, x) \right| = \int e^{tg\, x} \cdot d(tg\, x) = e^{tg\, x} + C.$$

Рассмотрим примеры на внесение функции под знак дифференциала с использованием других табличных интегралов.

Пример 2.8 Найти интегралы:
Решение.

1).
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\cdot \mathrm{arctg}\,x} = \left| \frac{dx}{1+x^2} = d\,(\mathrm{arctg}\,x) \right| = \int \frac{\overbrace{d(\mathrm{arctg}\,x)}^{u}}{\underbrace{\mathrm{arctg}\,x}_{u}} = \ln\left|\mathrm{arctg}\,x\right| +$$

2).
$$\int \frac{\arcsin^2 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\,(\arcsin x) \right| = \int (\underbrace{\arcsin x}_{u})^2 \cdot d\,(\underbrace{\arcsin x}_{u}$$
$$= \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

3).
$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x} = \int \frac{dx}{2\cdot \mathrm{Sin}\frac{x}{2}\cdot \mathrm{Cos}\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\dfrac{\mathrm{Sin}\frac{x}{2}}{\mathrm{Cos}\frac{x}{2}}\cdot 2\cdot \mathrm{Cos}^2\frac{x}{2}} =$$
$$= \left| \begin{array}{l} \text{умножили и разделили знаменатель} \\ \text{на } \mathrm{Cos}\frac{x}{2}, \quad \dfrac{dx}{2\cdot \mathrm{Cos}^2\frac{x}{2}} = d\,(\mathrm{tg}\frac{x}{2}) \end{array} \right| = \int \frac{d\,(\mathrm{tg}\frac{x}{2})}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| +$$

4).
$$\int \mathrm{Sin}\,5x\,dx = \left| dx = \frac{1}{5}\cdot 5\,dx = \frac{1}{5}\,d\,(5x) \right| = \frac{1}{5}\cdot \int \mathrm{Sin}\,\underbrace{5x}_{u}\,d\,(\underbrace{5x}_{u}) = -\frac{1}{5}\,\mathrm{Cos}\,5x$$

5).
$$\int \mathrm{Cos}(3x-7)\,dx = \left| dx = \frac{1}{3}\cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\,d\,(3x-7) \right| =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot \int \mathrm{Cos}(\underbrace{3x-7}_{u})\,d\,(\underbrace{3x-7}_{u}) = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{Sin}\,(3x-7) + C.$$

1).

$$\int \operatorname{tg} 2x\,dx = \int \frac{\operatorname{Sin} 2x\,dx}{\operatorname{Cos} 2x} = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{d(\operatorname{Cos} 2x)}{\operatorname{Cos} 2x} = -\frac{1}{2}\cdot \ln\left|\operatorname{Cos} 2x\right| + C.$$

2).

$$\int \frac{2x\,dx}{9+x^4} = \int \frac{d(\overbrace{x^2}^{u})}{3^2+(\underbrace{x^2}_{u})^2} = \left|\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C\right| = \frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x^2}{3} +$$

3).

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left|x\,dx = -\frac{1}{2}d(1-x^2)\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{d\overbrace{(1-x^2)}^{u}}{\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{u}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$