Элементы линейной алгебры

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1). **Определитель второго порядка** равен разности произведения элементов, стоящих на главной и побочной диагонали.

Определители второго порядка обозначаются символами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

a_{11}, a_{22} – главная диагональ

a_{21}, a_{12} – побочная диагональ

a_{ij} – элементы определителя

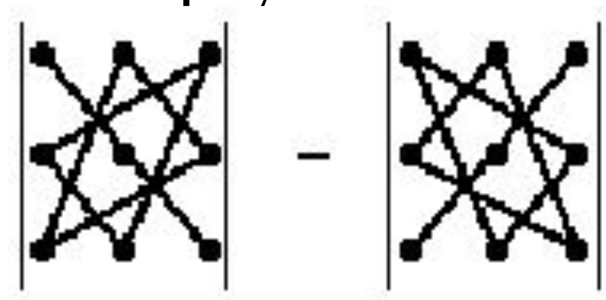
i – номер строки

J – номер столбца

2). Определители третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + \\ + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - \\ - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} \end{array}$$

Определители третьего порядка вычисляются с помощью правила треугольников:



Свойства определителей

1) При умножении элементов любого столбца определителя на число α, его величина умножается на это же число.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_x & b_x \\ \alpha a_y & b_y \end{vmatrix} = (\alpha a_x) b_y - (\alpha a_y) b_x = \alpha (a_x b_y - a_y b_x) = \alpha \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

2) При перестановке строк определитель изменяет знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_x & a_x \\ b_y & a_y \end{vmatrix}$$

3) Если один из столбцов определителя равен нулю, то и определитель равен нулю.

4) Если к одному из столбцов определителя прибавить другой, умноженный на произвольное число, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x + \alpha a_x \\ a_y & b_y + \alpha a_y \end{vmatrix}$$

5) Если один из столбцов определителя $|\bar{a}, \bar{b}|$ может быть представлен в виде суммы столбцов $|\bar{a}, \bar{b}| = |\bar{a}' + \bar{a}'', \bar{b}|$, то определитель $|\bar{a}, \bar{b}|$ равен сумме определителей $|\bar{a}', \bar{b}|$ и $|\bar{a}'', \bar{b}|$:

$$|\bar{a}, \bar{b}| = |\bar{a}' + \bar{a}'', \bar{b}| = |\bar{a}', \bar{b}| + |\bar{a}'', \bar{b}|$$

6) Определитель с одинаковыми строками равен нулю.

7) Определитель с пропорциональными строками равен нулю.

Минором любого элемента определителя называется определитель , полученный вычеркиванием строки и столбца на пересечении которых находится данный элемент.

Алгебраическим дополнением называется минор, взятый со своим знаком:

- если сумма номеров строки и столбца на пересечении которых находится данный элемент число четное, то ставится знак +
- если сумма номеров строки и столбца на пересечении которых находится данный элемент число нечетное, то ставится знак -

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Любой определитель можно представить в виде суммы произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot (2+6)+1\cdot (7-9)+4 \cdot(-14-6) = 16-2-80 = -66$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot (-6+12)-2\cdot (-2+6)+2 \cdot (-12+18) = 10$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

x_1, x_2 - неизвестные

a_{ij} – коэффициенты

b_1, b_2 – свободные члены

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Если определитель Δ не равен 0, то система имеет единственное решение, которое находится по формуле:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_{x1}}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x2}}{\Delta} \end{cases}$$

Формула Крамера

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 - неизвестные

a_{ij} - коэффициенты

b_1, b_2, b_3 - свободные члены

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Если определитель Δ не равен 0, то система имеет единственное решение, которое находится по формуле:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\Delta_{x1}}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x2}}{\Delta} \\ x_3 = \dfrac{\Delta_{x3}}{\Delta} \end{array}\right.$$

МАТРИЦЫ

Матрицей называется система элементов, расположенных в определенном порядке и образующих таблицу.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элементы определителя

i – номер строки

j – номер столбца

Данная матрица имеет размер $m\times n$.

ВИДЫ МАТРИЦ

1. **Квадратной матрицей** n-го порядка называется матрица размера n×n.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. **Прямоугольной матрицей** называется матрица, в которой m≠n.
3. **Единичной** (обозначается E) называется матрица с единицами на главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Нулевой** называется матрица, все элементы которой равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрица-строка.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

6. Матрица, состоящая из одного столбца, называется **матрица-столбец.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

7. **Транспонированная матрица** (A^T) — матрица, полученная из исходной матрицы заменой строк на столбцы.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

8. Две матрицы А и В называются **равными** (А=В), если они одинакового размера (т.е. имеют одинаковое количество строе и одинаковое количество столбцов и их соответствующие элементы равны).

Действия над матрицами

1) **Произведением матрицы на число** называется матрица, полученная из исходной умножением каждого ее элемента на заданное число.

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

2) **Суммой матриц** А и В одного размера называется матрица С=А+В такого же размера, получаемая из исходных путем сложения соответствующих элементов.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

3) **Произведением** матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$ такая, что элемент матрицы C, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Две матрицы можно перемножать тогда и только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Обратная матрица

Обратная матрица — такая матрица A^{-1}, при умножении на которую, исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Определитель матрицы A не должен быть равен 0.

Формула нахождения обратной матрицы A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{A^{T}}{\Delta_A}$$