Математический диктант:

31.10.13

1.Сколько точек характеризуют прямую?

(Две. Через одну точку проходит бесчисленное множество прямых).

2.Верно ли, что через любую точку пространства можно провести множество прямых, параллельных данной прямой?

(Нет. По теореме о существовании прямой, параллельной данной прямой, через точку пространства можно провести единственную прямую).

3.Закончите фразу: “Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то другая эту плоскость…

(Так же пересекает – по лемме о пересечении плоскости двумя параллельными прямыми).

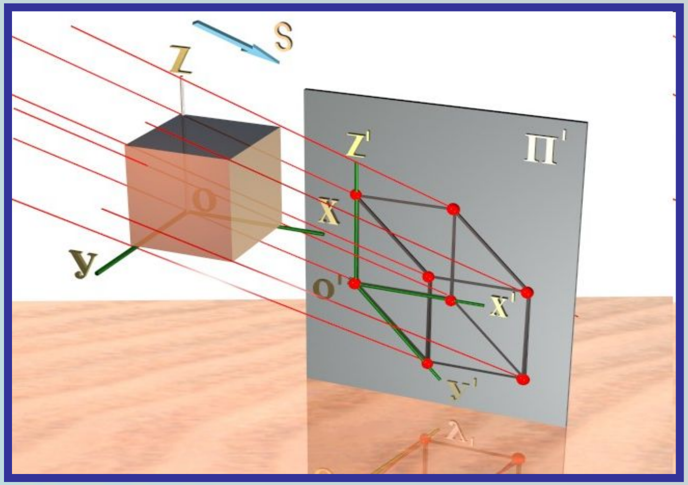
4.Верно ли утверждение, что две не пересекающиеся прямые в пространстве, параллельны?

(Нет. В пространстве не имеют общих точек параллельные и скрещивающиеся прямые).

5. Верно ли утверждение, что если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?

(Нет, они могут так же пересекаться и быть скрещивающимися).

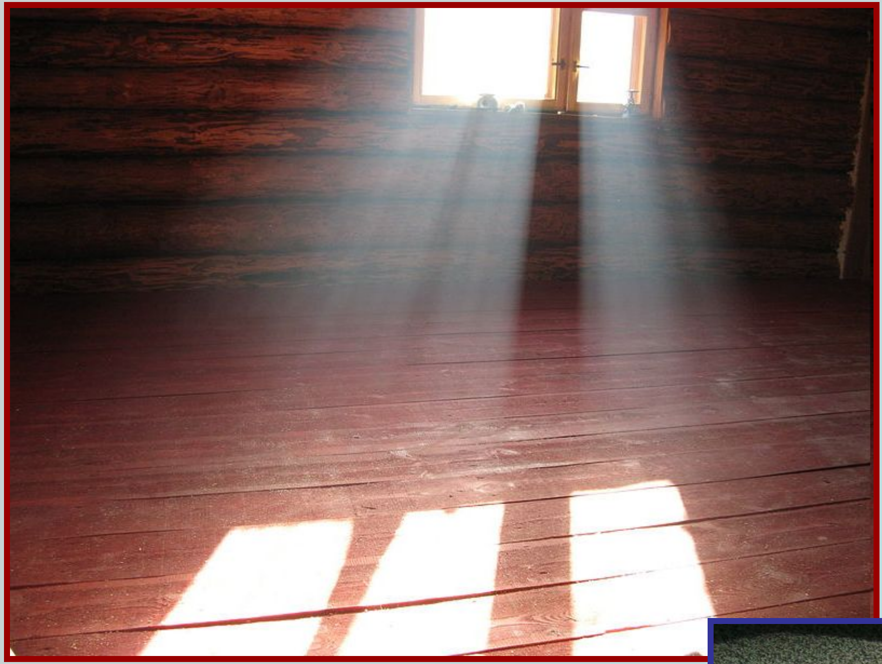
31.10.13



Параллельное проектирование

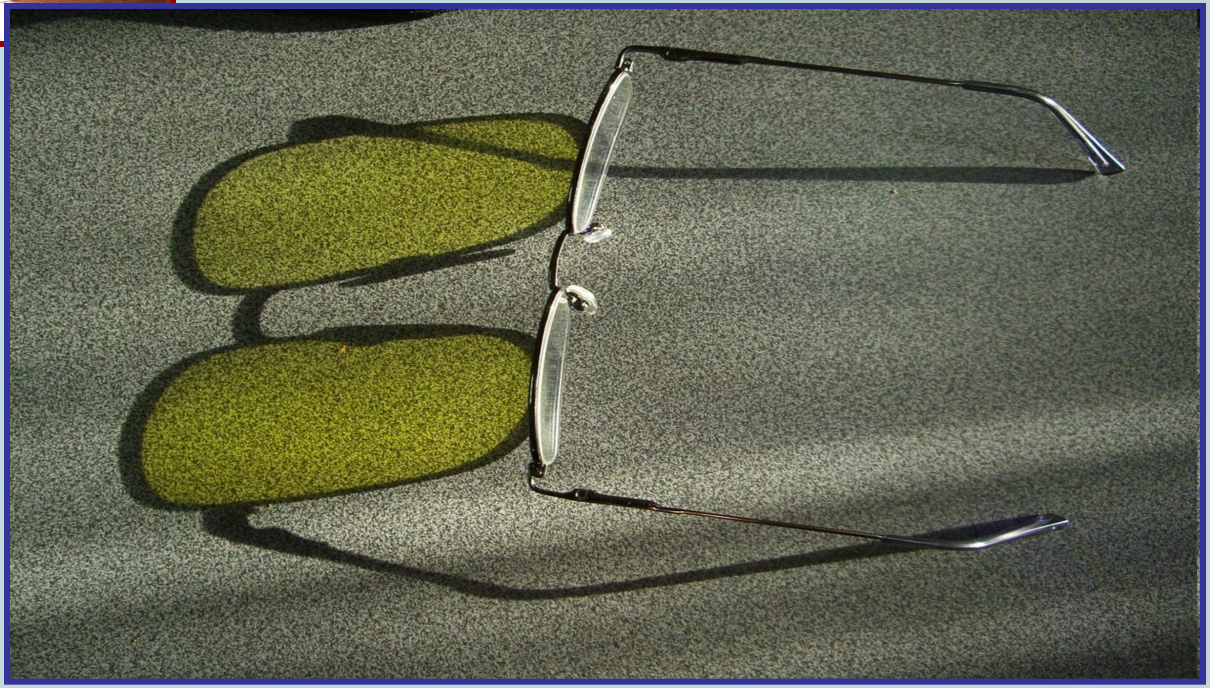
Параллельное проектирование

Параллельное проектирование



Вполне возможно, что идея параллельного проектирования подсказана математикам именно механизмом образования солнечных теней .

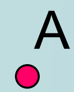
Слово ***проекция*** в переводе с латинского означает ***бросание вперед , вдаль.***



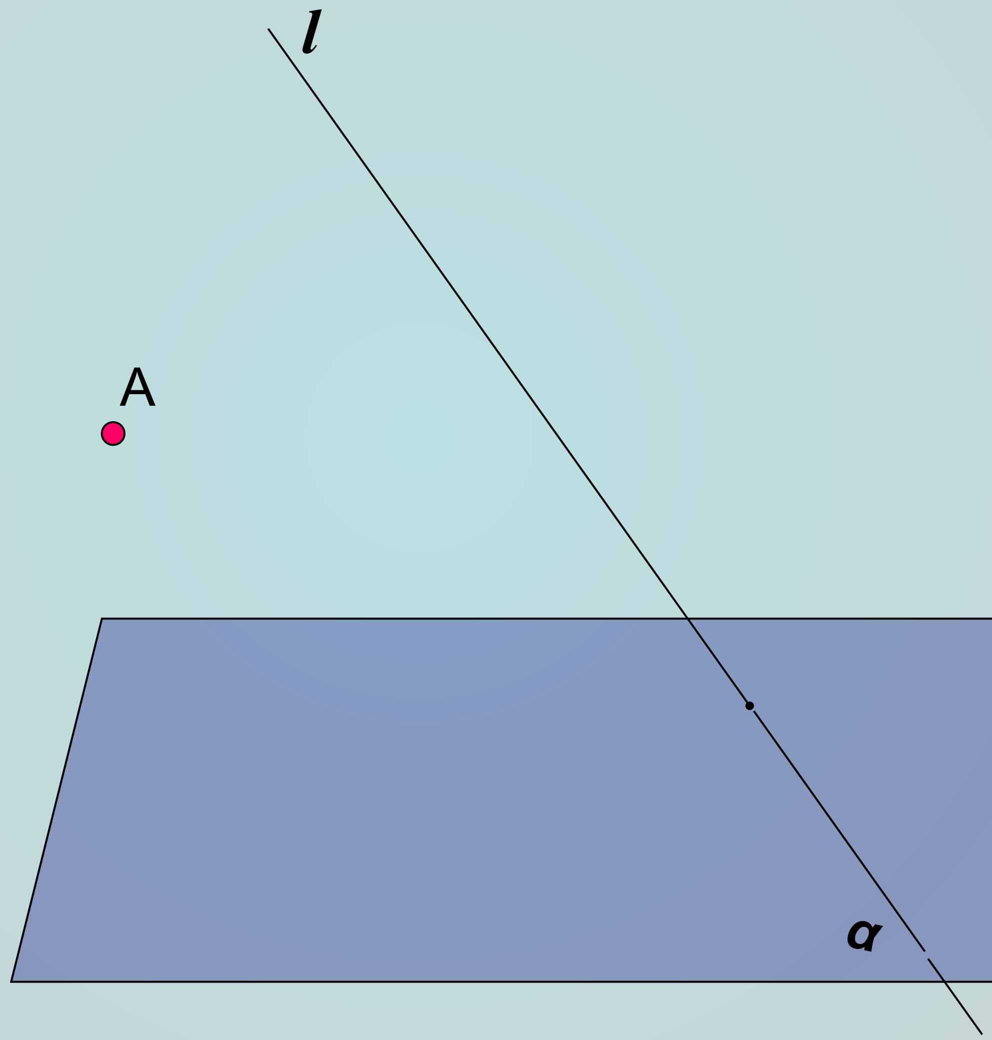
Стереометрия – это геометрия в пространстве. Нам необходимо уметь изображать геометрические фигуры, причем все чертежи мы по-прежнему выполняем на плоскости (на странице тетради, на доске и т.д.). Каким образом пространственную фигуру (например, куб) можно «уложить» в плоскость?

Для этого применяется ***метод параллельного проектирования.*** Выясним его суть на примере простейшей геометрической фигуры – точки.

Итак, у нас есть геометрическая фигура в пространстве – точка А.

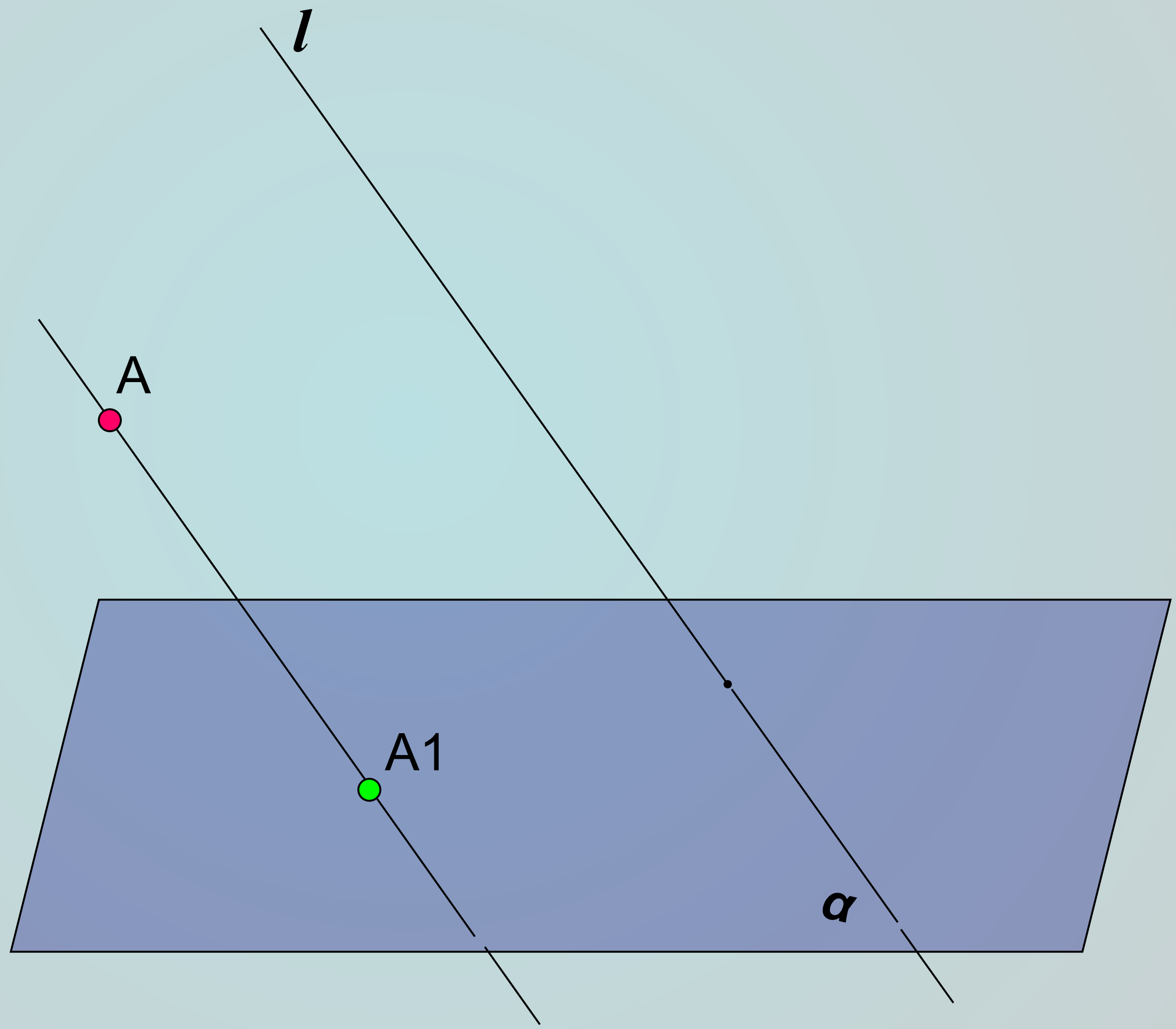


Выберем в пространстве произвольную плоскость α (***плоскость проекций***)
и любую прямую $l \cap \alpha$ (она определяет ***направление параллельного проектирования***).

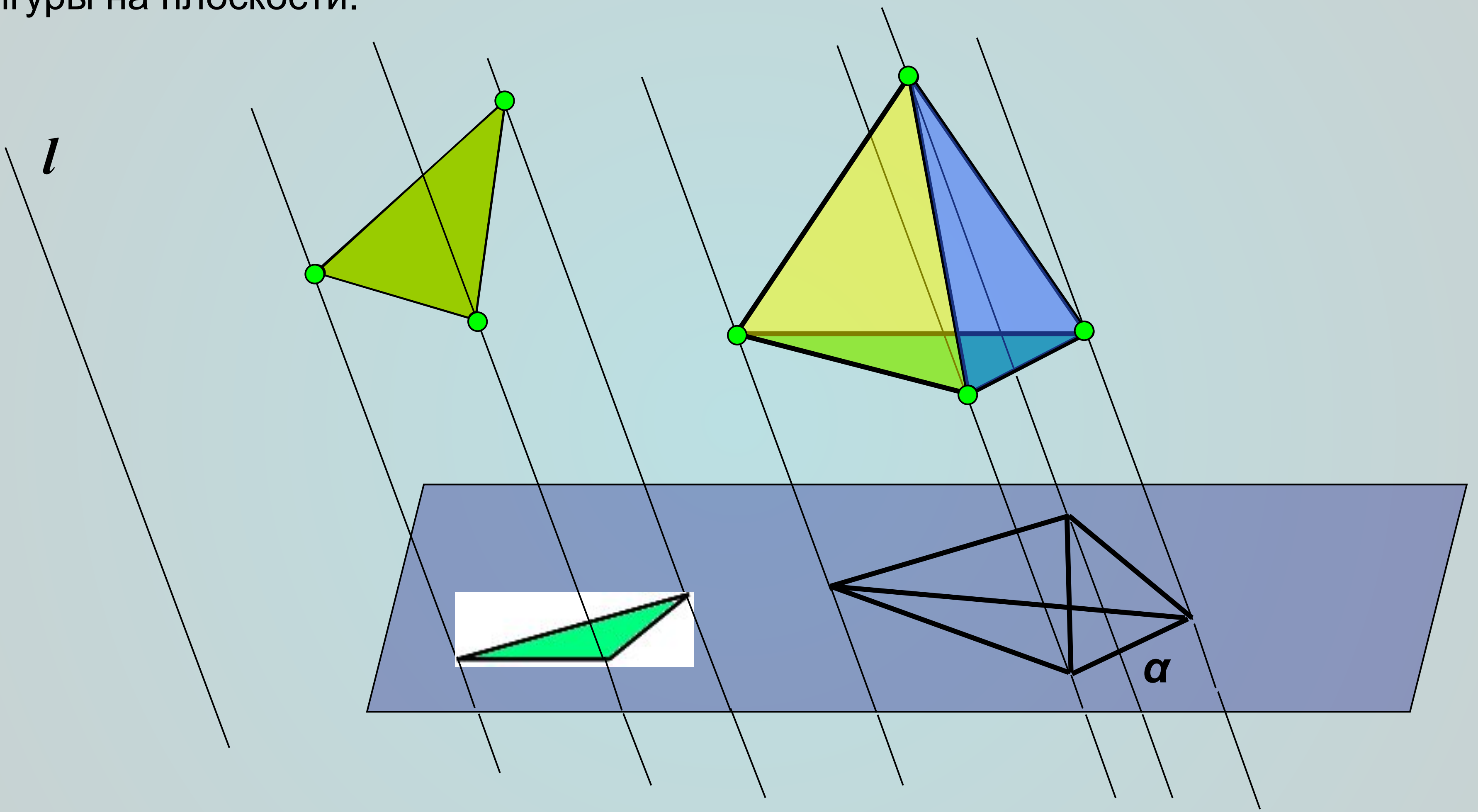


Проведем через точку А прямую, параллельную прямой a.

Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью и есть ***проекция*** точки А на плоскость α. Точку А ещё называют ***прообразом***, а точку А1 – ***образом***. Если $A \in \alpha$, то A_1 совпадает с А.

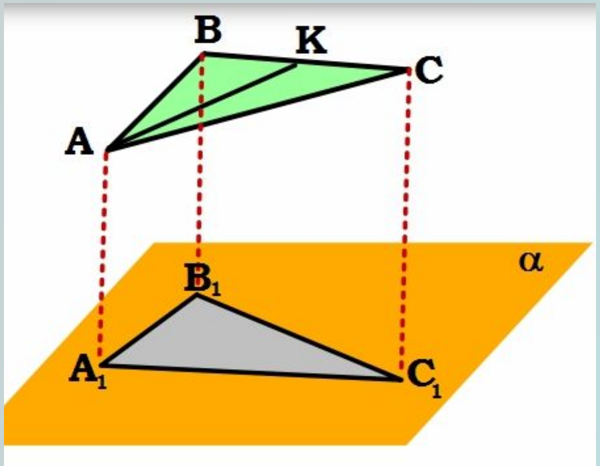


Рассматривая любую геометрическую фигуру как множество точек, можно построить в заданной плоскости проекцию данной фигуры. Таким образом можно получить изображение (или «проекцию») любой плоской или пространственной фигуры на плоскости.



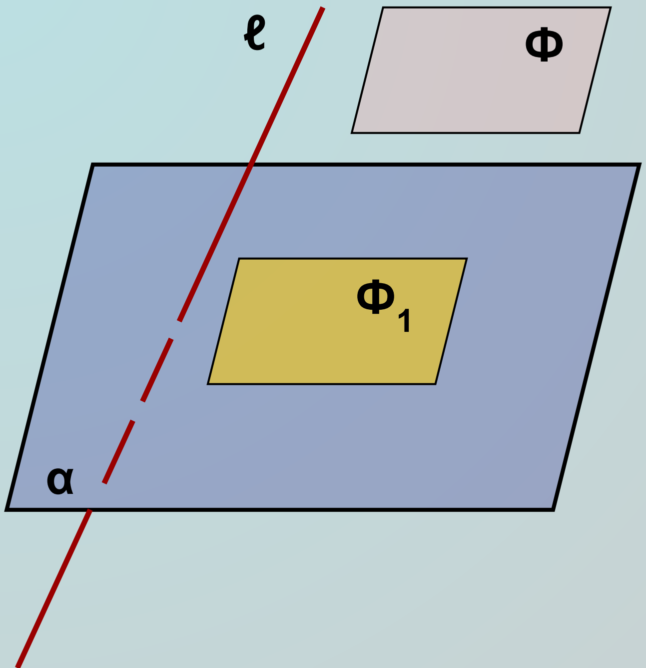
Наглядным примером параллельного проектирования является отбрасываемая любым объектом в пространстве тень от солнечных лучей (*направление параллельного проектирования*) на Земле (*плоскость проекций*).

Что такое проекция фигуры на плоскость?

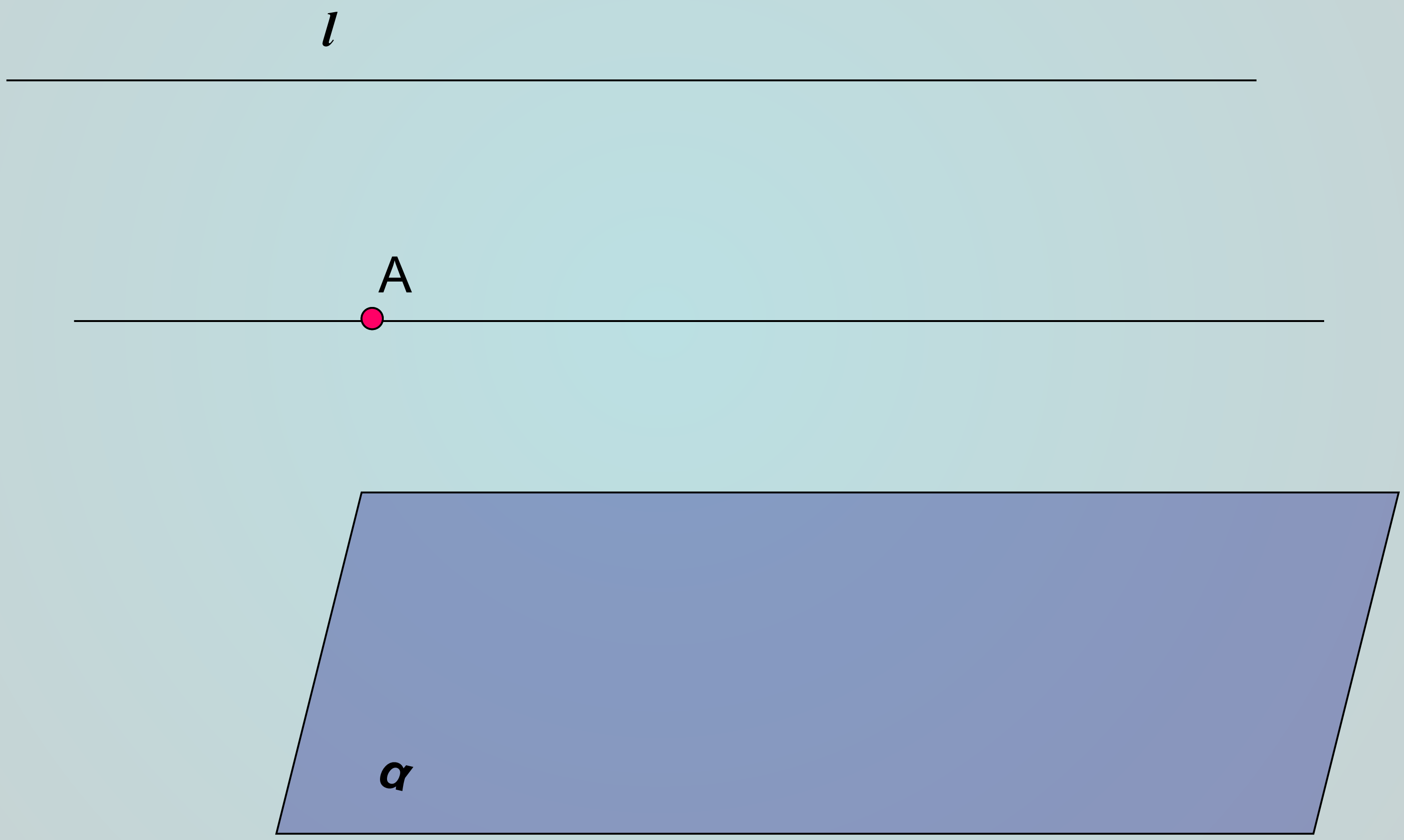


Каждой точке *A* пространства сопоставляется ее проекция A_1 на плоскость α. Это соответствие называется параллельным проектированием на плоскость α в направлении прямой *l*.

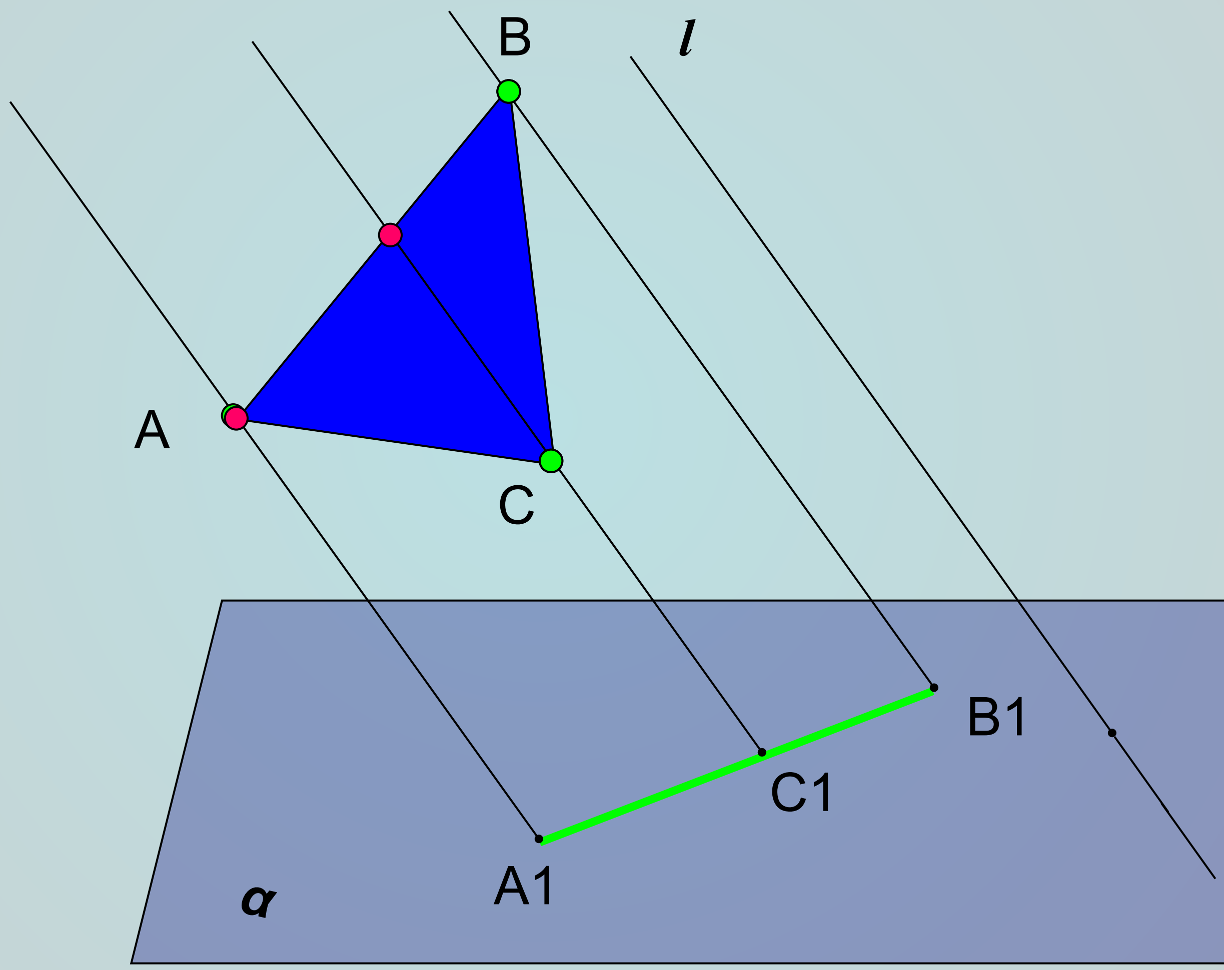
Параллельной проекцией пространственной фигуры Ф называется множество $Ф_1$ параллельных проекций всех точек данной фигуры.



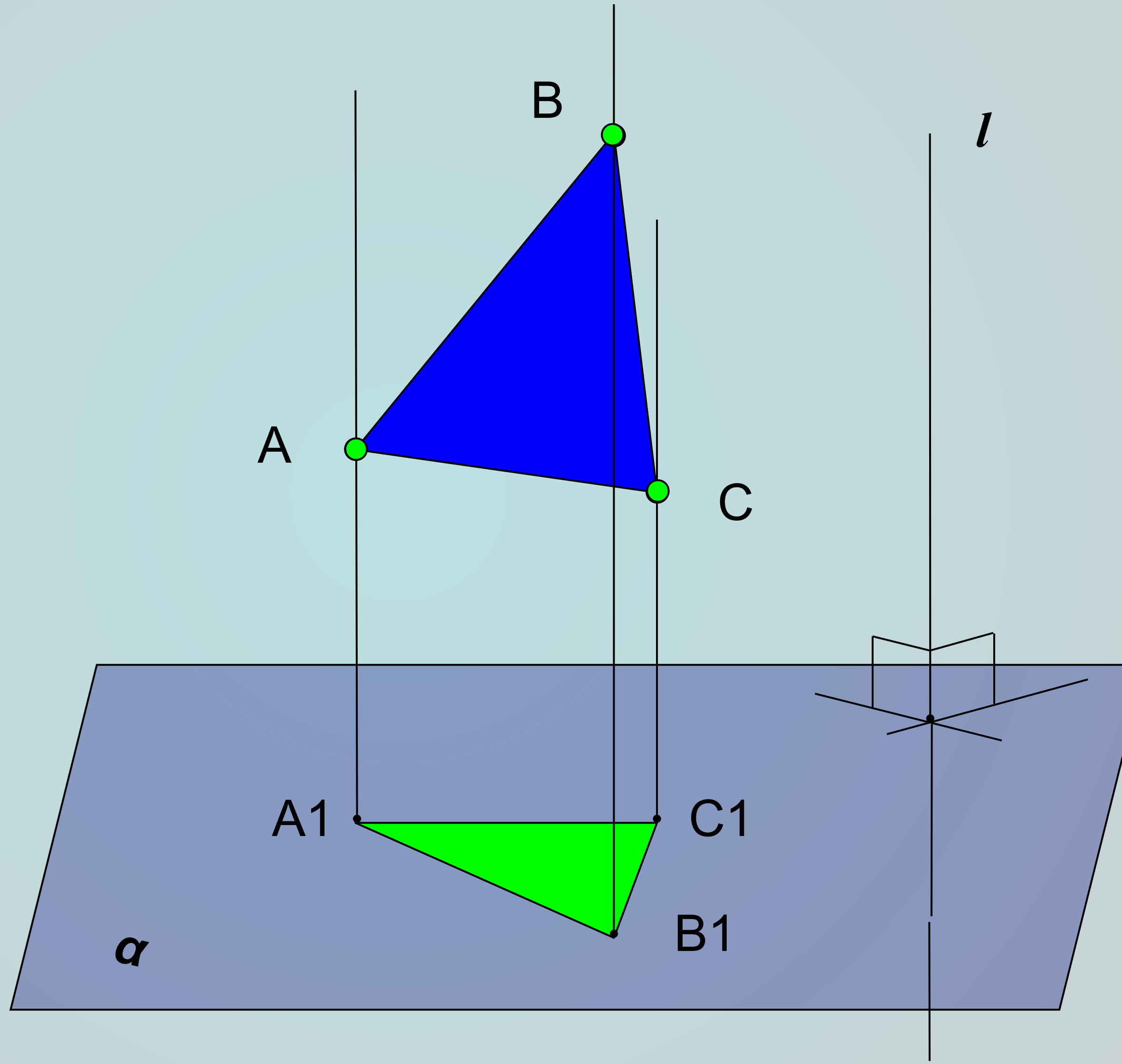
Примечание1: При параллельном проектировании **не выбирают** направление параллельного проектирования параллельно плоскости проекции



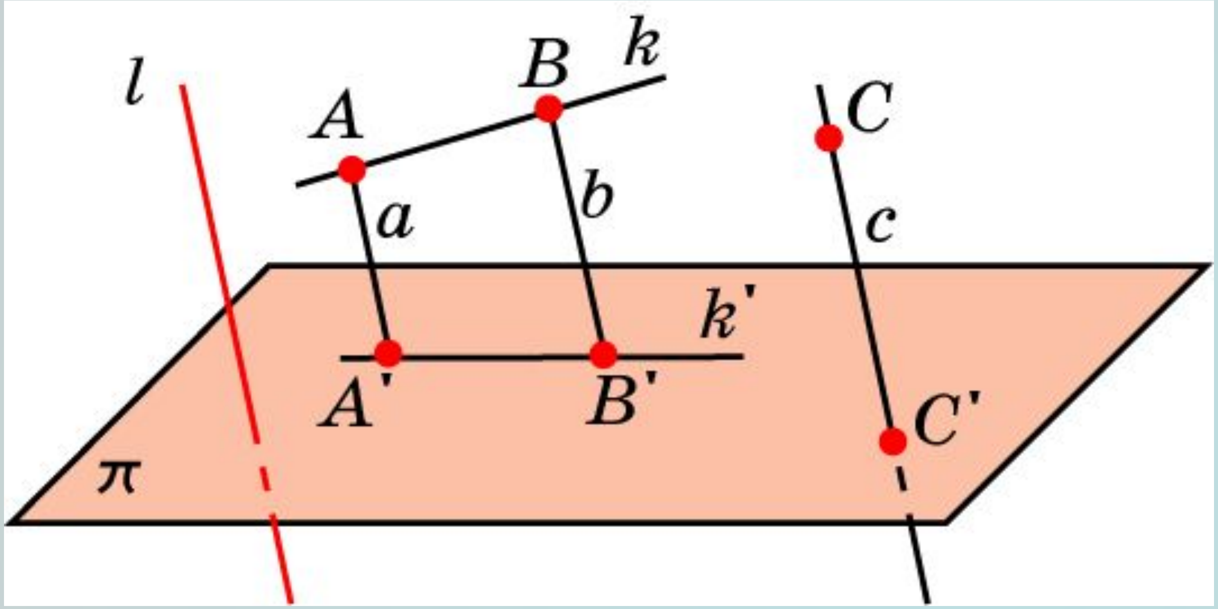
Примечание2: При параллельном проектировании плоских фигур **не выбирают** направление параллельного проектирования параллельно плоскости, которой принадлежит эта плоская фигура, т.к. получающаяся при этом проекция не отражает свойства данной плоской фигуры.



Примечание 3: Если направление параллельного проектирования перпендикулярно плоскости проекций, то такое параллельное проектирование называется **ортогональным**(*прямоугольным*) **проектированием**.

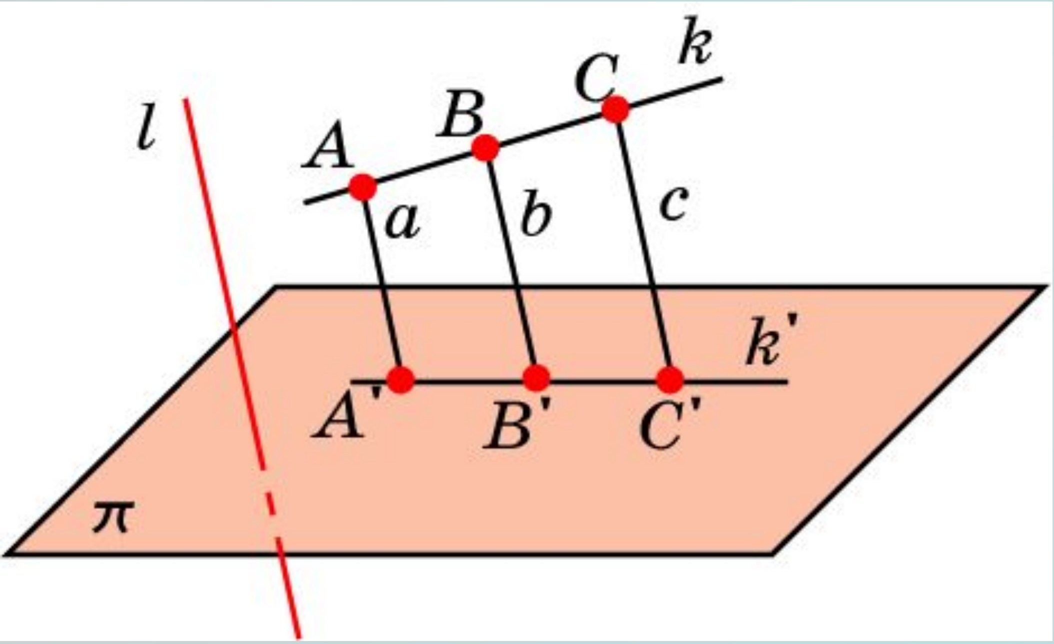


Свойства параллельного проектирования



1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой *l*, то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой *l*, то ее проекцией является прямая.

Свойства параллельного проектирования

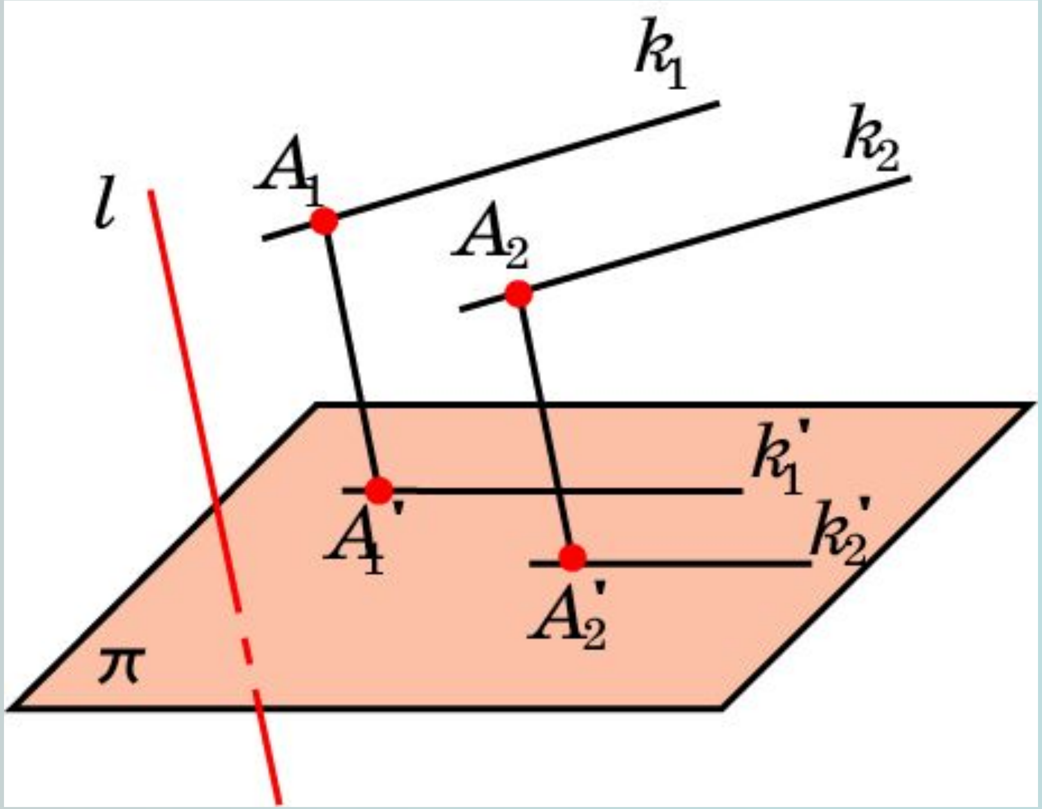


2 Параллельное проектирование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых).

В частности, при параллельном проектировании середина отрезка переходит в середину соответствующего отрезка.

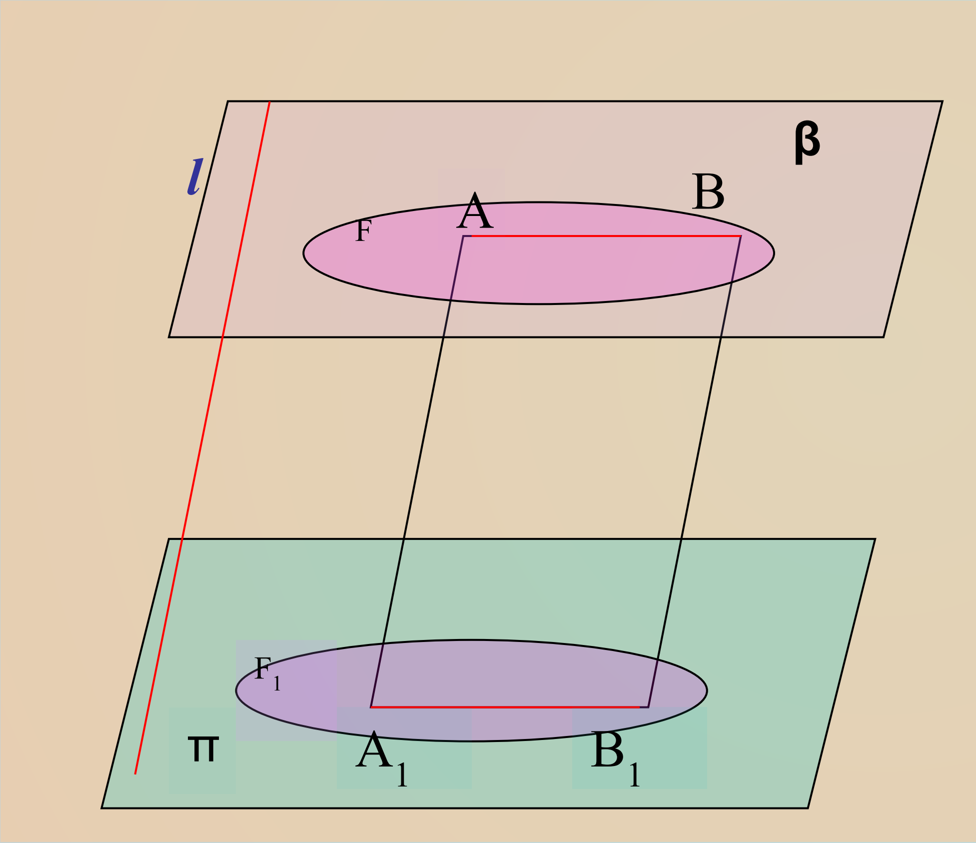
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Свойства параллельного проектирования



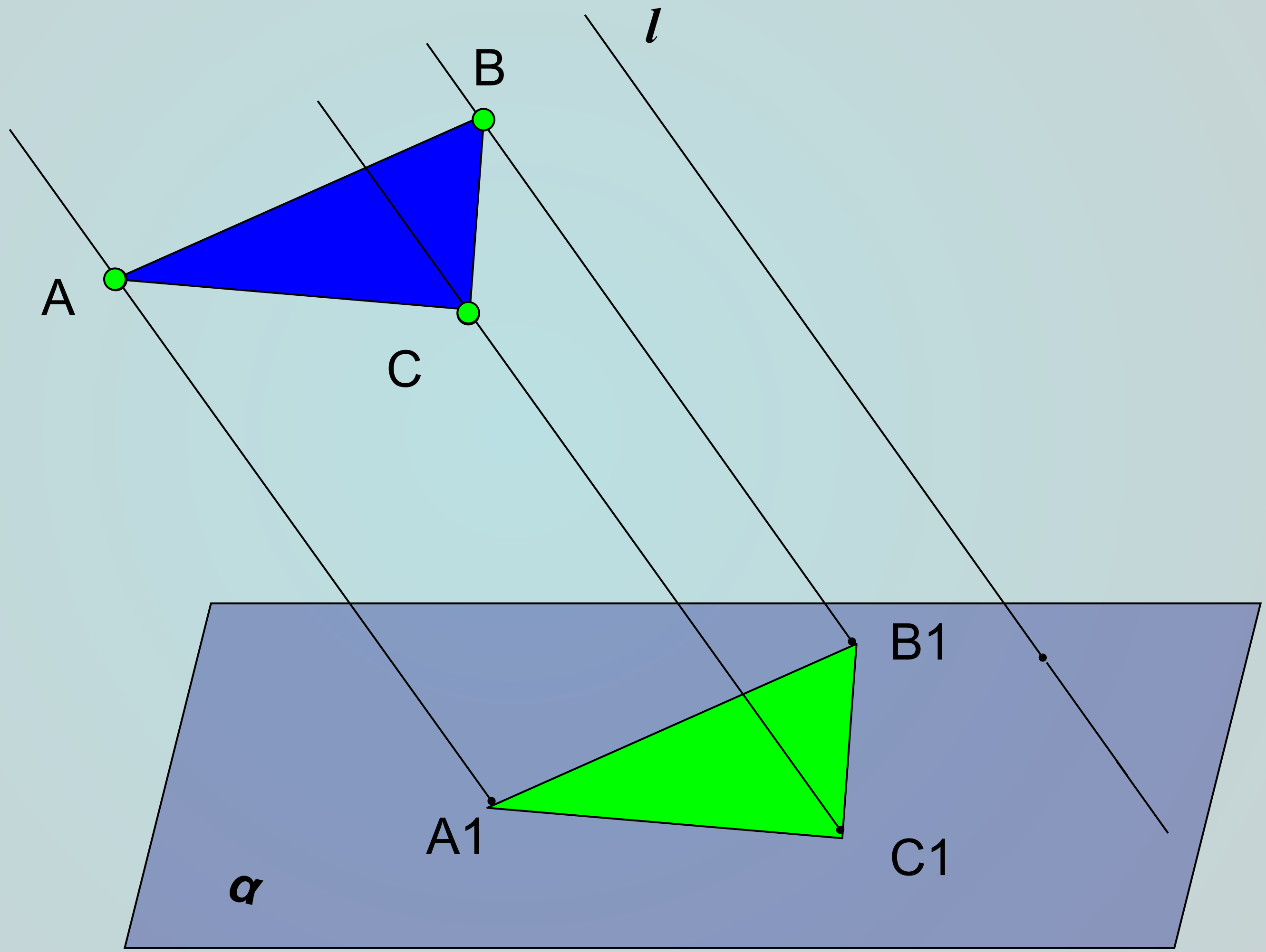
3. **Если две параллельные прямые не параллельны прямой *l*, то их проекциями в направлении *l* могут быть или две параллельные прямые или одна прямая.**

Свойства параллельного проектирования



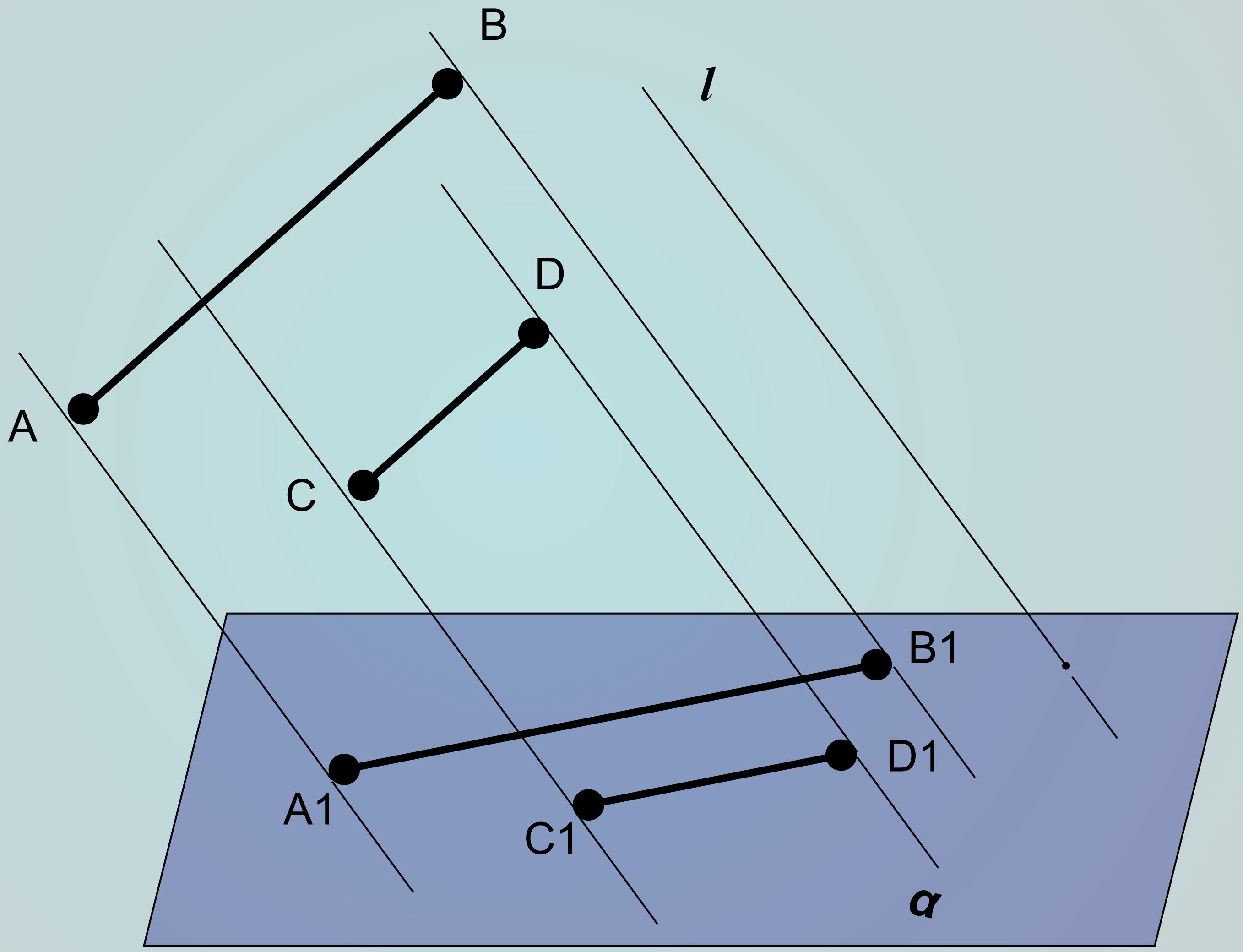
4. Если плоская фигура F лежит в плоскости, параллельной плоскости проекции, то ее проекция F_1 на эту плоскость равна фигуре F

Если плоскость проекций и плоскость, в которой лежит данная фигура параллельны (α||(ABC)), то получающееся при этом изображение равно фигуре.



Параллельное проектирование обладает свойствами:

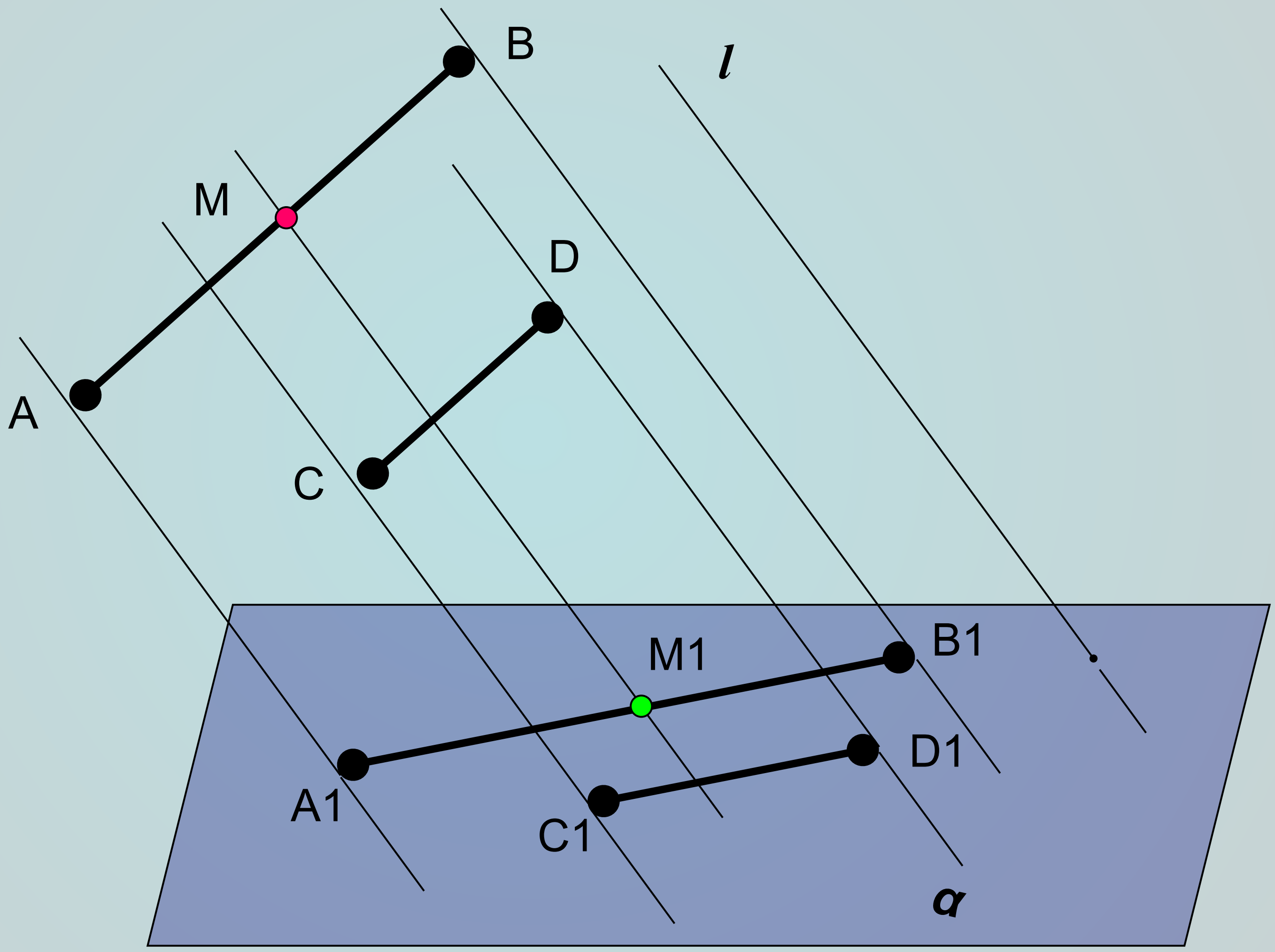
1) параллельность прямых (отрезков, лучей) сохраняется;



AB ||CD => A_1 B_1 ||C_1 D_1

1) параллельность прямых (отрезков, лучей) сохраняется;

2) отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой сохраняется;

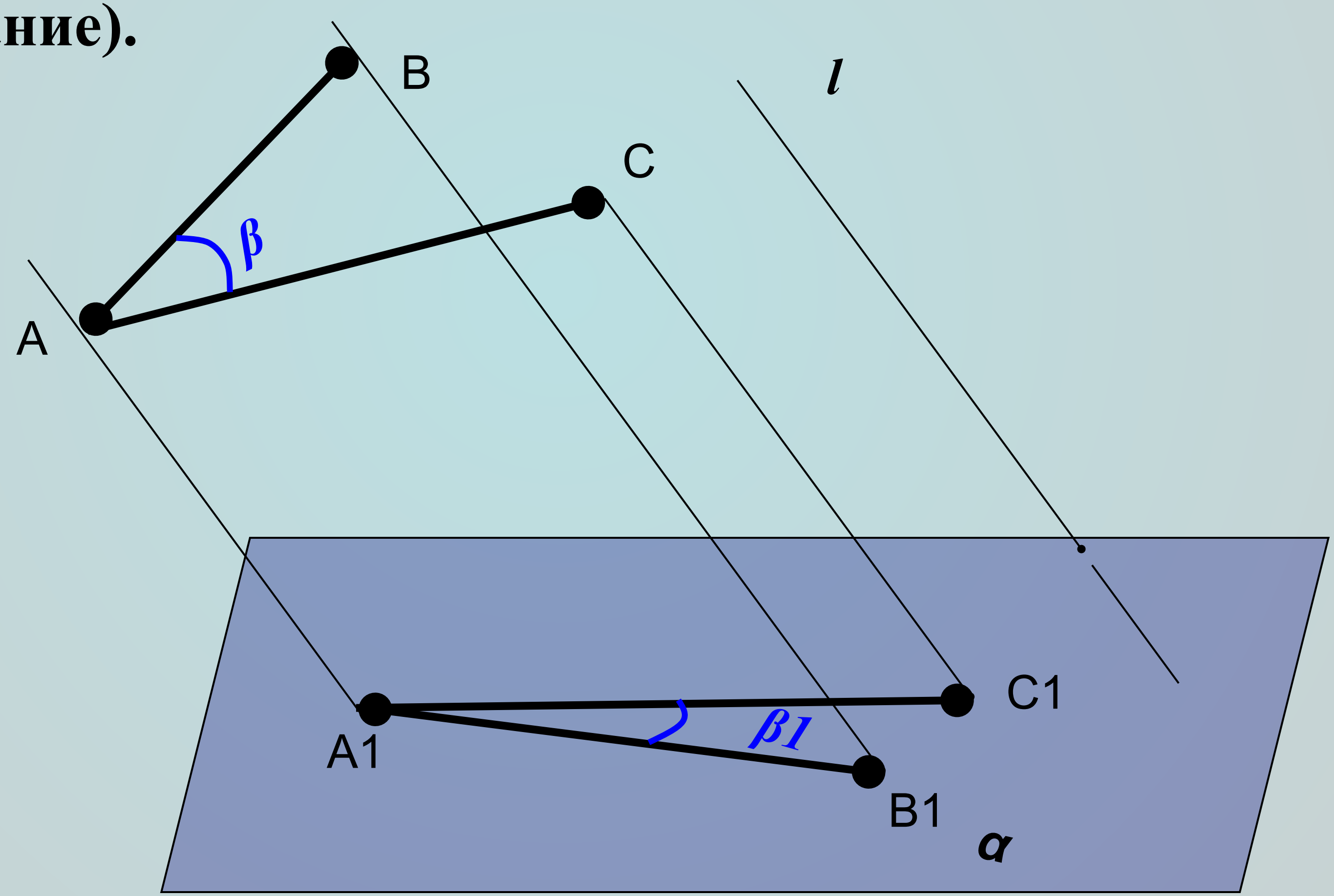


Если, например, AB=2CD, то $A_1B_1 = 2C_1D_1$ или $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$

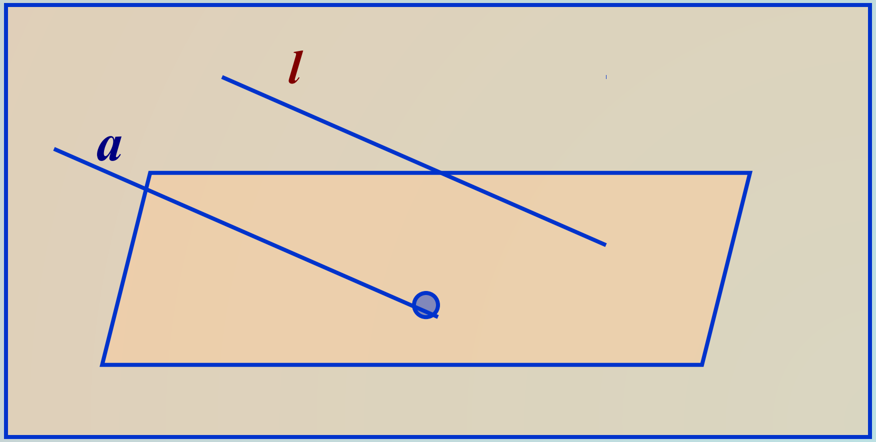
1) параллельность прямых (отрезков, лучей) сохраняется;

2) длины отрезков не сохраняются, а отношение длин отрезков, лежащих на параллельных или на одной прямой сохраняется;

3) Линейные размеры плоских фигур(длины отрезков, величины углов) <u>не</u> сохраняются (исключение ортогональное проектирование).

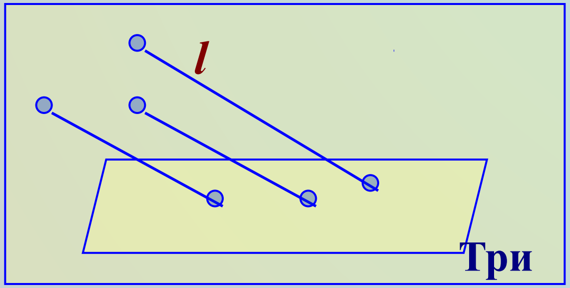


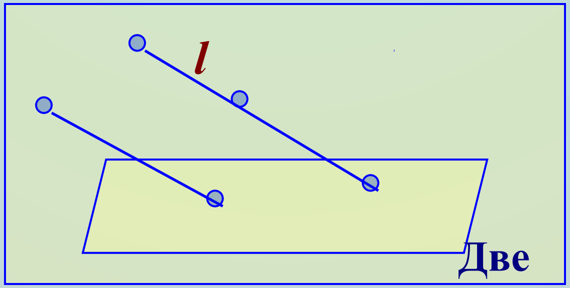
? **В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?**

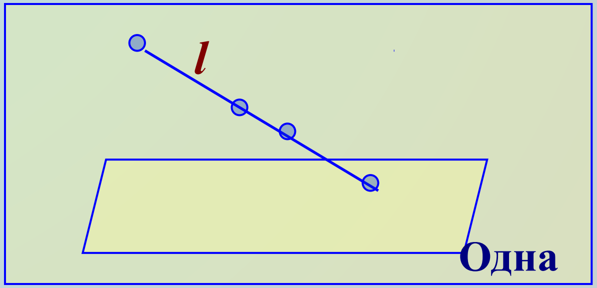


Если прямая параллельна направлению проектирования.

Сколько точек может получиться при параллельном проектировании трех различных точек пространства?

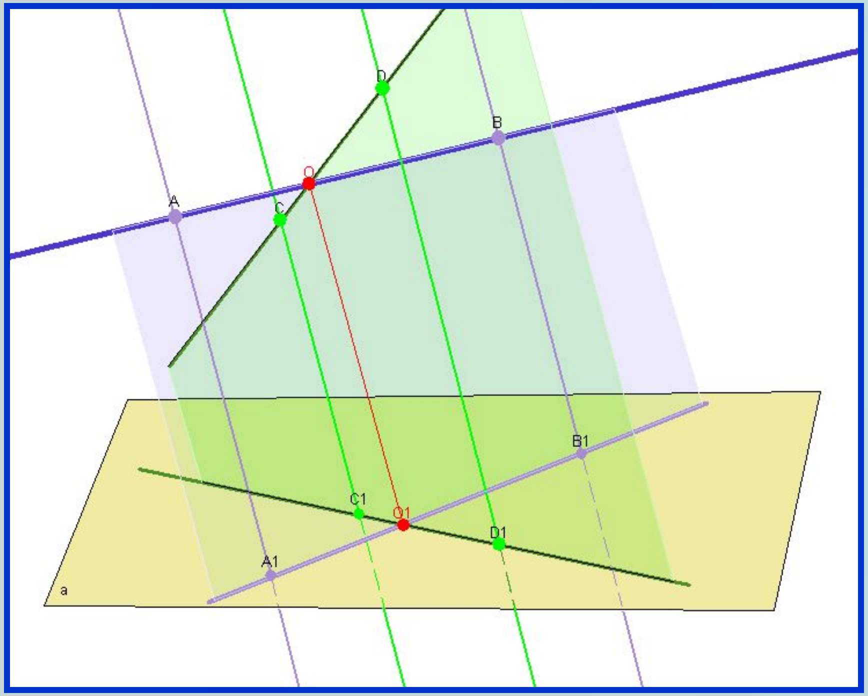


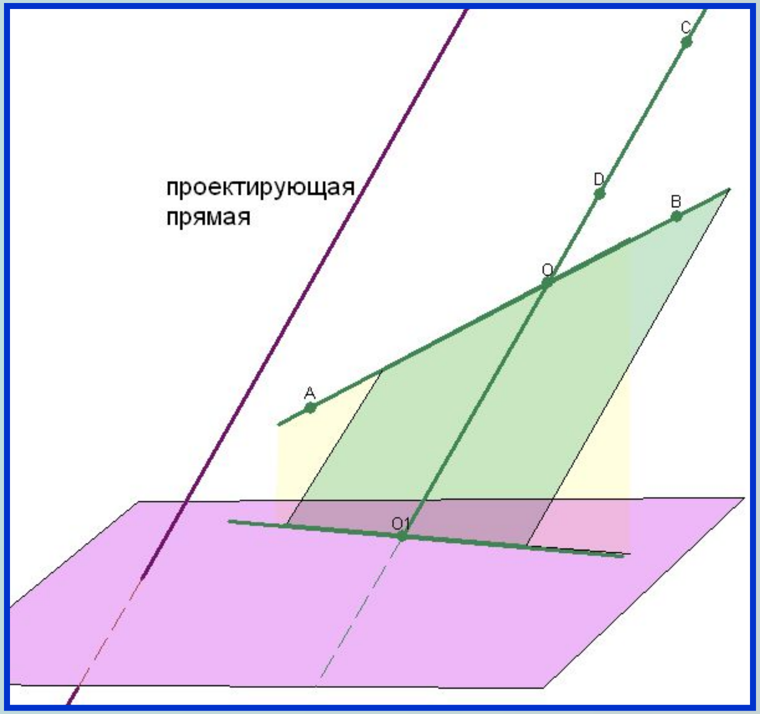




?

Какие фигуры могут служить проекциями двух пересекающихся прямых?



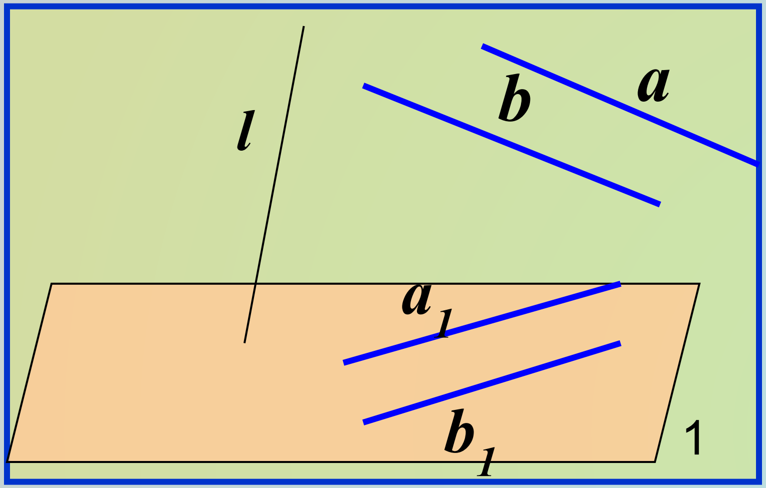


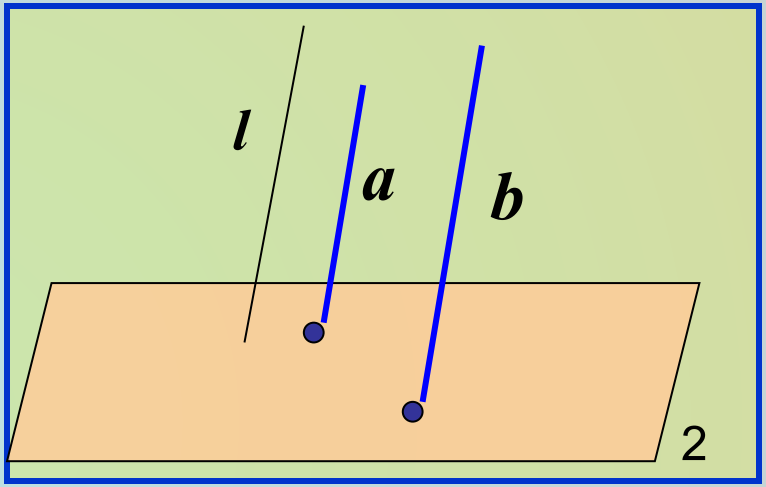
Проекции АВ и СД – пересекающиеся прямые

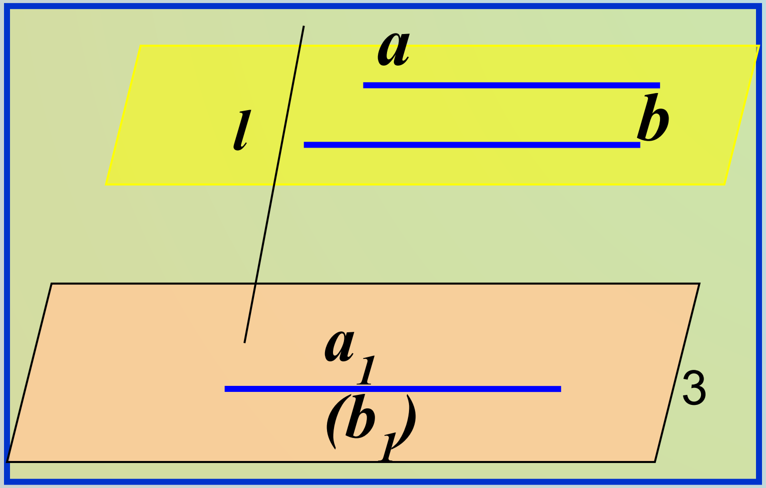
Проекция АВ – прямая, а СД – точка на этой прямой.

?

Какие фигуры могут служить проекциями двух параллельных прямых?

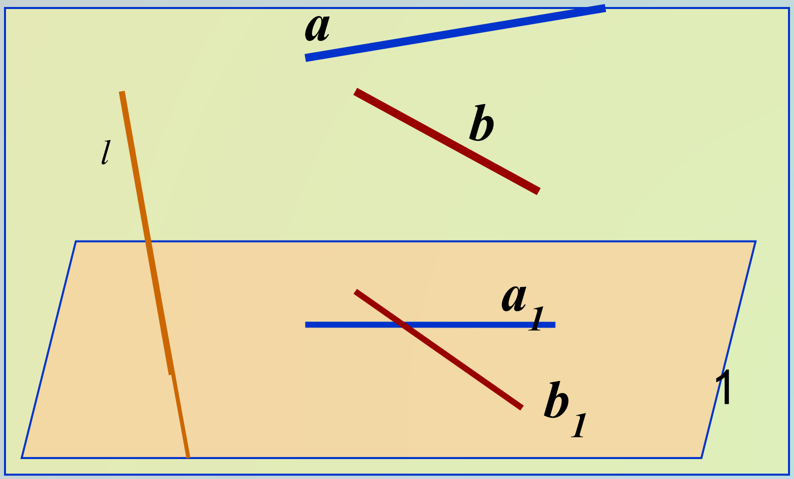


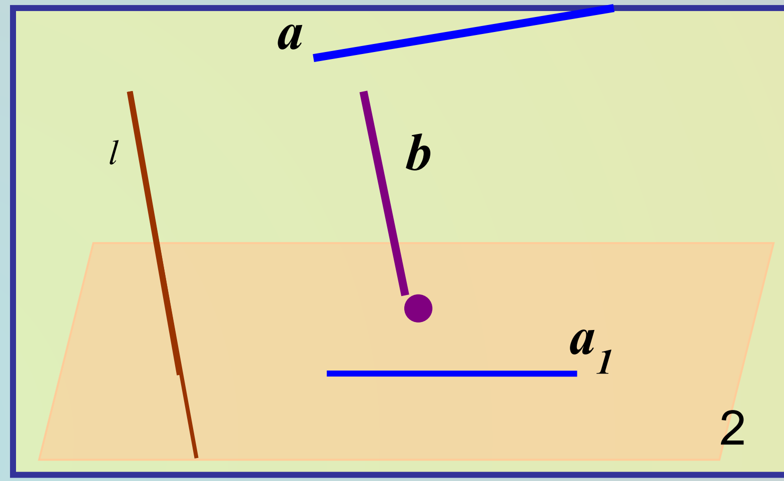


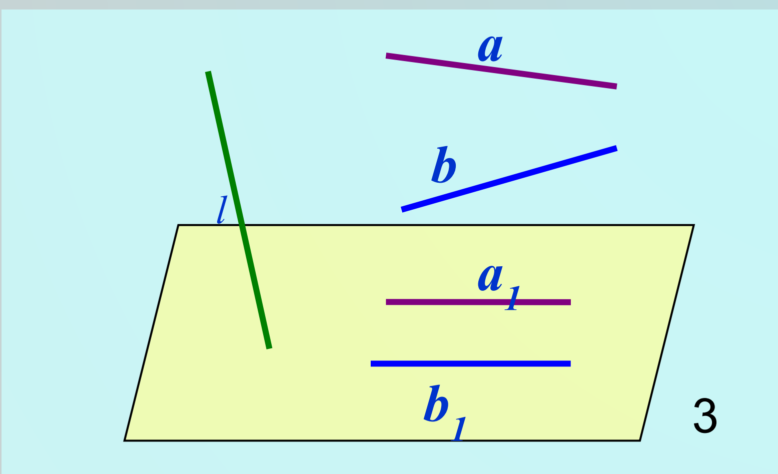


Если прямые параллельны, то они проектируются или в две параллельные прямые (их плоскость не параллельна направлению проектирования) (рис. 1), или в две точки (прямые параллельны направлению проектирования) (рис.2), или в одну прямую (их плоскость параллельна направлению проектирования, но сами они не параллельны направлению проектирования) (рис. 3).

? Какие фигуры могут служить проекциями двух скрещивающихся прямых?



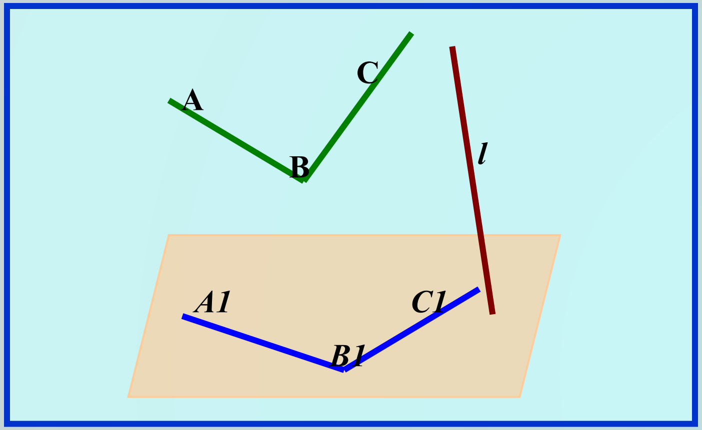


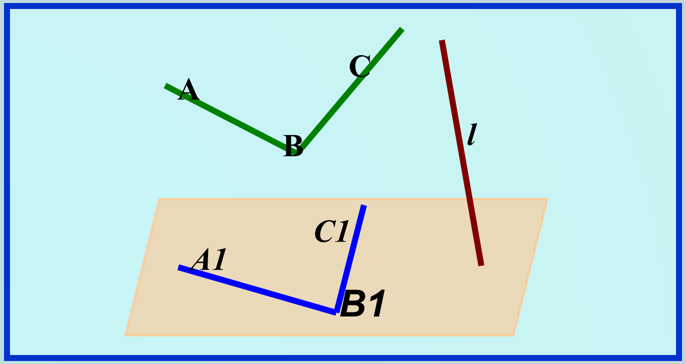


Если прямые скрещиваются и ни одна из них не параллельна направлению проектирования и не лежат в плоскостях, параллельных проектирующей прямой,, то они проектируются соответственно в пересекающиеся прямые (рис.1), если прямые скрещиваются и одна из них параллельна направлению проектирования, то они проектируются соответственно в прямую и не принадлежащую ей точку (рис.2), если скрещивающиеся прямые лежат в плоскостях, параллельных проектирующей прямой, то они проектируются в параллельные прямые (рис.3).

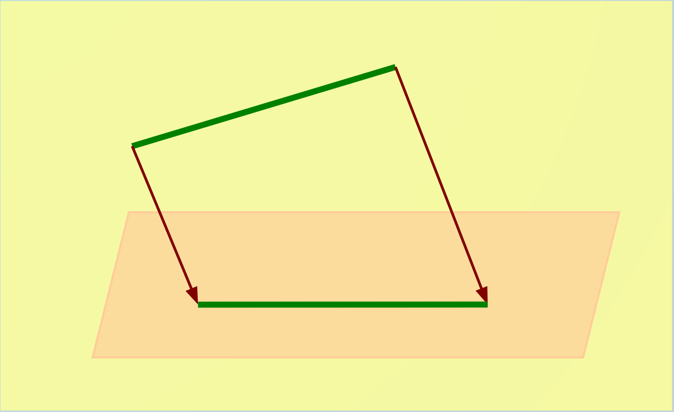
?

Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?





Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?



Проверь себя:

- **В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?**

  (Если прямая параллельна направлению проектирования).

- **Справедливо ли утверждение: “Параллельные прямые не параллельные направлению проектирования, проектируются в параллельные прямые”?** ***(Нет).***

- **Справедливо ли утверждение: “Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую”?**

  (Нет).

- **В пространстве задана прямая. Может ли ее параллельная проекция быть параллельной этой прямой?** ***(Да).***

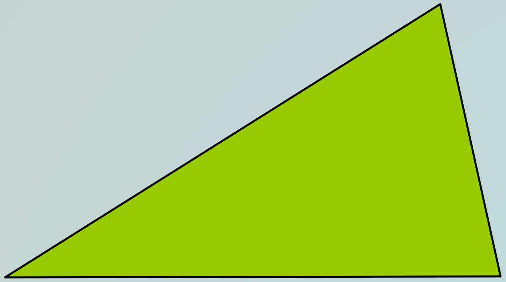
- **Можно ли по проекции точки на плоскость определить положение самой точки в пространстве?**

  (Нет).

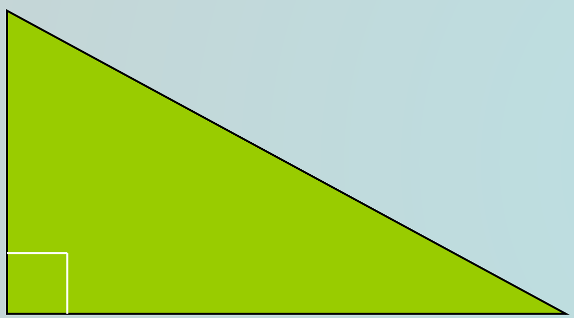
- **В каких случаях положение прямой в пространстве определяется заданием ее проекции на плоскость?**

  (Если прямая параллельна направлению проектирования).

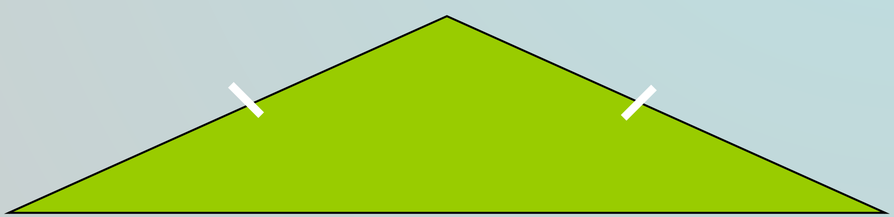
Фигура в пространстве



Произвольный треугольник

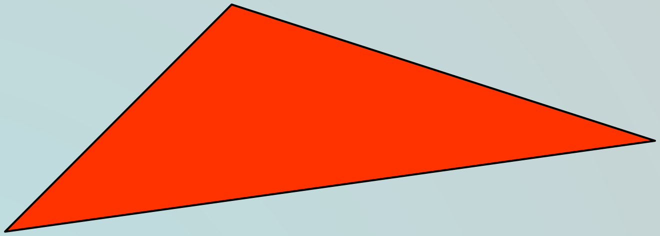


Прямоугольный треугольник

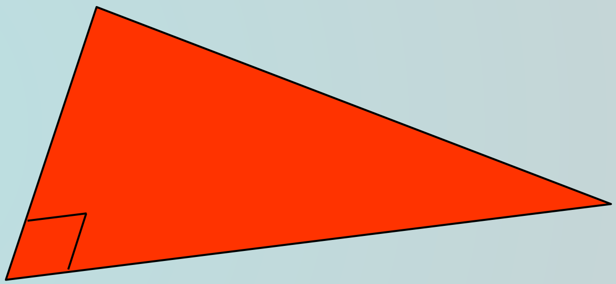


Равнобедренный треугольник

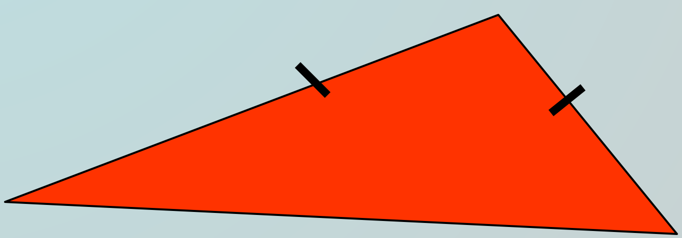
Её изображение на плоскости



Произвольный треугольник

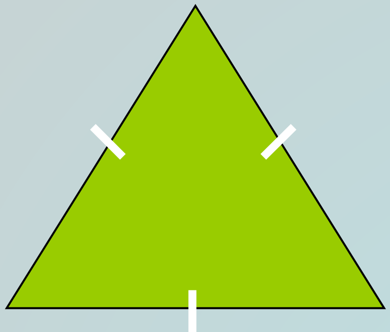


Произвольный треугольник



Произвольный треугольник

Фигура в пространстве

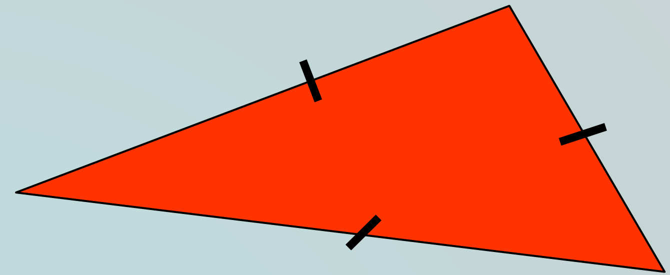


Равносторонний треугольник

Параллелограмм

Прямоугольник

Её изображение на плоскости

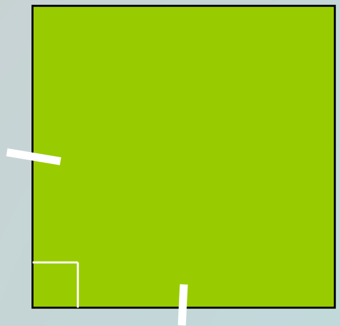


Произвольный треугольник

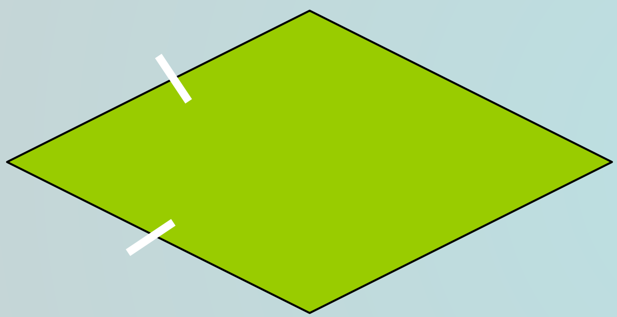
Произвольный параллелограмм

Произвольный параллелограмм

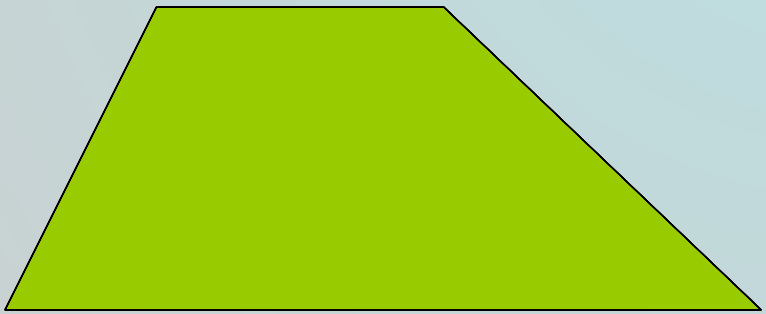
Фигура в пространстве



Квадрат

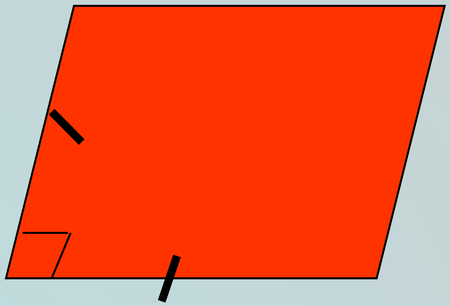


Ромб

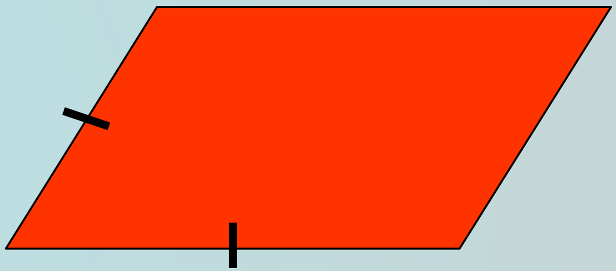


Трапеция

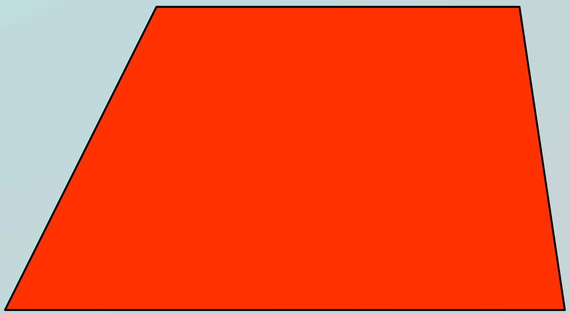
Её изображение на плоскости



Произвольный параллелограмм



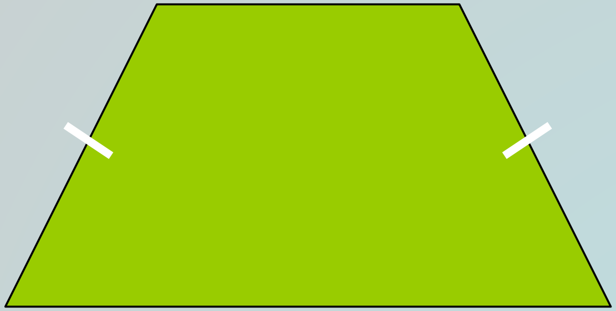
Произвольный параллелограмм



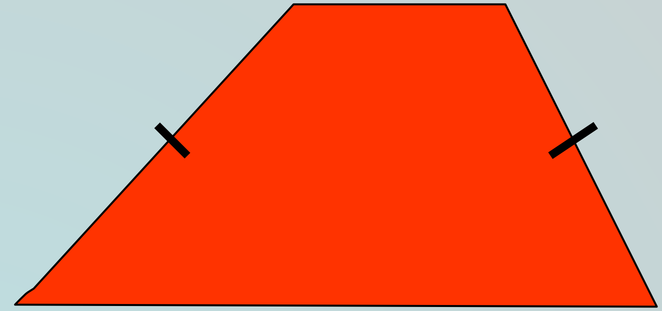
Произвольная трапеция

Фигура в пространстве

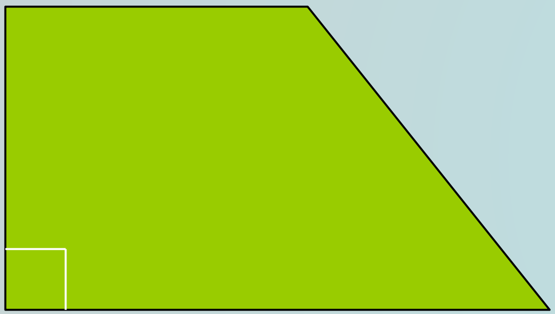
Её изображение на плоскости



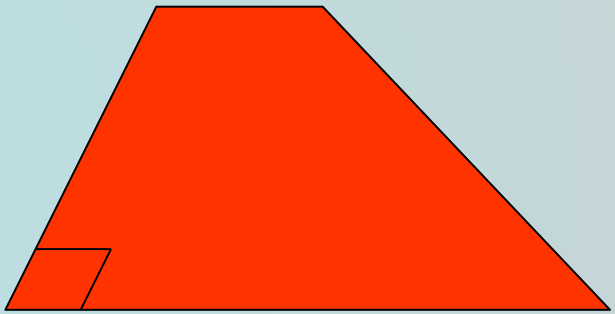
Равнобокая трапеция



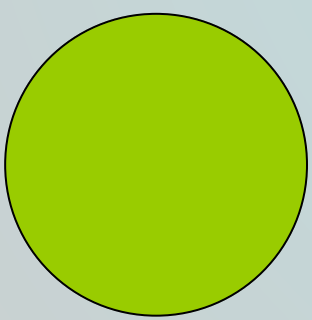
Произвольная трапеция



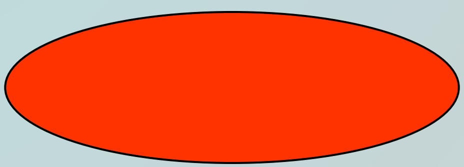
Прямоугольная трапеция



Произвольная трапеция

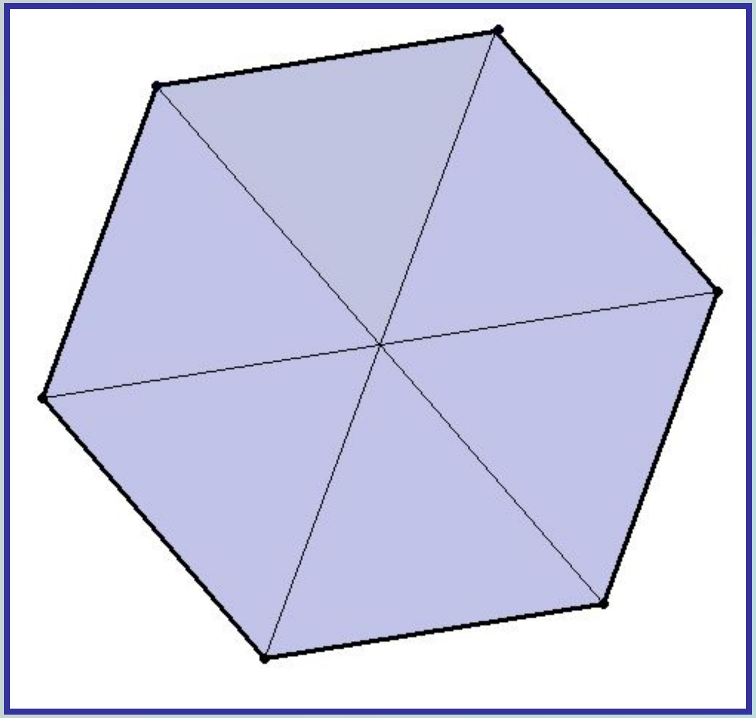


Круг (окружность)

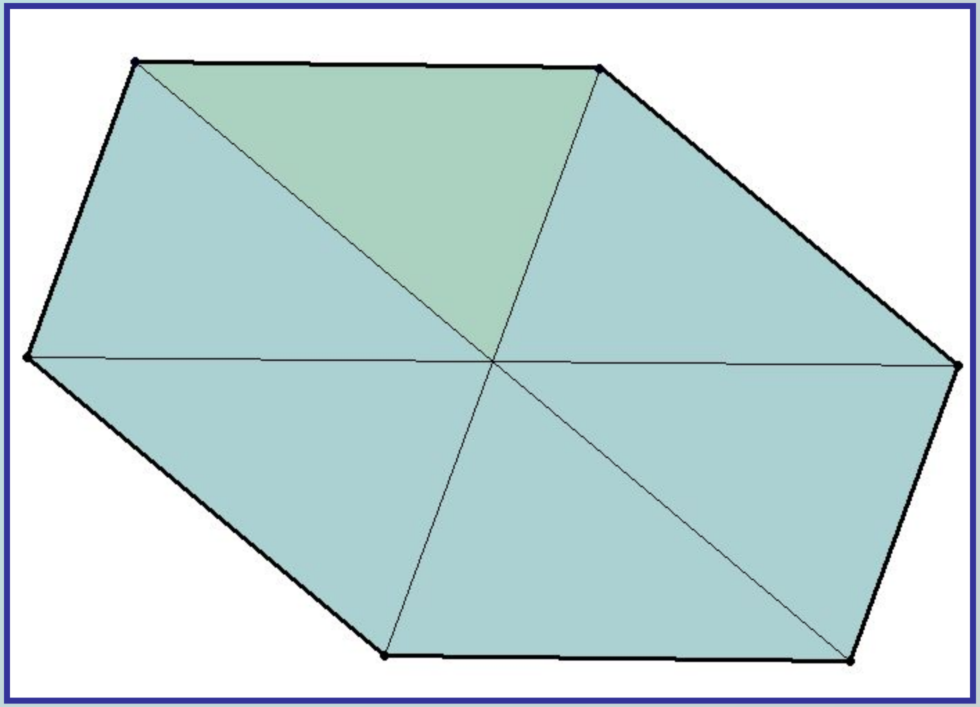


Овал (эллипс)

Как построить изображение правильного шестиугольника?



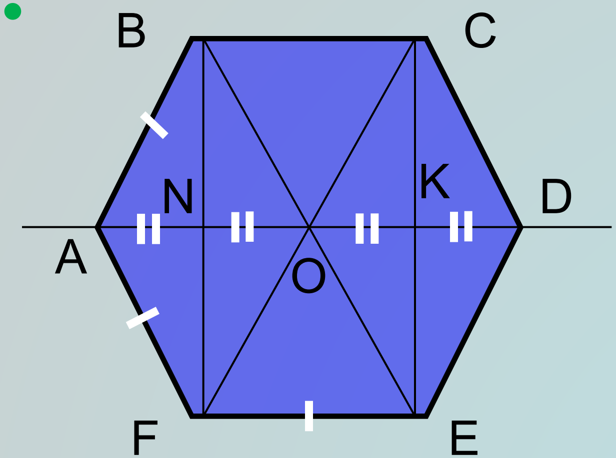
Анализ. *Правильный шестиугольник состоит из правильных треугольников, два смежных образуют ромб, проекцией которого является произвольный параллелограмм. Фигура имеет центр симметрии.*

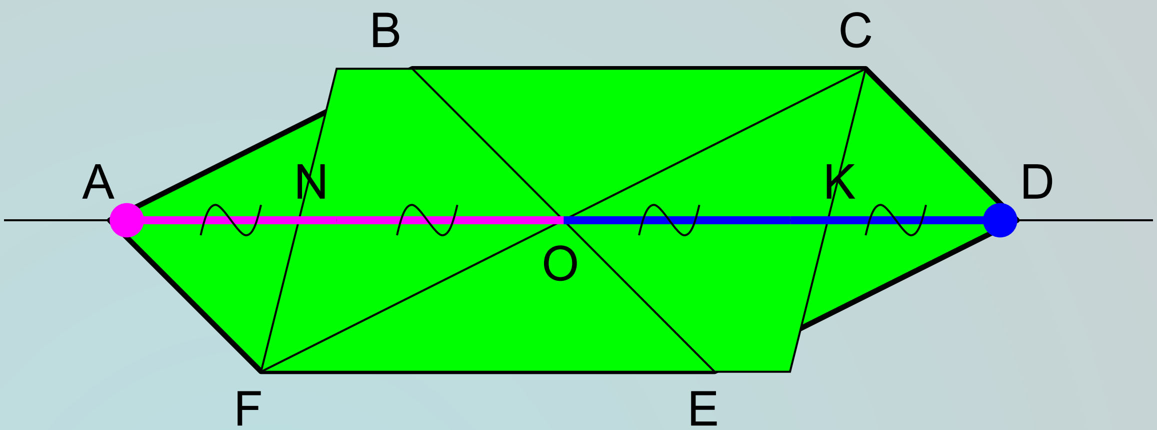


Построение.

Строим параллелограмм, выполняем симметрию относительно одной из вершин, соединяем полученные вершины.

?





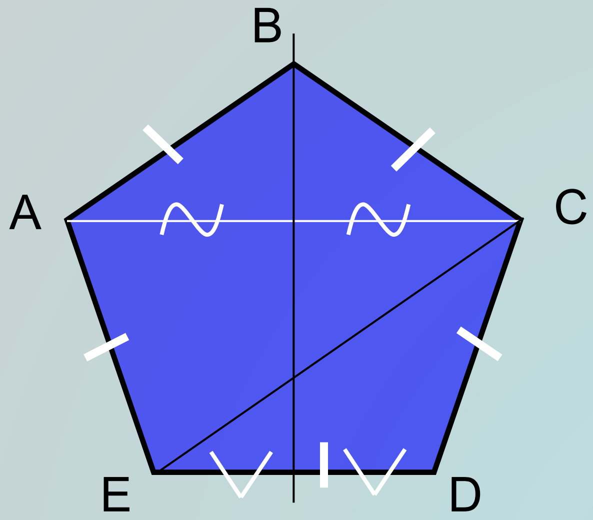
Разобьем правильный шестиугольник на три части: прямоугольник FBCE и два равнобедренных треугольника ΔFAB и ΔCDE. Построим вначале изображение прямоугольника FBCE – произвольный параллелограмм FBCE. Осталось найти местоположение двух оставшихся вершин – точек A и D.

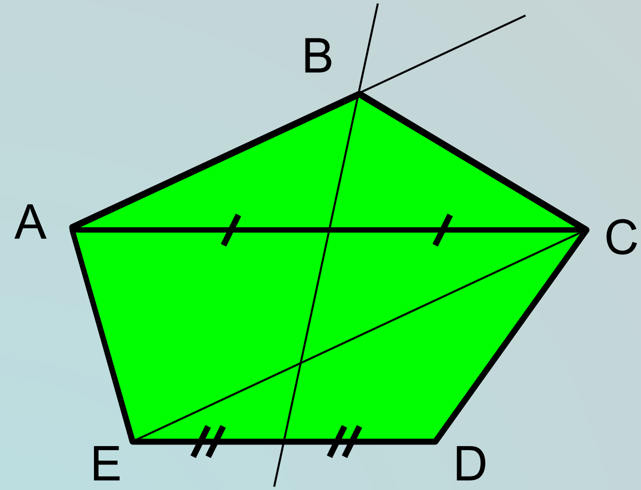
Вспомнив свойства правильного шестиугольника, заметим, что: 1) эти вершины лежат на прямой, проходящей через центр прямоугольника и параллельной сторонам BC и FE; 2) OK=KD и ON=NA.

Значит, 1) находим на изображении точку O и проводим через неё прямую, параллельную BC и FE, получив при этом точки N и K;

2) откладываем от точек N и K от центра O на прямой такие же отрезки – в итоге получаем две оставшиеся вершины правильного шестиугольника A и D.

?

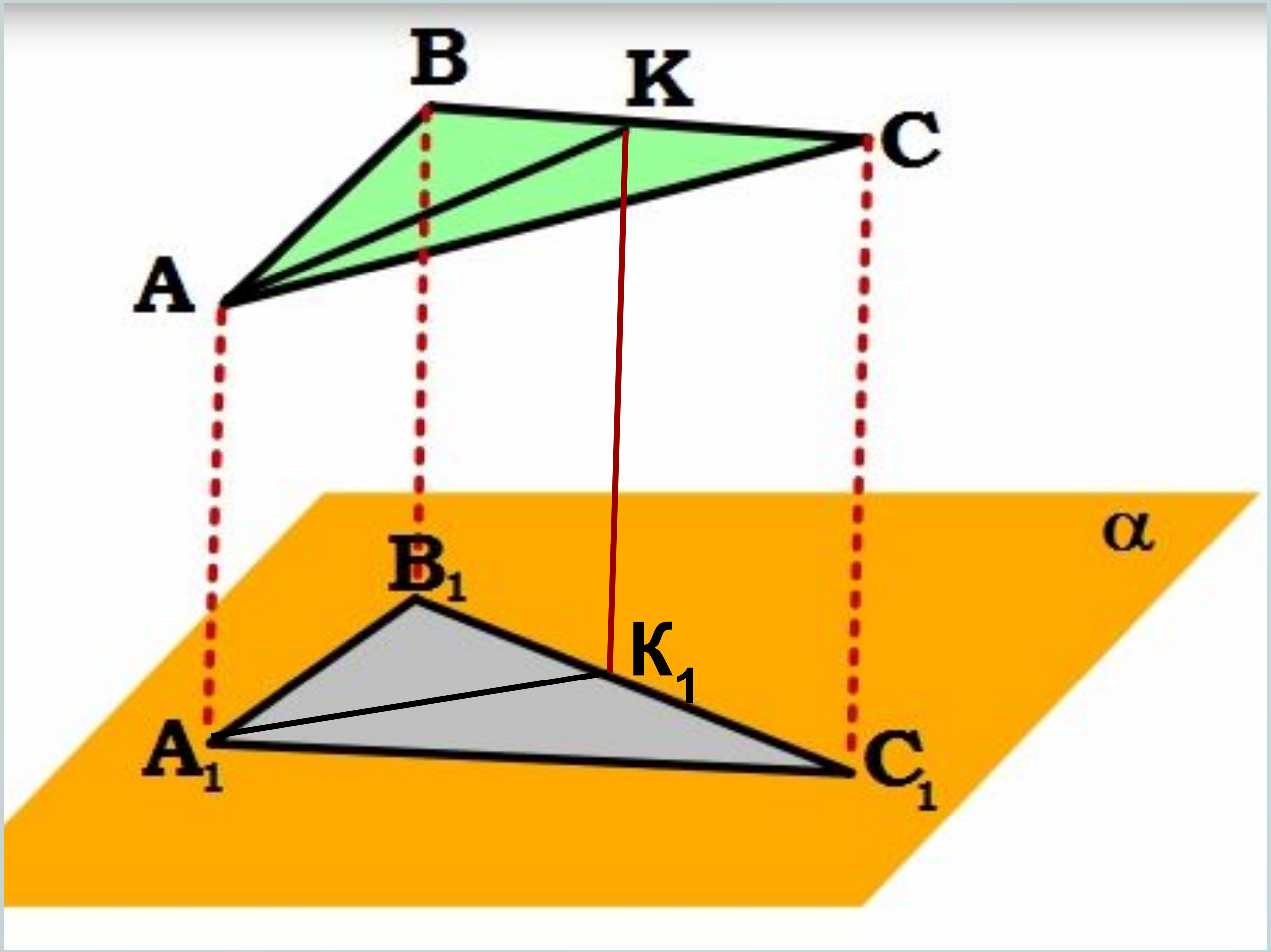




Как построить изображение *правильного пятиугольника*.

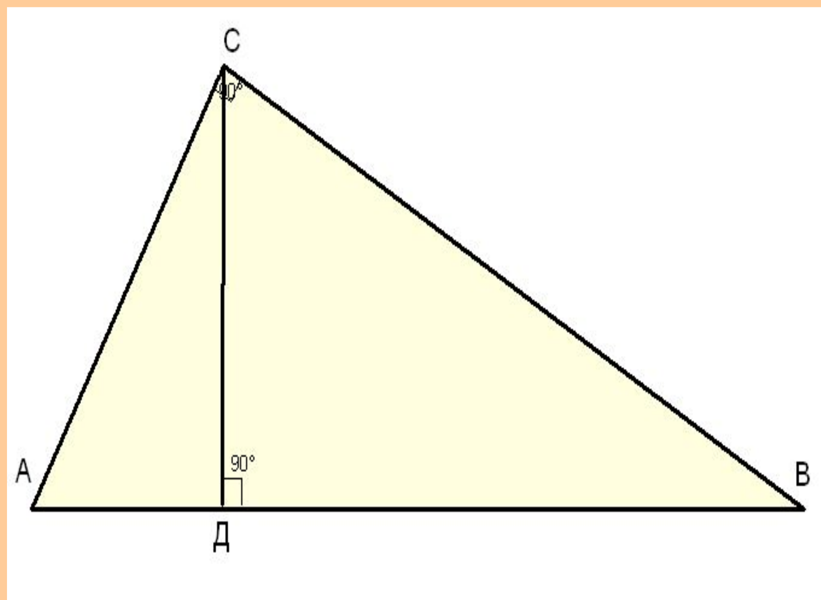
Разобьем фигуру на две части – равнобокую трапецию и равнобедренный треугольник, а затем пользуясь свойствами свойствами этих фигур и ,конечно же, свойствами параллельного проектирования строим пятиугольник.

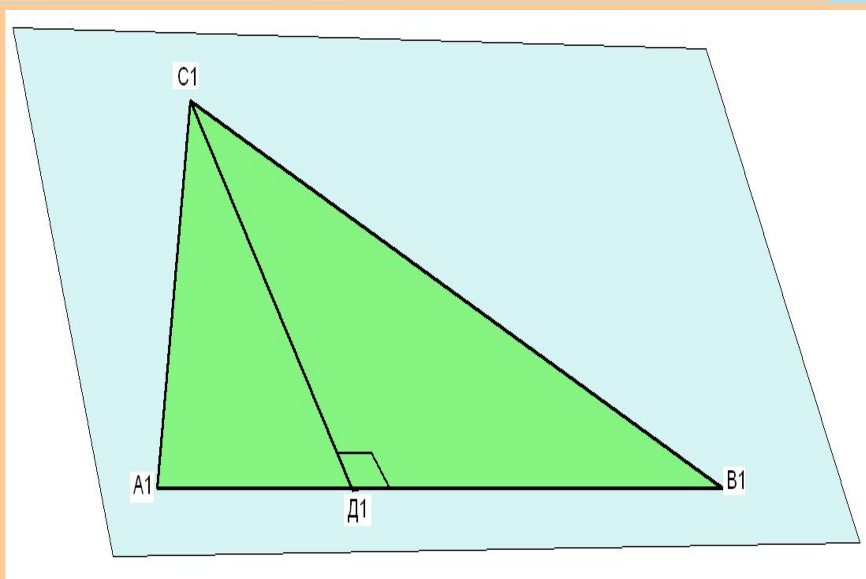
? Как на параллельной проекции треугольника построить проекцию его медианы?



Помни : отношения отрезков одной прямой сохраняются, т.е. если BK=KC, то и $B_1K_1=K_1C_1$!

?





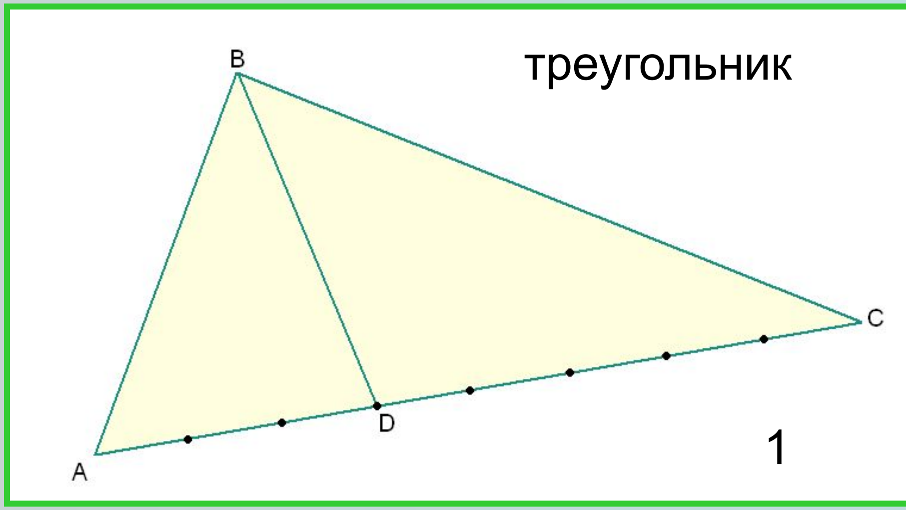
Дано изображение $A_1B_1C_1$ треугольника ABC со сторонами AC=3, BC= 4, AB= 5. Построить изображение C_1 D_1 высоты CD, опущенной на сторону AB.

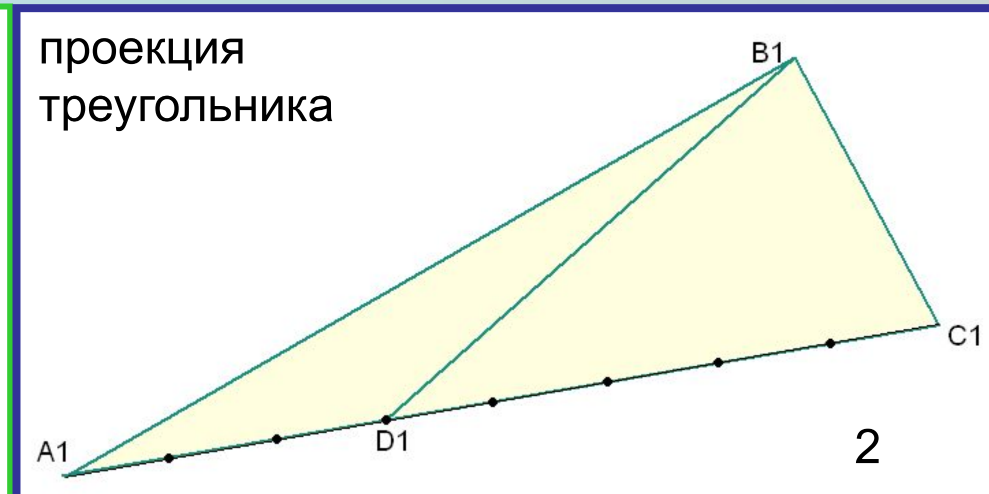
Исходный треугольник- прямоугольный, и высота CD делит гипотенузу AB на отрезки AD и DB , длины которых относятся как квадраты катетов , т.е. AD : DB = 9:16. (В прямоугольном треугольнике отношение проекций катетов на гипотенузу равно отношению квадратов катетов).

По свойству 3 изображение D1 точки D должно делить отрезок A1B1 в том же отношении $A_1Д_1$: $Д_1B_1$ = 9:16. Поэтому надо разделить A_1 B_1 *в этом отношении (что делается циркулем и линейкой) и соединить C_1 с D_1.*

Как на параллельной проекции треугольника построить проекцию его биссектрисы?

Замечание: при построении биссектрисы треугольника используют пропорциональность отрезков стороны, к которой она проведена, боковым сторонам.

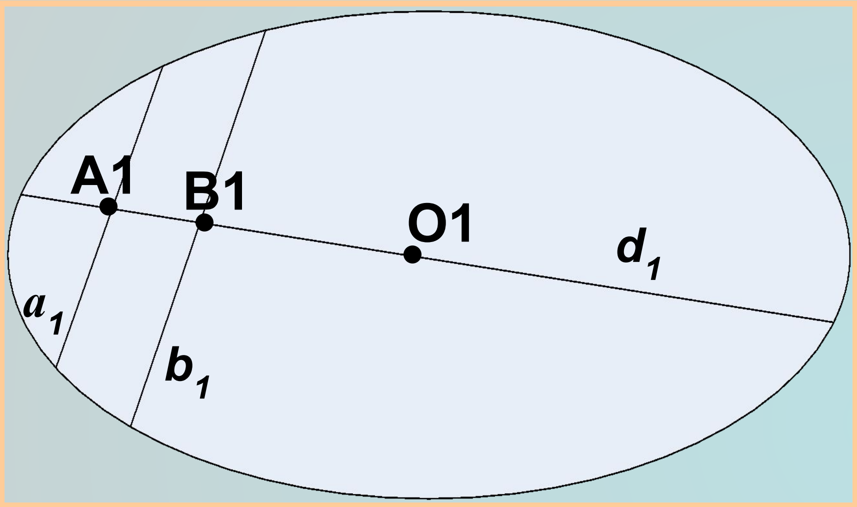




На рис.1 BD – биссектриса треугольника ABC, а на рис.2 B_1D_1 – ее изображение.

?

Дано изображение окружности. Построить изображение ее центра.



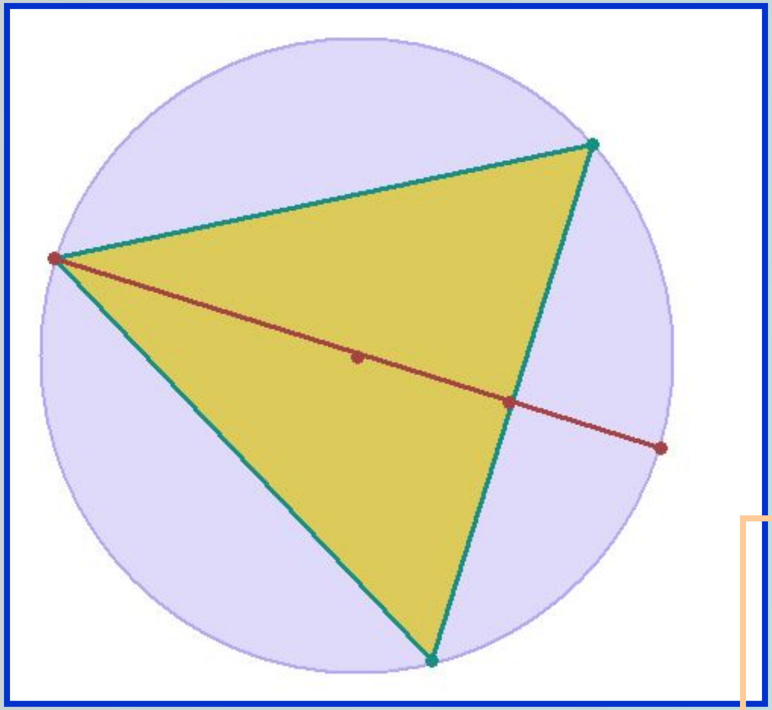
*Проведем в изображении две параллельные хорды **b_1** и **a_1**.Они являются изображениями параллельных хорд a и b исходной окружности. Середины A и B соответственно хорд a и b лежат на диаметре. Следовательно, их изображения A_1 и B_1 лежат на изображении этого диаметра. По свойству 2 точки A_1 и B_1 - середины хорд a_1 и b_1 соответственно, их можно построить на нашем изображении. Проведя прямую A_1 B_1 , получим изображение диаметра d_1. Середина O_1 отрезка d_1 по свойству 3 является искомым изображением центра окружности.*

Повтори:

-Диаметр окружности , проходящий через середину хорды, перпендикулярен к ней.

-Диаметр окружности, перпендикулярный к хорде, делит ее по полам.)

? Как построить изображение правильного треугольника, вписанного в данную окружность (ее проекцию)?

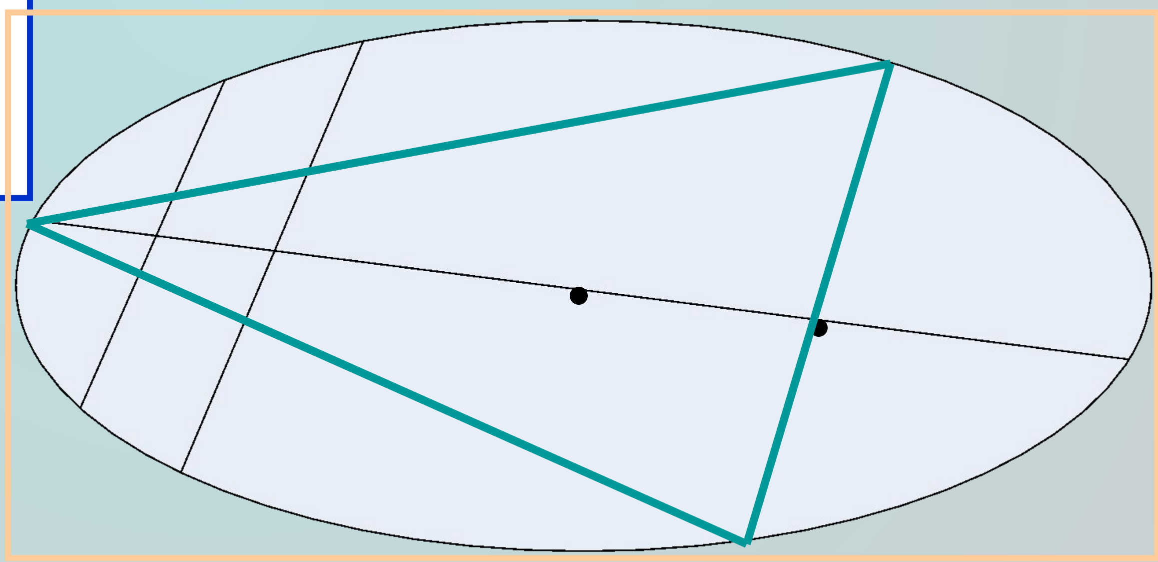


Анализ.

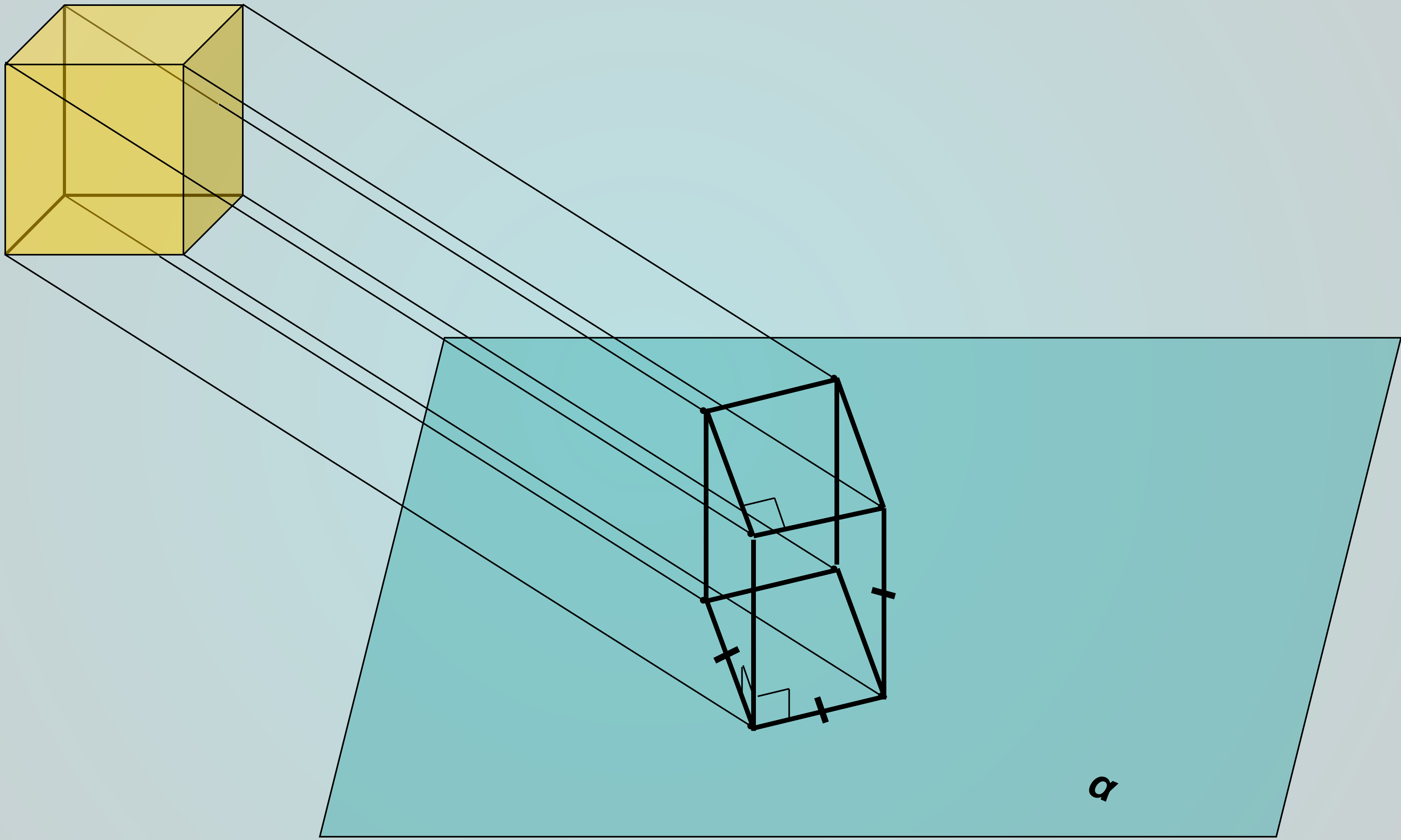
Вспомним, что радиус вписанной окружности вдвое меньше радиуса описанной. Значит сторона треугольника делит радиус окружности пополам и перпендикулярна ему.

Построение.

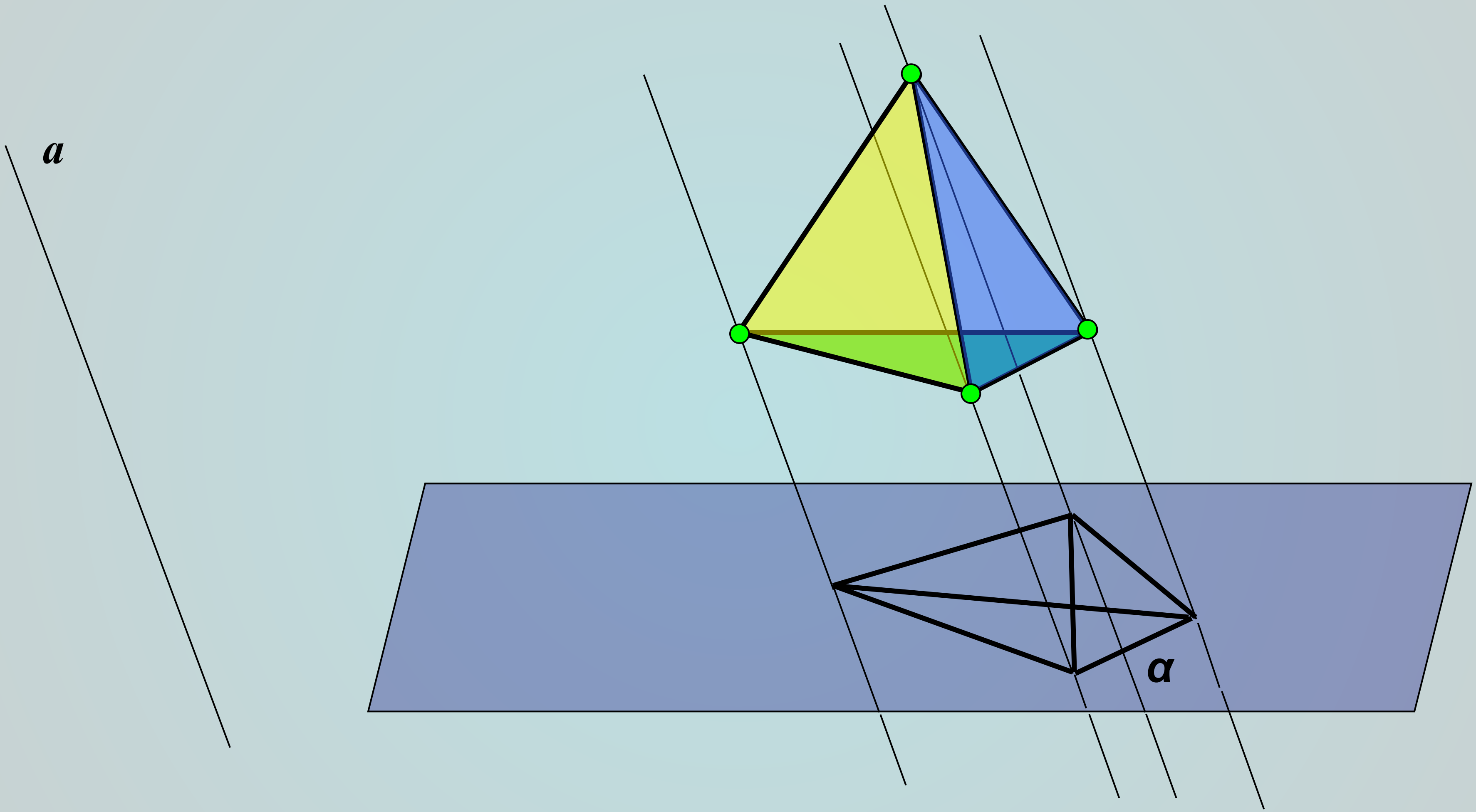
На изображении окружности строим диаметр, через середину радиуса – перпендикулярную ему хорду. Достраиваем до треугольника.



Изображение куба:



Изображение пирамиды:



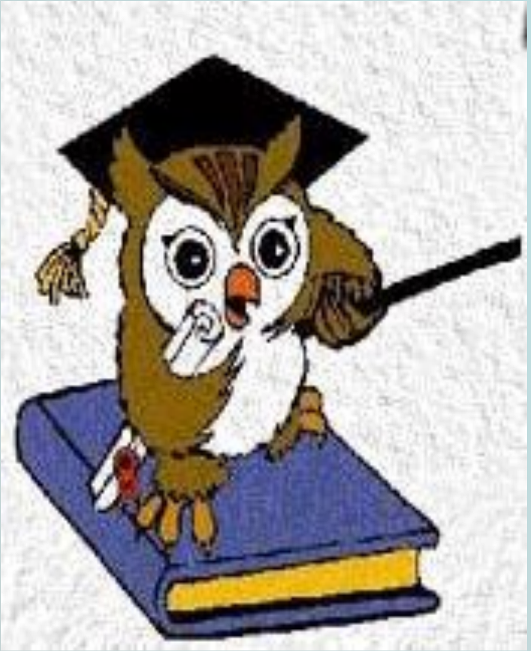
Проверь себя:

- Как построить проекции средних линий треугольника?
- Как на изображении квадрата построить центр описанной около него окружности? Перпендикуляр, опущенный из точки на стороне квадрата, на диагональ квадрата?
- На параллельной проекции треугольника постройте биссектрису из вершины В, если треугольник-оригинал имеет размеры АВ=2 см, ВС=6 см, АС= 5 см.
- Может ли проекцией трапеции с основаниями 4 см и 8 см быть трапеция с основаниями 2 см и 6 см?
- Точки A_1, B_1 являются параллельными проекциями точек A, B.

  $AA_1 = a$, $BB_1 = b$. Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$. Найдите расстояние между точкой C и ее проекцией C_1.

Д/задание: **§ 40 № 2, 3, 4, 5, 8**

§ 41 № 5, 9, 10.



Удачи!!!