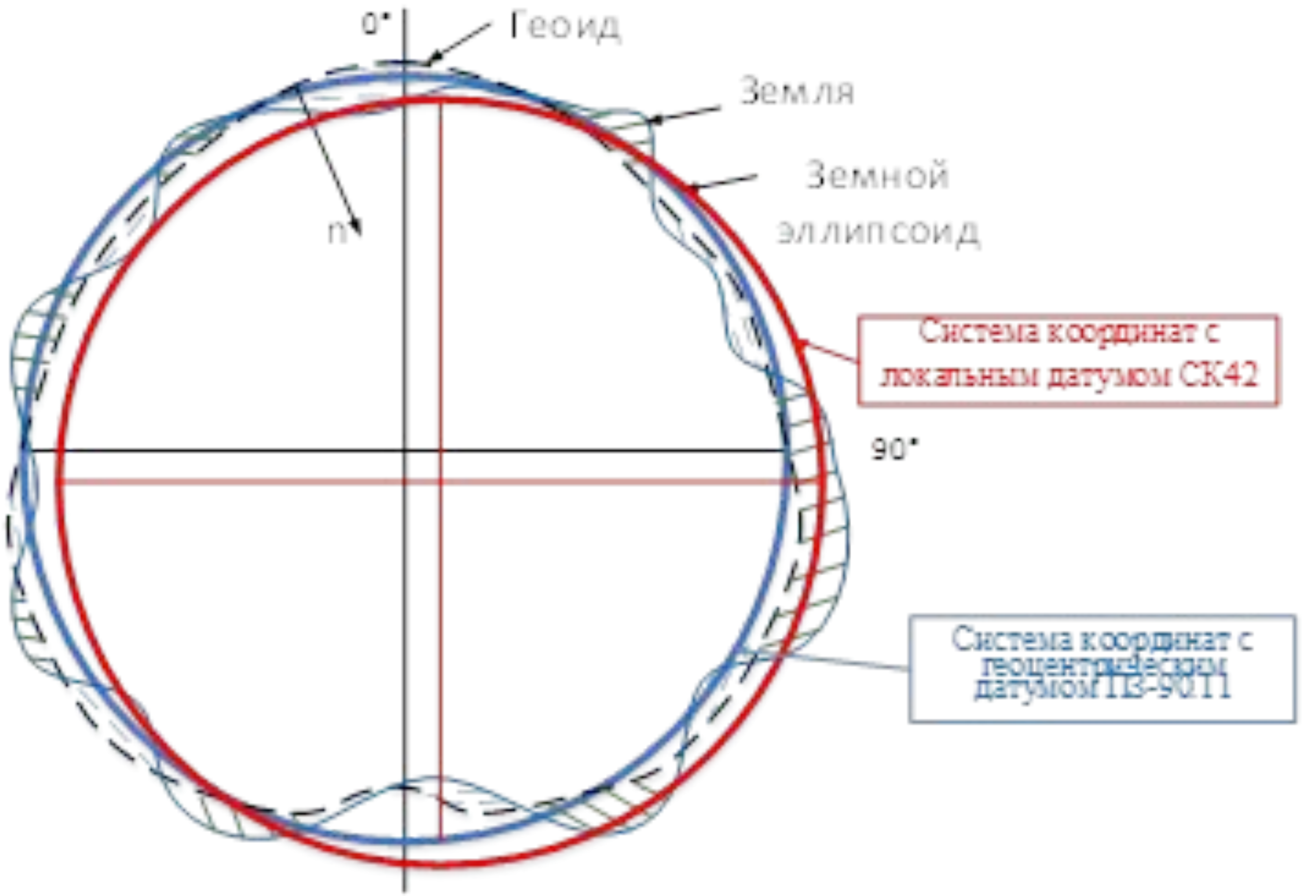
Основы картографии

МОС

Геоид - фигура Земли, образованная уровенной поверхностью, совпадающей с поверхностью Мирового океана в состоянии полного покоя и равновесия и продолженной под материками. Уровенная поверхность — поверхность, на которой потенциал силы тяжести Земли всюду имеет одно и то же значение.

Геоид тоже не может быть описан аналитически. Вместо него, в качестве поверхности, используется эллипсоид вращения с малым сжатием, причем, берут его таких размеров и так ориентируют в теле Земли, чтобы он напоминал геоид – это референц- эллипсоид (земной эллипсоид, рис.1.). При построении эллипсоида соблюдаются следующие условия:

- Центр эллипсоида должен совпадать с центром тяжести земли.
- Плоскость экватора эллипсоида совпадает с плоскостью экватора земли.
- Сумма квадратов уклонений по высоте от поверхности эллипсоида от поверхности Геоида должна быть минимальной.



Системы отсчета (Датумы)

В разных странах приняты свои референц-эллипсоиды, различающиеся своими параметрами. Такие параметры называются Датумами , то есть набором параметров и контрольных точек, используемых для точного задания трехмерной формы Земли. . Наиболее широко используемым датумом является Мировая геодезическая система 1984 года (WGS84) (Табл.1.1). Она служит основой для измерения местоположений во всем мире. В РФ в соответствии с Постановлением правительства Российской федерации от 24 ноября 2016 года N 1240 «Об установлении государственных систем координат, государственной системы высот и государственной гравиметрической системы» используется для «решения навигационных задач» эллипсоид ПЗ-90.11. Это **общеземная система координат,** аналогичная “World Geodetic System” (WGS – 84). Системы получены независимо друг от друга по результатам наблюдений геодезических, геодинамических и навигационных ИСЗ, а также по наземным гравиметрическим данным. Параметры этих систем координат совпадают в пределах точности их определения.

	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
a	6 378 137	6 378 136	6 378 136,500	6 378 245
b	6 356 752,314	6 356 751,362	6 356 751,758	6 356 863,019
α	1/298,2572235	1/298,25784	1/298,2564151	1/298,3
e^2	0,00669437999	0,006694366177	0.0066934216	0,00669342162
e'^2	0,00673949682	0,006739482743	0.081813333	0,00673852541

где a- большая полуось;
b - малая полуось;
α=(a-b)/a - полярное сжатие;
e=√(a^2-b^2)/a – первый эксцентриситет;
e^'=√(a^2-b^2)/b – второй эксцентриситет.

Системы координат

Географическая система координат

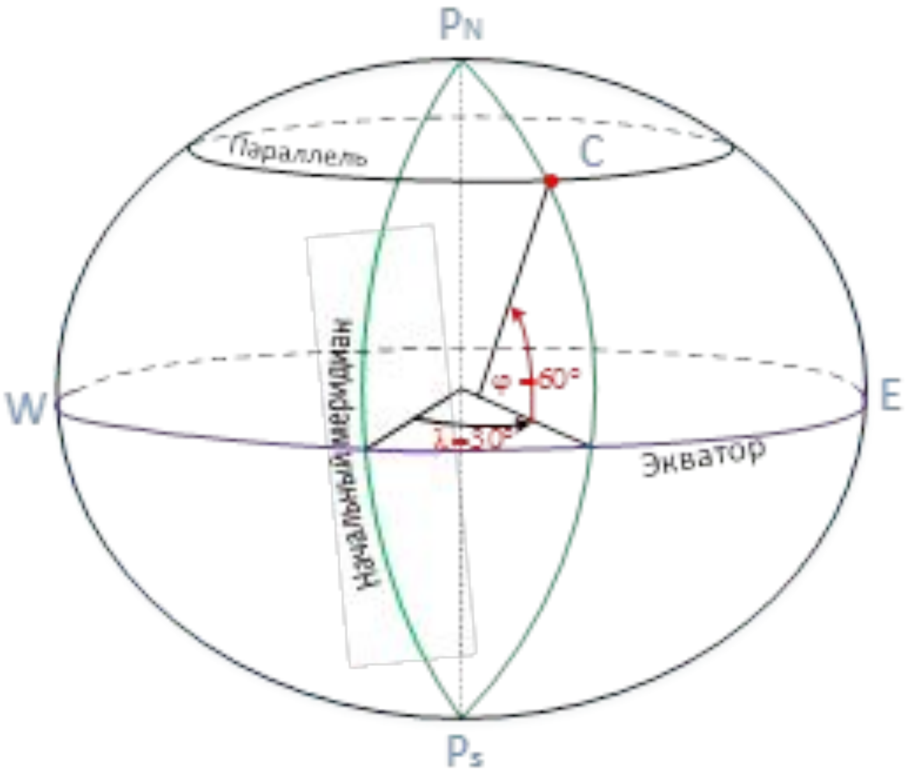
Поскольку земной шар изначально имеет форму близкую к сферической, положение любой точки на поверхности достаточно просто определяется относительно условного центра Земли (условного центра вращения земного эллипсоида) в угловых величинах.

Широта – угол ϕ между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора .

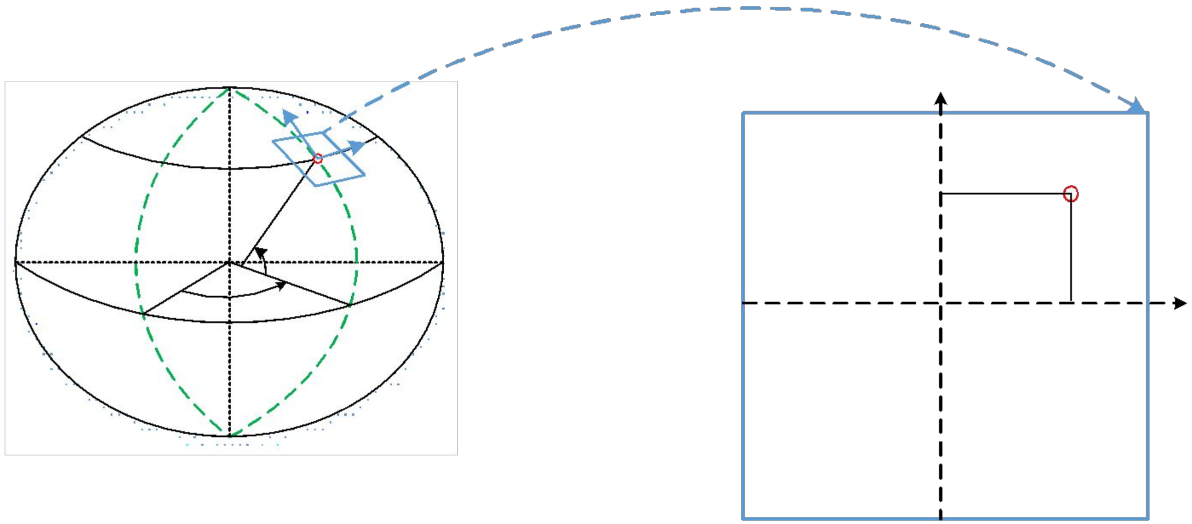
Долгота – двугранный угол λ между меридианом данной точки и начальным меридианом (Гринвичским.

Для географической системы координат в качестве начального (нулевого) меридиана принят Гринвичский меридиан, а в качестве нулевой параллели – экватор.

Земной шар делится по долготам на 360 градусов. Долгота изменяется от 0° до 180°. К востоку (E) с плюсом, к западу (W) с минусом. Широта от 0° до 90°. К северу с плюсом, к югу с минусом. Измеряется в градусах и минутах



Локальная система координат



Для решения практических задач часто используется прямоугольная локальная система координат Она основана на плоскости. Реальные географические координаты измеряются в значениях x-, y- координат от определенной начальной точки. Измеряются в линейных величинах. Преобразование географических координат в двумерную систему координат приводит к искажениям одного или более свойств пространства (площади, формы, расстояния и направления). На рисунке изображен участок земной поверхности на плоскости. По оси ординат откладывается разность широт $\Delta\varphi$, а по оси абсцисс отшествие $\Delta\omega$, связанное с разностью долгот соотношением $\Delta\omega = \Delta\lambda \ \cos\varphi_{\text{ср}}$, где $\varphi_{\text{ср}}$- средняя широта. Переход от локальной системы к географической осуществляется по формулам

$$\varphi_M = \varphi_C + \Delta\varphi$$
$$\lambda_M = \lambda_C + \Delta\omega / \cos\varphi_{\text{ср}}$$

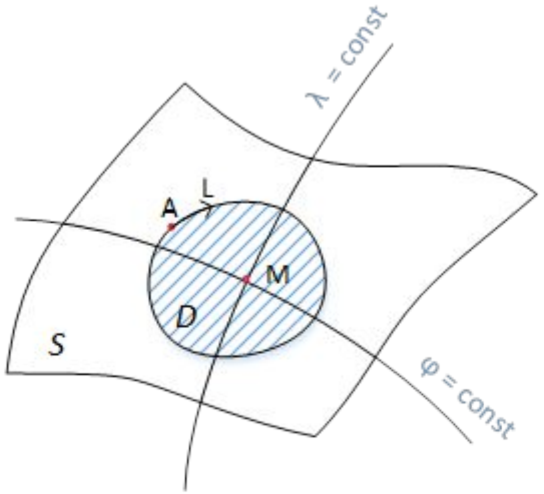
Понятие о картографической проекции

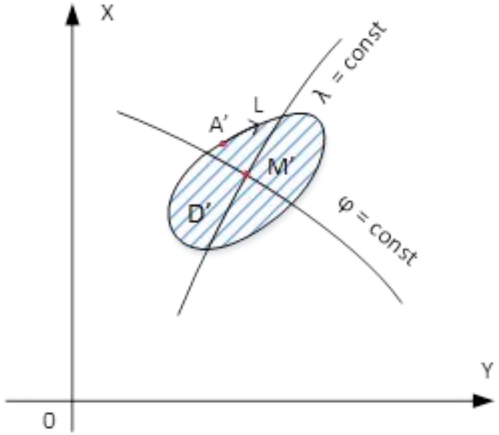
Проблема изображения земной поверхности на плоскости решается в два этапа:

1. Неправильная физическая поверхность Земли отображается на математически правильную поверхность земного эллипсоида (поверхность относимости).

2. Поверхность относимости отображается на плоскости по тому или иному закону.

Картографическая проекция – определенный способ отображения одной поверхности на другую, устанавливающий аналитическую зависимость между координатами точек эллипсоида (сферы) и соответствующих точек плоскости. Пусть на поверхности сфероида (S) задана замкнутая область D,





Положение точки M на этой поверхности определено координатными линиями λ=const, φ=const.
Пусть этой точке M на плоскости в прямоугольных координатах X и Y соответствует точка M' (рис. 1.5). Тогда между этими точками существует следующая связь:

$$\boldsymbol{x = f_1(\varphi, \lambda)}$$
$$\boldsymbol{y = f_2(\varphi, \lambda)}$$

В этих уравнениях x и y – плоские прямоугольные координаты изображаемой на плоскости точки, выраженные как функции географических координат той же точки на поверхности эллипсоида. В этих уравнениях x и y – плоские прямоугольные координаты изображаемой на плоскости точки, выраженные как функции географических координат той же точки на поверхности эллипсоида.

Для того, чтобы эта функциональная зависимость описывала картографическое отображение, которое должно быть непрерывное и однозначное, необходимо наложить на функции следующие требования:

1) f_1 и f_2 должны быть однозначны;

2) f_1 и f_2 должны иметь непрерывные частные производные

3) f_1 и f_2 должны иметь определитель матрицы частных производных (якобиан) больше нуля.

Только в этом случае точка М отобразится только одной точкой М’ и точке М’ будет соответствовать на поверхности единственная точка М.

Если выбрать закон изображения точек эллипсоида на плоскости, то можно получить формулы для перехода от расстояний и углов на поверхности эллипсоида к соответствующим расстояниям и углам на плоскости.

Законов изображения поверхности эллипсоида на плоскости может быть бесчисленное множество; очевидно, каждый закон изображения определяется видом функций f_1 и f_2. С геометрической точки зрения условия, накладываемые на функции, означают следующее:

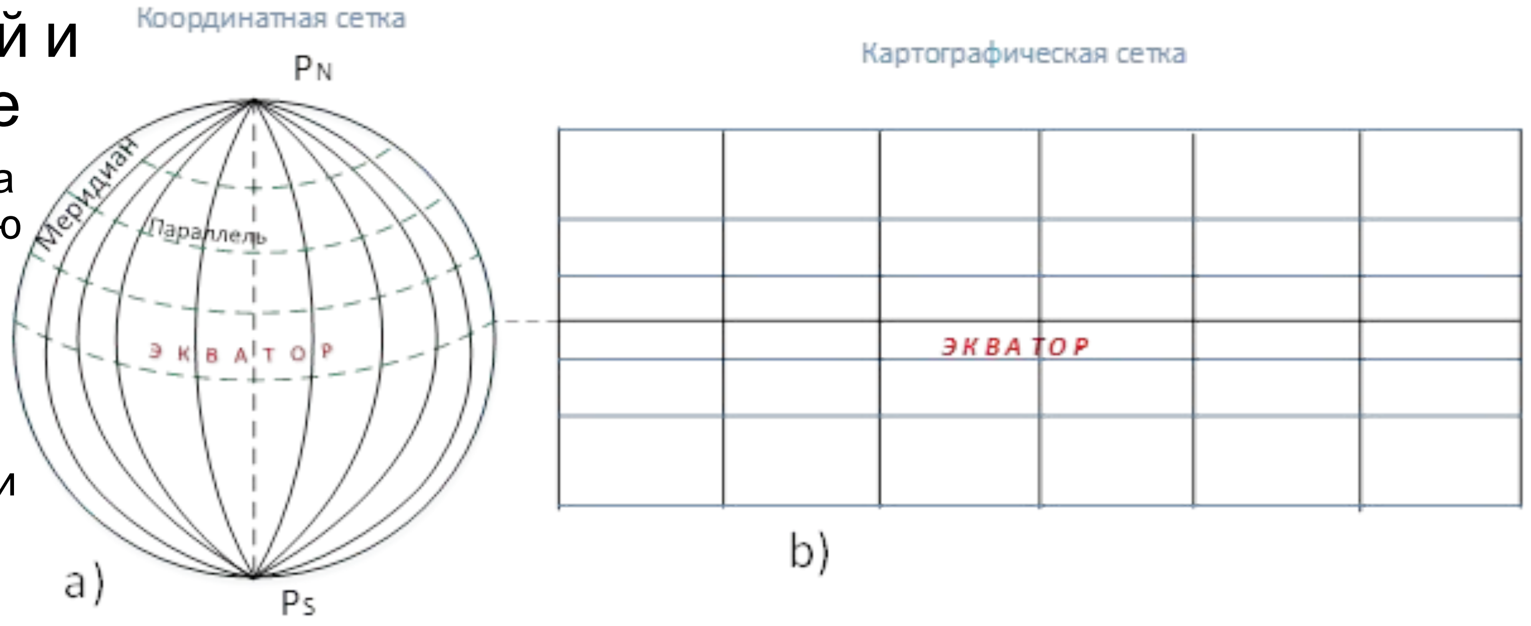
1) бесконечно малому приращению координат на одной поверхности, соответствует бесконечно малое приращение координат на второй;

2) бесконечно малый линейный отрезок, взятый на одной поверхности, отображается на второй также бесконечно малым линейным отрезком;

3) два линейных бесконечно малых параллельных отрезка, взятые на одной поверхности, отображаются на второй также бесконечно малыми параллельными отрезками;

- $$detA = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = H = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} > 0$$

Понятие о координатной и картографической сетке



Линии меридианов и параллелей на эллипсоиде образуют координатную сетку.

Параллель – это след сечения поверхности эллипсоида плоскостями, проходящими перпендикулярно полярной оси (оси вращения эллипсоида).

Меридиан - это след сечения поверхности эллипсоида плоскостями, проходящими через полярную ось и точку на поверхности эллипсоида.

Координатная сетка – сеть координатных линий на поверхности (рис. a)).

Картографическая сетка – изображение координатной сети на плоскости в заданной проекции (рис. b))

Картографическая сетка – изображение координатной сети на плоскости в заданной проекции (рис. 1.6 b))

Картографические сетки могут быть нормальными, поперечными и косыми.

Нормальная картографическая сетка – это наиболее простое изображение координатных линий в заданной проекции на плоскости в той или иной системе координат. В случае прямых проекций, когда географический полюс совпадает с полюсом нормальной системы, основная и нормальная сетки совпадают. В случае косых и поперечных проекций такого совпадения нет.

Понятие о масштабах

Учитывая, что эллипсоид вращения, сфера и плоскость имеют разные меры кривизны, при их отображении друг на друга всегда будут возникать искажения в длинах, углах, площадях.

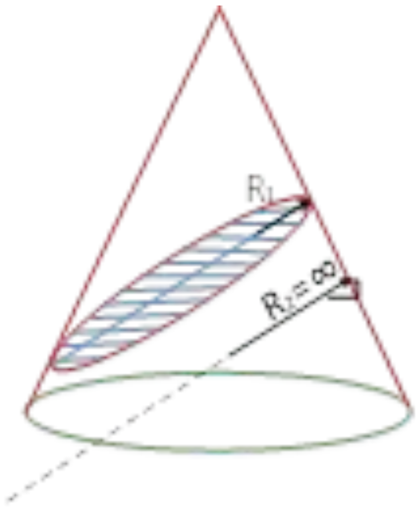
Из дифференциальной геометрии известно, что в любой точке каждой поверхности существуют два взаимно перпендикулярных главных нормальных сечения. Радиус кривизны одного из этих сечений наибольший, а другого – наименьший по сравнению с радиусами кривизны всех прочих нормальных сечений, походящих через ту же точку.

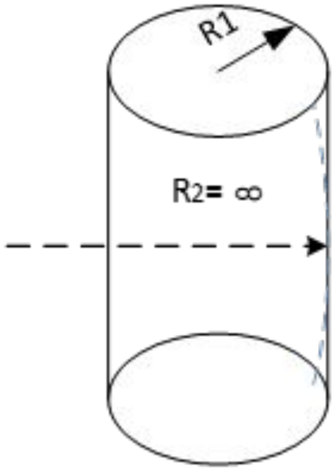
Радиусы кривизны главных нормальных сечений называются главными радиусами кривизны в данной точке поверхности.

Гауссова кривизна, или мера кривизны, поверхности в данной точке определяется выражением

$$\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R_1 R_2}}$$

где $R_1 R_2$ – главные радиусы кривизны





При изгибании поверхности произведение $R_1 \cdot R_2$ остается постоянным, хотя сами главные радиусы изменяются. Так как радиус прямой на плоскости R=∞ , то Гауссова кривизна плоскости $k = \frac{1}{\infty^2} = 0$.

Гауссова кривизна конуса и цилиндра равна $k = \frac{1}{R \cdot \infty} = 0$

Если Гауссова кривизна равна нулю, то поверхность может быть развернута на плоскость без искажений, это конус и цилиндр. Разрезая конус и цилиндр по образующей, получим изображение на бумаге без искажений. Что было на цилиндре, то и на бумаге (карте).

Для шара, $k_{\text{ш}} = \frac{1}{R \cdot R} \neq 0$, а для сфероида $k_{\text{сф}} = \frac{1}{M \cdot N} \neq 0$

Развернуть сферу или эллипсоид без искажений нельзя, так как Гауссова кривизна уже не будет равна 0. У сферы главные радиусы равны R, а для сфероида M и N.

На каждой карте следует различать три масштаба:

1) μ - масштаб длин или частнолинейный (частный) масштаб

2) p – масштаб площадей

3) m – главный или общий масштаб

Это величины, которые характеризуют искажения.

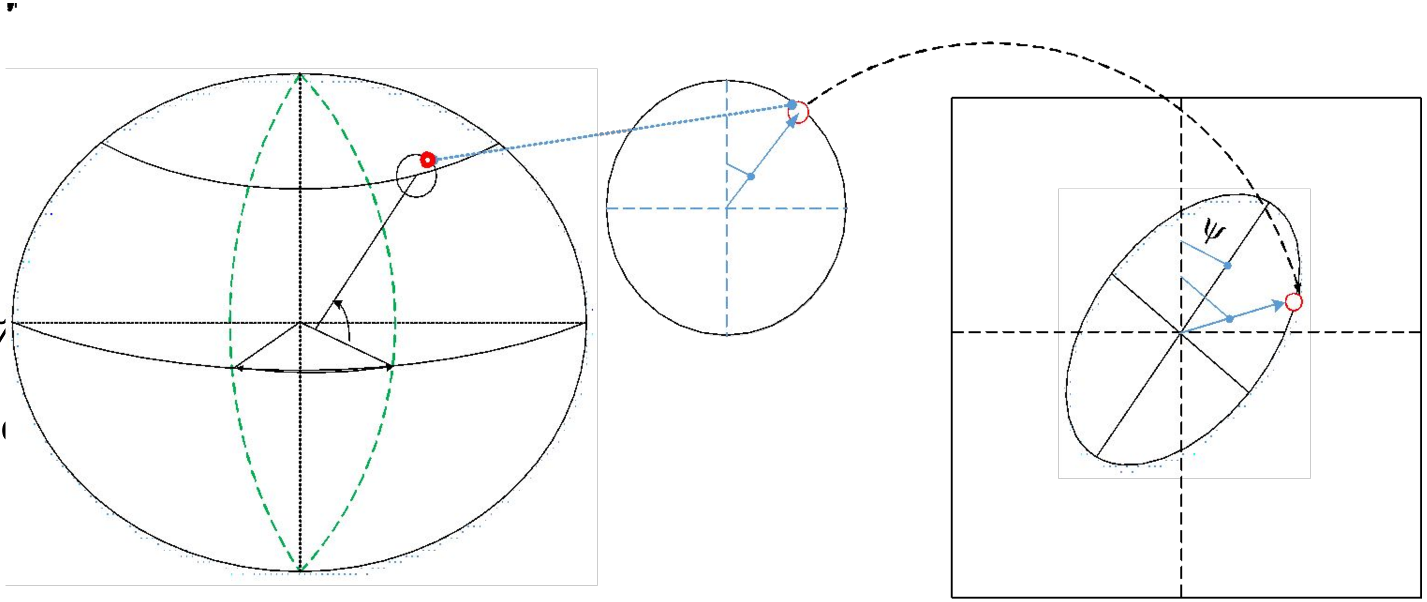
Масштаб длин (μ) – это отношение бесконечно малого линейного отрезка, взятого на плоскости в данной точке по данному направлению к соответствующему бесконечно малому линейному отрезку на поверхности. $\mu = \frac{dS_2}{dS_1}$.

Масштаб площадей (p) – отношение элементарной площадки на плоскости к соответствующей элементарной площадке на поверхности

$p = \frac{dSQ_2}{dSQ_1}$. Этот масштаб является функцией положения точки и не зависит от направления.

Главный масштаб (m) – это степень уменьшения земной поверхности при изображении ее на плоскости.

Эллипс искажений



При изображении любой произвольной поверхности на другую с точностью до бесконечно малых величин, бесконечно малая окружность на поверхности эллипсоида (сферы) изображается на другой поверхности (плоскости) бесконечно малым эллипсом

В частных случаях, а именно в равноугольных (конформных) проекциях, в которых частные масштабы длин вдоль меридианов и параллелей равны (m=n). Бесконечно малая окружность на поверхности эллипсоида (сферы) изображается на плоскости подобной бесконечно малой окружностью. Отметим, что для геометрической интерпретации искажений удобнее использовать не бесконечно малые, а конечные величины. Исходя из этого, эллипсом искажений (индикатрисой Тиссо) назвали эллипс конечных размеров, при радиусе окружности равном 1. Индикатриса Тиссо – эллипс конечных размеров, каждый радиус-вектор которого равен масштабу длин в точке по данному направлению и оси которого совпадают с главными направлениями. Таким образом на рис. а) изображена единичная бесконечно малая окружность на эллипсоиде, а на Рис b) соответствующий эллипс на изображении (карте). Характер искажений определяется

системой $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\lambda}) \end{aligned}\right\} (*)$

Разложим систему в ряд Тейлора, предварительно унифицировав обозначения.

Пусть $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $Z = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

Перепишем (*) с новыми обозначениями.

$$x_1 = f_1(z_1, z_2)$$
$$x_2 = f_2(z_1, z_2)$$

При разложении имеем ввиду, что координатам на сфероиде Z дадим приращения ΔZ и получим приращения на изображении (проекции) ΔX

Перепишем систему с учетом новых обозначений

$$X_{и1} - X_{с1} = a_{11}\Delta z_1 + a_{12}\Delta z_2$$
$$X_{и2} - X_{с2} = a_{21}\Delta z_1 + a_{22}\Delta z_2$$

или в матричном виде

$$\begin{matrix} a_{11}\Delta z_1 + a_{12}\Delta z_2 = \Delta x_1, \\ a_{21}\Delta z_1 + a_{22}\Delta z_2 = \Delta x_2, \end{matrix}; \qquad A\Delta Z = \Delta X$$

При анализе искажений представляет интерес факт того, как небольшие изменения в начальных координатах ΔZ отобразятся в проекции, это ΔX. В первую очередь длина. Для простоты выберем в начальных координатах изменение равное окружности с единичным радиусом dS_1=1

- В картографической проекции длина обязательно изменится, так как поверхность земли развернуть на плоскость без искажений невозможно.

Квадрат длины отрезка на проекции может быть записан в виде скалярного произведения вектора самого на себя.

$$(dS_2)^2 = \Delta X^T \Delta X = (A\Delta Z)^T A\Delta Z = \Delta Z^T A^T A\Delta Z$$

Распишем отдельно произведение $A^T A$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{bmatrix} = N$$

- Это квадратичная форма, которая как раз и формирует преобразование единичного вектора на сфероиде в вектор на изображении. Если прокручивать единичный вектор на сфероиде от 0° до 360°, то на изображении отобразится эллипс. Используя известные формулы для поиска собственных значений и собственных векторов матрицы N (см. оценка точности места), определим направление большой полуоси, указывающей на направление с максимальными искажениями, а большая полуось даст числовое значение. Если начальный радиус на земной поверхности (эллипсоиде) принимался равным 1 ($S_1 = 1$), то значение большой полуоси позволит определить s_2, фактически это максимальное значение частного масштаба.

Таким образом, выражения элементов квадратичной формы отвечают за искажения. В картографии они называются коэффициентами Гаусса.

$$E_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = a_{11}^2 + a_{21}^2 = n_{11}$$

$$F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\frac{\partial f_2}{\partial \lambda} = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = n_{21}$$

$$G_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right)^2 = n_{22}$$

Отметим важное обстоятельство. Если F_2=0, то разворота полуосей эллипсоида на изображении нет, угол ψ=0.

Фактически готов математический аппарат для анализа искажений любых проекций.

Существует два основных способа построения картографических проекций: геометрический и аналитический.

<u>Геометрический</u>

Этот способ основан на законах линейной перспективы. Землю принимают за поверхность определенного радиуса и проектируют на боковую поверхность цилиндра или конуса. Причем, указанные поверхности могут либо касаться (рис. 1.1, 1.3), либо сечь её (Рис. 1.2)

Линии сопряжения касательной или секущей поверхности с поверхностью эллипсоида, называются стандартными параллелями или линиями нулевых искажений.

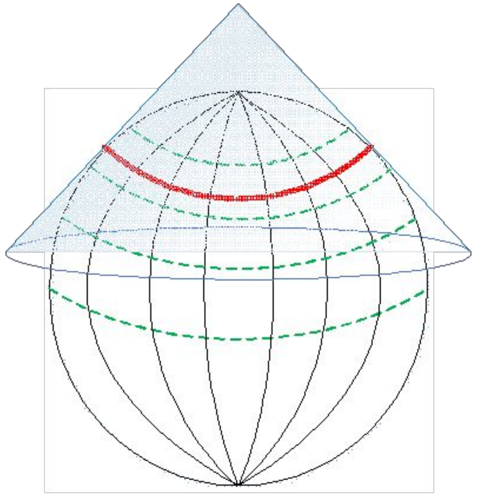


Рис 1.1.

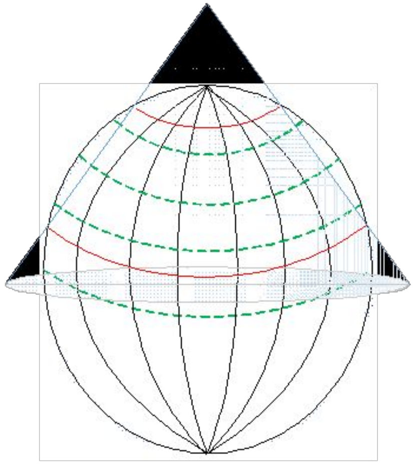


Рис 1.2.

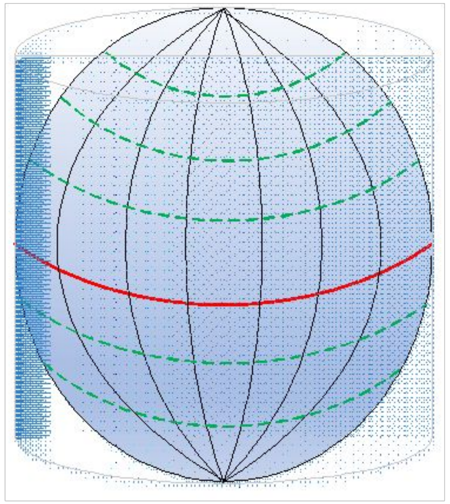


Рис 1.3.

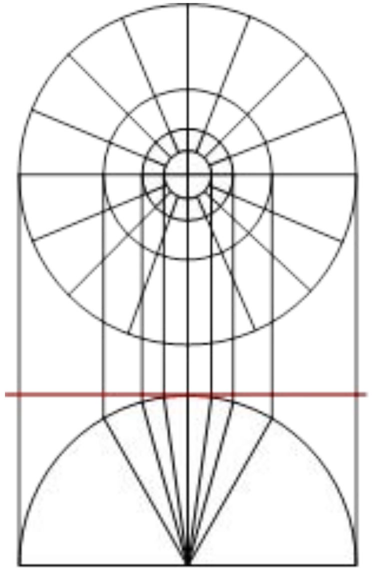
При проектировании точек земной поверхности на плоскость, получаем перспективные проекции. В зависимости от удаления точки глаза от центра земной поверхности, все перспективные проекции подразделяются на:

а) гномонические (центральные) – точка зрения совпадает с центром земной сферы

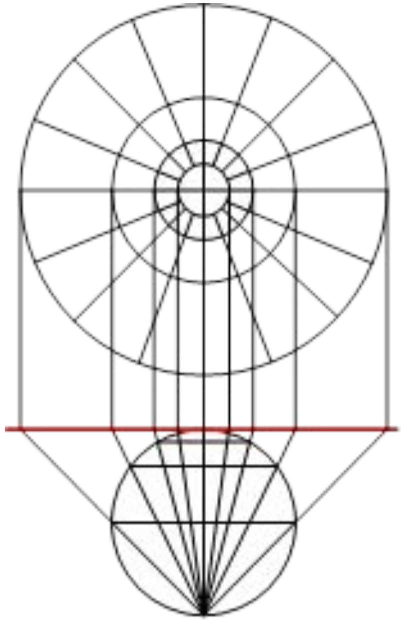
б) стереографические - точка зрения находится на поверхности сферы

в) ортографические – рассматривает поверхность из любой точки вне земной сферы. Получается путем проектирования точек земной сферы пучком параллельных прямых лучей, ортогональных к картинной плоскости Рис. 1.16. В зависимости от положения центральной точки карты гномоническая проекция может быть:

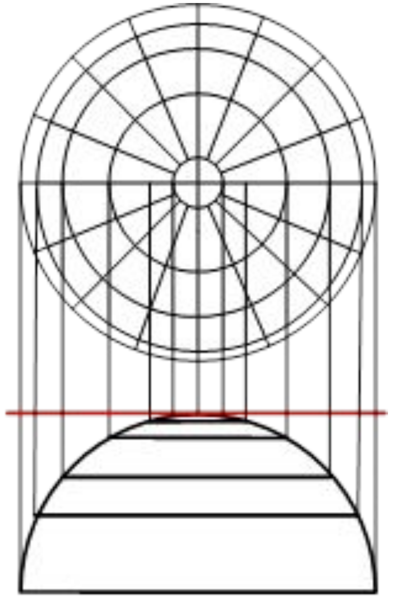
- нормальной (полярной) — если центральная точка совмещена с географическим полюсом,
- экваториальной (поперечной) — если центральная точка расположена на экваторе,
- косой — если центральная точка расположена в некоторой промежуточной широте.



а) Гномоническая



б) Стереографическая



в) Ортографическая

- **Аналитический**

Этот способ построения проекций основан на формулах, устанавливающих функциональную зависимость между точками первой и второй поверхности, имеющих вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned}\right\}$$

Аналитический способ построения проекций является более гибким, позволяет изыскивать проекции по заранее заданному характеру искажения.

Классификация картографических проекций

Признаков для классификации может быть несколько. Существует несколько классификаций. *Одни и те же проекции, в зависимости от признака, могут попасть в разные группы*. В настоящее время в нашей стране пользуются классификацией Каврайского. Согласно ей, все проекции классифицируются по **четырем** признакам:

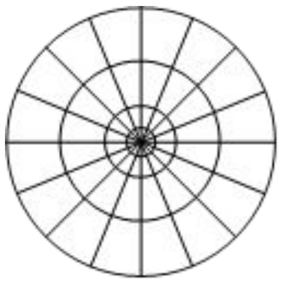
- характеру искажения,
- виду меридианов и параллелей нормальной сетки,
- положению полюса нормальной системы координат,
- способу использования

По характеру искажения

1. Равноугольные (конформные) – углы и азимуты передаются без искажений, т.к. масштабы длин в точках не зависят от направления. Как следствие, ***в этих проекциях сохраняется подобие в бесконечно малых частях. Картографическая сетка в этих проекциях ортогональна. На картах в равноугольных проекциях можно измерять углы и азимуты, на них удобно производить измерение длин по всем направлениям***.
2. Равновеликие (эквивалентные) – масштаб площадей остается постоянным и равным единице, а, следовательно, площади передаются без искажений. На картах в равновеликих проекциях можно делать сопоставление площадей.
3. Равнопромежуточные (эквидистантные) – масштаб по одному из главных направлений сохраняется и равен единице (a=1 или b=1)
4. Произвольные – присутствуют все виды искажений.

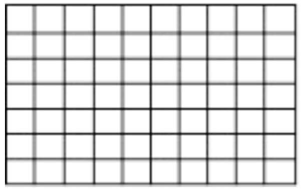
- Свойства равноугольности, равновеликости, равнопромежуточности одновременно на одной и той же проекции несовместимы. Проекции, на которой всюду отсутствовали бы искажения длин, т.е. было бы сохранено постоянство масштаба, **не существует**. На карте могут отсутствовать либо искажения углов, либо площадей, но одновременно отсутствовать искажения углов и площадей не

По виду меридианов и параллелей нормальной сетки



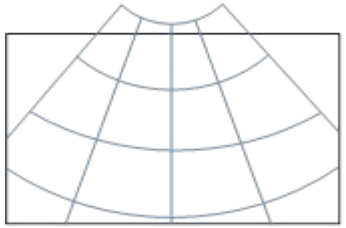
Азимутальная

Азимутальные – параллели – одноцентренные окружности, меридианы – пучок прямых, расходящихся радиально из центра параллелей. Эти проекции применяются в прямом положении - для полярных территорий; в поперечном - для изображения зап. и вост. полушарий; в косом - для изображения территорий, имеющих округлую форму.



Цилиндрическая

Цилиндрические – параллели - параллельные прямые, перпендикулярные осевому меридиану, причем параллели всегда равноразделенные (отрезки параллелей пропорциональны разностям долгот); меридианы - Все меридианы прямые, перпендикулярные параллелям. Расстояния между меридианами пропорциональны разностям долгот. В этих проекциях можно изобразить весь земной шар. Наиболее выгодны эти проекции для изображения территорий, расположенных вблизи экваториальных широт и растянутых вдоль экватора (или вдоль некоторой стандартной параллели).

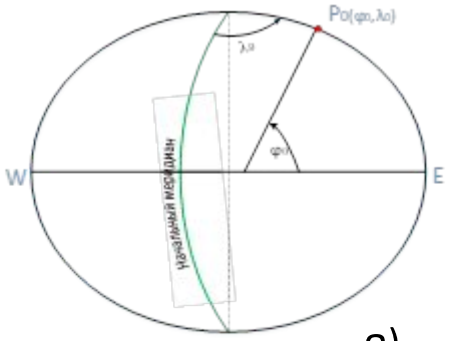


Коническая

Конические – параллели - дуги концентрических окружностей, общий центр которых лежит на осевом меридиане или его продолжении. Параллели равноразделенные, т.е. вдоль каждой параллели отрезки между меридианами одинаковые; меридианы - пучок прямых, расходящихся радиально из точки, являющейся центром параллелей. Углы между меридианами пропорциональны разностям их долгот. Эти проекции наиболее выгодны для изображения территорий, расположенных в средних широтах и растянутых вдоль параллелей.

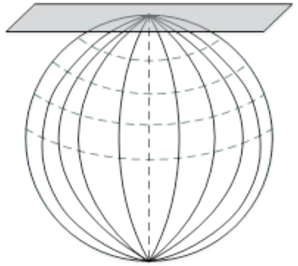
К этой классификации относятся также псевдоконические, псевдоцилиндрические, поликонические, круговые. В навигационной картографии они встречаются достаточно редко.

По положению полюса нормальной системы координат



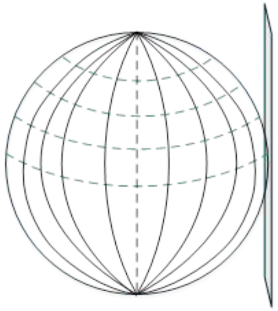
а)

P_0 - полюс нормальной системы координат совмещается с центральной точкой картографируемой области (Рис. а)). Это делается для того, чтобы уменьшить величины искажений в пределах картографируемой территории. В зависимости от величины ϕ_0 все проекции классифицируются:



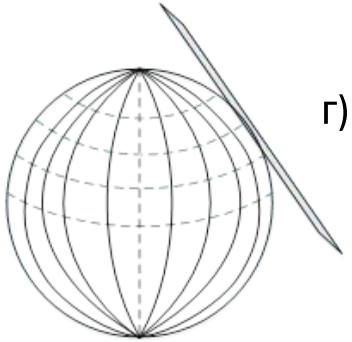
б)

- Полярные (нормальная) – полюс нормальной системы координат совпадает с географическим -- ϕ_0 =90° Рис. б).



в)

- Поперечные (трансверсальные) – полюс нормальной системы совпадает с экватором - ϕ_0 =0° Рис. в)



г)

- Косые (наклонные) – полюс нормальной системы координат располагается между географическим полюсом и экватором - 0°< ϕ°<90° Рис. г)

По способу использования

1) Сплошные – вся картографируемая территория проектируется на плоскость по одному закону

2) Многополосные – территория разбивается на ряд широтных зон, каждая из которых проектируется на плоскость по одному и тому же закону, но с разными параметрами для каждой из зон. Преимущества - малые величины искажений; недостатки – невозможно получить сплошное изображение. (трапециевидная проекция Мюфлинга, применялась для карт крупного масштаба до 1928г. Для СССР)

3) Многогранные – территория разбивается на ряд меридиональных зон, каждая из которых проектируется на плоскость по одному и тому же закону, но с разными параметрами для каждой из зон. Преимущества - малые величины искажений; недостатки – невозможно получить сплошное изображение. (проекция Гаусса-Крюгера)

4) Составные – часть территории проектируется по одному закону, а оставшаяся часть по другому. (составная проекция для карты Луны – в этом случае экваториальная часть Луны проектируется в равноугольных цилиндрических проекциях, а полюса в равноугольных азимутальных).