Лекция 2-9.

12.2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

12.2.1 Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

- **Определение.** Уравнения вида $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$

называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

- Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид

$$y'' = f\left(x, y, y'\right).$$

- **Пример.** $y'' = x.$ Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма.

- Дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f\left(x, y, y'\right)$$

обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right)$, содержащей две произвольные постоянные. Это множество решений называется <u>общим решением</u>.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$$

Пример.

$$y'' = x. \quad y\big|_{x=2} = 2, \; y'\big|_{x=2} = 3.$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \qquad y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \qquad C_1 = 1, \; C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

- **Геометрический смысл начальных условий:**
- Помимо точки (x_0, y_0), задаем угловой коэффициент касательной.

Теорема о существовании и единственности решения.

- Если функция $f\left(x, y, y'\right)$ и ее производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}$

непрерывны в окрестности значений $\left(x_0, y_0, y'_0\right)$,
то дифференциальное уравнение $y'' = f\left(x, y, y'\right)$
в достаточно малом интервале $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$
имеет единственное решение $y = y\left(x\right)$, удовлетворяющее
заданным начальным условиям $y\big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\big|_{x=x_0} = y'_0.$

- Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y\big|_{x=1} = 2,\ y'\big|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение. Если задать начальные условия при $x_0 = 0,$ то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

- Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают <u>граничные условия</u> (краевые условия)
- $$y\big|_{x=x_1} = y_1,\ y\big|_{x=x_2} = y_2$$

  (сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.). В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений. Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример. $y'' = x. \quad y\big|_{x=1} = 0, \; y\big|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \; \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6}, \; C_2 = 1. \qquad y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

12.2.2. Частные случаи дифференциальных уравнений **2-**го порядка $y'' = f(x, y, y')$.

- 1) Правая часть не содержит y и y'.
- $$y'' = f(x).$$

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y = \int \left[\int f(x)\,dx \right] dx + C_1 x + C_2.$$

2) Правая часть не содержит y.

$$y'' = f\left(x, y'\right).$$

- Замена $y' = z \Rightarrow y'' = z'$.

$$z' = f\left(x, z\right).$$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi\left(x, C_1\right), \qquad y' = z, \qquad y = \int \varphi\left(x, C_1\right) dx + C_2.$$

- **Пример.**

$$y'' + \frac{y'}{x} = x. \qquad y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x, \qquad z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \;\; y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln\left|x\right| + C_2.$$

3) Правая часть не содержит x.

$$y'' = f\left(y, y'\right).$$

- Замена

$$y' = z\left(y\right) \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z. \qquad zz' = f\left(y, z\right).$$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi\left(y, C_1\right), \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi\left(y, C_1\right), \qquad \int \frac{dy}{\varphi\left(x, C_1\right)} = x + C_2.$$

- **Пример.**

$$2yy'' + y'^2 = 0. \quad y' = z\left(y\right), \quad y'' = z'z. \qquad 2yz'z = -z^2, \qquad \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y},$$

$$\ln\left|z\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|y\right| + \ln\left|C_1\right|, \quad z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \ \left(y > 0\right). \ \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \ \sqrt{y^3} = C_1 x + C_2.$$

- При сокращении на z было потеряно решение $z = y' = 0$, т.е. $y = const.$

12.2.3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

- **1) Уравнения вида** $y^{(n)} = f(x).$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1 x + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

....

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

$$f_n(x) = \int\int\ldots\int f(x)\,dx^n.$$

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример.

$$y'' = xe^{-x}.$$

$$y' = \int xe^{-x}dx + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int\left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right)dx + C_2 = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

2) Уравнения вида

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

- **Подстановка** $y^{(k)} = z$ **понижает порядок уравнения на** k **:**

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

3) Уравнения вида $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$

- **Подстановка** $y' = z(y)$ **понижает порядок уравнения на 1:**

$$y'' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dz}{dy}y'\frac{dz}{dy} + z\frac{d^2z}{dy^2}y' = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right]$$

- **и т. д.**

4) Уравнения вида $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ однородные относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$.

- Подстановка $\dfrac{y'}{y} = z(x)$ понижает порядок уравнения на 1:
- $$\frac{y''y - (y')^2}{y} = z'(x) \Rightarrow \frac{y''}{y} = z' + z^2$$ и т.д.

Пример. $$3y'^2 = 4yy'' + y^2.$$

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 4\frac{y''}{y} + 1. \qquad \frac{y'}{y} = z(x), \qquad \frac{y''}{y} = z' + z^2.$$

$$3z^2 = 4z' + 4z^2 + 1, \qquad -4z' = z^2 + 1, \qquad \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{4},$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4}\int dx + C_1, \qquad \operatorname{arctg} z = C_1 - \frac{x}{4} \Rightarrow z = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right), \ \ln|y| = 4\ln\left|\cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)\right| + \ln|C_2|.$$

$$y = C_2\cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$