

Лекция 2-9.

12.2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

12.2.1 Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

- **Определение.** Уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

- Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид

$$y'' = f(x, y, y').$$

- **Пример.** $y'' = x$. Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма.

- Дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные. Это множество решений называется общим решением.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Пример.

$$y'' = x. \quad y|_{x=2} = 2, \quad y'|_{x=2} = 3.$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

- **Геометрический смысл начальных условий:**
- Помимо точки (x_0, y_0) , задаем угловой коэффициент касательной.

Теорема о существовании и единственности решения.

- Если функция $f(x, y, y')$ и ее производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности значений (x_0, y_0, y'_0) , то дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y, y')$ в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$.
- Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение. Если задать начальные условия при $x_0 = 0$, то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

- Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают граничные условия (краевые условия)

$$y|_{x=x_1} = y_1, y|_{x=x_2} = y_2$$

(сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.). В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений. Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример. $y'' = x. \quad y|_{x=1} = 0, \quad y|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \quad \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6}, \quad C_2 = 1. \quad y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

12.2.2. Частные случаи дифференциальных уравнений 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$.

- 1) Правая часть не содержит y и y' .

- $$y'' = f(x).$$

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2.$$

2) Правая часть не содержит y .

$$y'' = f(x, y').$$

- Замена $y' = z \Rightarrow y'' = z'$.

$$z' = f(x, z).$$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(x, C_1), \quad y' = z, \quad y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

- **Пример.**

$$y'' + \frac{y'}{x} = x, \quad y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x, \quad z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Правая часть не содержит x .

$$y'' = f(y, y').$$

- Замена $y' = z(y) \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'z. \quad zz' = f(y, z).$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1), \quad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

- **Пример.**

$$2yy'' + y'^2 = 0. \quad y' = z(y), \quad y'' = z'z. \quad 2yz'z = -z^2, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y},$$

$$\ln|z| = -\frac{1}{2} \ln|y| + \ln|C_1|, \quad z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad (y > 0). \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{y^3} = C_1x + C_2.$$

- При сокращении на z было потеряно решение $z = y' = 0$, т.е. $y = const.$

12.2.3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

- 1) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

.....

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

$$f_n(x) = \int \int \dots \int f(x) dx^n.$$

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Пример.

$$y'' = xe^{-x}.$$

$$y' = \int xe^{-x} dx + C_1 = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int \left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \right) dx + C_2 = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

2) Уравнения вида

$$F\left(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

- Подстановка $y^{(k)} = z$ понижает порядок уравнения на k :

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

3) Уравнения вида

$$F\left(y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

- Подстановка $y' = z(y)$ понижает порядок уравнения на 1:

$$y'' = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dz}{dy} y' \frac{dz}{dy} + z \frac{d^2 z}{dy^2} y' = z \left[\left(\frac{dz}{dy} \right)^2 + z \frac{d^2 z}{dy^2} \right]$$

- И т. д.

4) Уравнения вида однородные относительно

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$
$$y, y', \dots, y^{(n)}.$$

- Подстановка $\frac{y'}{y} = z(x)$ понижает порядок уравнения на 1:

- $$\frac{y''y - (y')^2}{y} = z'(x) \Rightarrow \frac{y''}{y} = z' + z^2 \quad \text{и т.д.}$$

Пример.

$$3y'^2 = 4yy'' + y^2.$$

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 4\frac{y''}{y} + 1.$$

$$\frac{y'}{y} = z(x),$$

$$\frac{y''}{y} = z' + z^2.$$

$$3z^2 = 4z' + 4z^2 + 1,$$

$$-4z' = z^2 + 1,$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{4},$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4} \int dx + C_1,$$

$$\operatorname{arctg} z = C_1 - \frac{x}{4} \Rightarrow z = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right), \quad \ln|y| = 4 \ln \left| \cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) \right| + \ln|C_2|.$$

$$y = C_2 \cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$