Таблица значений распределения χ^2

Число степеней свободы	Уровни значимости			Число степене й	Уровни значимости		
	p=0,05	p=0,01	p=0,001		p=0,05	p=0,01	p =0,001
1	3,84	6,63	10.83	21	32,67	38,93	46,80
2	5,99	9,21	13,82	22	33,92	40,29	48,27
3	7,81	11,07	16,27	23	35,17	41,64	49,73
4	9,49	13,28	18,47	24	36,42	42,98	51,18
5	11,07	15,09	20,51	25	37,65	44,31	52.62
6	12,59	16,81	22.46	26	38,89	45,64	54,05
7	14,07	18,48	24,32	27	40,11	46,96	55,48
8	15,51	20,09	26,12	28	41,34	48,28	56,89
9	16,92	21,67	27,88	29	42,56	49,59	58,30
10	18,31	33,21	29,59	30	43,77	50,89	59,70
11	19,68	34,73	31,26	31	44,99	52.19	61,10
12	21,03	26,22	32,91	32	46,19	53,49	62.49
13	22,36	27,69	34,53	33	47,40	54,78	63,87
14	23,68	29,14	36,12	34	48,60	56,06	65,25
15	25,00	30,58	37,70	35	49,80	57,34	66,62
16	26,30	32,00	39,25	36	51,00	58,62	67,98
17	27,59	33,41	40,79	37	52,19	59,89	69,35
18	28,87	34,81	42,31	38	53,38	61,16	70,70
19	30,14	36,19	43,82	39	54,57	62,43	72,06
20	31,41	37,57	45,31	40	55,76	63,69	73,40

Таблица значений F-распределения

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	6,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,45	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Таблица 5. Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)						
	0,2	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	1,53	2,13	2,78	3.75	4,60	7,17	8,61
5	1,48	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,42	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,95
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2.81	3,49	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,31	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3.65
40	1,30	1,68	2,02	2.42	2,70	3,31	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
Число степеней свободы k	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)						

Критические значения коэффициента Кохрена (G-критерия) для доверительной вероятности p = 95% и числе степеней свободы ν

Число измерений, k	Число степеней свободы, ν										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	7276	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Все значения G-критерия меньше единицы, поэтому в таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при k = 6, ν = 3 имеем $G_{0,95} = 0,5321$.

Гипотеза о неизвестной дисперсии σ^2

Пусть известно S^2 несмещенная оценка дисперсии σ^2.

Проверяем нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0{}^2$

Альтернативных гипотез может быть три:

а) H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$.

б) H_1 : $\sigma^2 > \sigma_0{}^2$

в) H_1 : $\sigma^2 < \sigma_0{}^2$

Для проверки гипотезы используется статистика критерия

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

Для проверки берем критические точки распределения χ^2 Пирсона с $n - 1$ степенями свободы и различными уровнями значимости α.

В случае а) применяется двусторонний критерий

Если $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Замечание: границы области ***несимметричны*** относительно оценки S^2

В случае б) применяется односторонний критерий

Если $\chi^2 < \chi^2_{\alpha;n-1}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется;

В случае в) применяется односторонний критерий

Если $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha;n-1}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

Примеры

1. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии размеров изделий, которая не должна превышать $\sigma_0{}^2 = 0{,}01$ (мм^2) По выборке объема $n = 25$ найдена исправленная выборочная дисперсия $S^2 = 0{,}02$ (мм^2). При уровне значимости 0,05 проверить обеспечивает ли станок требуемую точность.

2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема n =31

x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12
n_i	1	3	7	10	6	3	1

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = 0{,}18$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$

Решение

1. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии размеров изделий, которая не должна превышать $\sigma_0^2 = 0{,}01$ (мм^2) По выборке объема $n = 25$ найдена исправленная выборочная дисперсия $S^2 = 0{,}02$ (мм^2). При уровне значимости 0,05 проверить обеспечивает ли станок требуемую точность.

H_0: $\sigma^2 = 0{,}01$

H_1 : $\sigma^2 > \sigma_0^2$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 * 0{,}02}{0{,}01} = 48$$

$\chi^2_{0,05;24} = 36{,}42$

48>36,42 гипотеза H0 отклоняется в пользу гипотезы H1. Станок не обеспечивает требуемую точность.

Решение

2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема n =31

x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12
n_i	1	3	7	10	6	3	1

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 =$ 0,18 при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma^2 > 0{,}18$
Решение: исправленная выборочная дисперсия = 0,267

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{30 * 0{,}267}{0{,}18} = 44{,}46$$

$\chi^2_{0,05;30}$= 43,77

Гипотеза о теоретической вероятности появления события

Проверяем нулевую гипотезу H_0: $p = p_0$

Альтернативных гипотез может быть три:

а) H_1: $p \neq p_0$

б) $H_1 : p > p_0$

в) $H_1 : p < p_0$

Для проверки гипотезы используется статистика критерия

$$Z = \frac{w - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}\sqrt{n}$$

где w – относительная частота.

Статистика Z сходится к стандартной нормальной величине при $n \to \infty$, т.е. при достаточно больших n можно считать, статистика имеет распределение N(0, 1).

Замечание: метод применяется при больших объемах выборки (n>30).

В случае а) применяется двусторонний критерий

Если $|Z| < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2;$$

В случае б) применяется односторонний критерий

Если $Z < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = 1/2 - \alpha;$$

В случае в) применяется односторонний критерий

Если $Z > -z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = 1/2 - \alpha$$

Примеры

1. Партия изделий принимается, если доля брака не превышает 2%. Среди случайно отобранных 500 изделий оказалось 13 бракованных. Следует ли при уровне значимости 0,05 принять эту партию изделий?

$H_0: p = 0,02$

$H_1 : p > 0,02$

$$Z = \frac{w - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{13/500 - 0,02}{\sqrt{0,02 * 0,98}}\sqrt{500} \approx 0,958$$

$\Phi_0(\mathrm{z}_{\text{кр}}) = 1/2 - 0,05 = 0,45 \Rightarrow \mathrm{z}_{\text{кр}} = 1,65$

$0,958 < 1,65 \Rightarrow$ гипотеза H_0 принимается, т.е. следует принять эту партию товаров

Примеры

2. Торговец утверждает, что он получает заказы в среднем, по крайней мере, от 30% потенциальных клиентов. Можно ли при уровне значимости 0,05 считать это утверждение неверным, если торговец получил заказы от 20 из 100 случайно отобранных потенциальных клиентов?

H_0: $p = 0,3$

H_1 : $p < 0,3$

$$Z = \frac{w - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \frac{20/100 - 0,3}{\sqrt{0,3 * 0,7}}\sqrt{100} \approx -2,18$$

$\Phi_0(z_{кр}) = 1/2 - 0,05 = 0,45 \Rightarrow z_{кр} = 1,65$

$-2,18 < -1,65$ => гипотезу H_0 отвергаем в пользу гипотезы H_1

H_0	Предположения	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$E(X) = a$	Дисперсия σ^2 известна		а)$E(X) = a' \neq a$. б) $E(X) = a' > a$ в) $E(X) = a' < a$	
$E(X) = a$	Дисперсия σ^2 неизвестна		а)$E(X) = a' \neq a$. б) $E(X) = a' > a$ в) $E(X) = a' < a$	
$\sigma^2 = \sigma_0{}^2$	a неизвестно		а) $\sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$. б) $\sigma^2 > \sigma_0{}^2$ в) $\sigma^2 < \sigma_0{}^2$	
$p = p_0$	n велико (n >30)		а) $p \neq p_0$. б) $p > p_0$ в) $p < p_0$	

Проверка параметрических гипотез для двух выборок

1. Зависимые выборки
2. Независимые выборки

Зависимые выборки. Парные наблюдения

Рассматриваются ситуации когда нужно оценить влияние какого-либо воздействия на исследуемые объекты.

Пусть исследуемый признак объектов до воздействия принимает значения x_i, а после воздействия – y_i. (такие наблюдения называют парными).

Вычисляют разности $d_i = x_i - y_i$ и проверяют нулевую гипотезу о равенстве нулю генеральной средней H_0: $a_d = 0$ при неизвестной дисперсии.

Предполагается, что случайные изменения признаков распределены нормально

Пример

Проведена проверка физической подготовки 9 спортсменов, а затем через неделю тренировок. Результаты в баллах приведены в таблице

x_i	76	71	57	49	70	69	66	65	59
y_i	81	85	52	52	70	63	73	83	62

При уровне значимости 0,05 проверить существенно ли улучшилась физподготовка спортсменов

x_i-y_i	-5	-14	5	-3	0	6	-7	-18	-3

H_0: $E(X\text{-}Y) = 0$

H_1 : $\mathrm{E}(X) = a' < a$

d ср = (-5-14+5-3+0+6-7-18-3)/9 = -39/9

$S^2 = 63$

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x_{\text{в}}} - a}{s} = \sqrt{9} \cdot \frac{-39}{9 * \sqrt{63}} = \frac{-13}{8} \approx -1{,}63$$

tкр = 1,86

-1,63 > - tкр = 1,86 => гипотеза H_0 принимается, т.е. значимого влияния тренировки не оказали

Независимые выборки

Пусть имеются две независимые выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$, имеющие нормальное распределение с параметрами (a_x, σ_x^2) и (a_y, σ_y^2) соответственно.

Для этих выборок будем проверять следующие гипотезы:

1. Гипотеза о равенстве дисперсий двух выборок
2. Гипотеза о равенстве средних при известных дисперсиях
3. Гипотеза о равенстве средних при неизвестных равных дисперсиях
4. Гипотеза равенстве вероятностей

1. Гипотеза о равенстве дисперсий двух выборок

Пусть известны исправленные выборочные дисперсии для обеих выборок s_x^2 и s_y^2 . Проверяем нулевую гипотезу H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Возможны три альтернативные гипотезы:

а) H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$.

б) H_1 : $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$

в) H_1 : $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$

В случае а)

Делим большую дисперсию на меньшую

$$F = \frac{s_{max}^2}{s_{min}^2}$$

По таблице для распределения Фишера (F-распределение) находим критическую точку с уровнем значимости $\boldsymbol{\alpha}$**/2** и числами степеней свободы $n_{max} - 1$ и $n_{min} - 1$. Если $F < F_{кр}$, то основная гипотеза принимается, в противном случае отвергается в пользу альтернативной гипотезы.

В случае б)

Делим первую (большую) дисперсию на вторую (меньшую)

$$F = \frac{{s_x}^2}{{s_y}^2}$$

По таблице для распределения Фишера (F-распределение) находим критическую точку с уровнем значимости $\boldsymbol{\alpha}$ и числами степеней свободы $n - 1$ и $m - 1$. Если $F < F_{\text{кр}}$, то основная гипотеза принимается, в противном случае отвергается в пользу альтернативной гипотезы.

Случай в) аналогичен случаю б)

Пример

По двум независимым выборкам, объемы которых $n = 9$ и $m = 16$, извлеченных из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 34{,}02$ и $s_y^2 = 12{,}15$. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу

H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при альтернативной гипотезе $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = 34{,}02/12{,}15 = 2{,}8$$

Числа степеней свободы $k_1 = n\text{-}1 = 9\text{-}1 = 8$ $k_2 = m\text{-}1 = 16\text{-}1 = 15$

$F_{кр}$ (0,01; 8; 15) = 4

$2{,}8 < 4$ => гипотеза H_0 принимается

2. Гипотеза о равенстве средних двух выборок при известных дисперсиях

Пусть известны дисперсии для обеих выборок $\sigma_x{}^2$ и $\sigma_y{}^2$. Проверяем нулевую гипотезу H_0: $a_x = a_y$. Возможны три альтернативные гипотезы:

а) H_1: $a_x \neq a_y$

б) $H_1 : a_x > a_y$

в) $H_1 : a_x < a_y$

Для всех случаев вычисляем статистику критерия

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

В случае а) применяется двусторонний критерий

Если $|Z| < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2;$$

В случае б) применяется односторонний критерий

Если $Z < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = 1/2 - \alpha;$$

Случай в) аналогичен случаю б) и получается перестановкой *x* и *y*.

Замечание:

Этот же метод применяется при неизвестных дисперсиях для независимых выборок больших объемов (n и m больше 30).

Статистика критерия такая же, но дисперсии заменяются исправленными выборочными дисперсиями

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$

Пример

По выборке объема $n = 30$ найден средний вес изделий равный 130г, изготовленных на первом станке; по выборке объема $m = 40$ найден средний вес изделий равный 125г, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $\sigma_x^2 = 34{,}02$ г^2 и $\sigma_y^2 = 12{,}15$ г^2. На уровне значимости 0,05 проверить гипотезу H_0: $a_x = a_y$ при альтернативной гипотезе $H_1 : a_x \neq a_y$. Предполагается, что случайные величины распределены нормально и выборки независимы.

3. Гипотеза о равенстве средних при неизвестных равных дисперсиях

Проверяем нулевую гипотезу H_0: $a_x = a_y$

Для проверки гипотезы используется статистика критерия

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

где $s^2 = \frac{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2}$ – объединенная оценка дисперсии для двух выборок.

Для проверки берем критические точки $t_{кр}$ распределения Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы и уровнем значимости α.

В случае а) – для двусторонней критической области, в случаях б) и в) – для односторонней критической области

Рассматриваем три возможных альтернативных гипотезы:

а) H_1: $a_x \neq a_y$

б) $H_1 : a_x > a_y$

в) $H_1 : a_x < a_y$

В случае а) применяется двусторонний критерий

Если $|\mathrm{T}| < t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 принимается. Если $|\mathrm{T}| \geq t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 отклоняется;

В случае б) применяется односторонний критерий

Если $\mathrm{T} < t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 принимается. Если $\mathrm{T} \geq t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 отклоняется;

В случае в) применяется односторонний критерий

Если $\mathrm{T} > -t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 принимается. Если $\mathrm{T} \leq t_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Замечание:

Поскольку для проверки гипотезы требуется равенство дисперсий у двух выборок, то ***сначала необходимо проверить гипотезу о равенстве дисперсий***. Если эта гипотеза отклоняется, то данный метод применять нельзя.

Пример

Реклама утверждает, что из двух типов кредитных карт К1 и К2 более предпочтительным является первый К1. Для проверки этого утверждения были обследованы 16 платежей владельцев К1 и 11 платежей владельцев К2. Оказалось, что средний платеж по картам К1 составил 563 ден.ед. с исправленным средним квадратическим отклонением 178 ден.ед., а по картам К2 – средний платеж составил 485 ден.ед. с исправленным средним квадратическим отклонением 196 ден.ед.

Законы распределения месячных платежей по обеим картам нормальные.

Проверить истинность рекламного утверждения при уровне значимости 0,1.

4. Гипотеза о равенстве вероятностей.

Пусть в первой серии из n_1 испытаний получили m_1 «успехов», а в другой серии из n_2 испытаний получили m_2 «успехов».

Проверяем нулевую гипотезу $H_0: p_1 = p_2$

Альтернативные гипотезы:

а) $H_1: p_1 \neq p_2$

б) $H_1 : p_1 > p_2$

в) $H_1 : p_1 < p_2$

Для проверки гипотезы используется статистика критерия

$$Z = \frac{w_1 - w_2}{\sqrt{w(1-w)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

где $w = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

Для проверки берем критические точки $t_{кр}$ распределения Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы и уровнем значимости α.

В случае а) – для двусторонней критической области, в случаях б) и в) – для односторонней критической области

В случае а) применяется двусторонний критерий

Если $|Z| < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = (1 - \alpha)/2;$$

В случае б) применяется односторонний критерий

Если $Z < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = 1/2 - \alpha;$$

В случае в) применяется односторонний критерий

Если $Z > -z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается. В противном случае гипотеза H_0 отклоняется.

$z_{кр}$ выбирается из условия

$$\Phi_0(z_{кр}) = 1/2 - \alpha;$$

Пример

В партии из 500 деталей, изготовленных первым станком оказалось 60 нестандартных; из 600 деталей второго станка – 42 нестандартных. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0: p_1 = p_2$ о равенстве вероятностей изготовления нестандартной детали обоими станками при альтернативной гипотезе а) $H_1: p_1 \neq p_2$; б) $H_1 : p_1 > p_2$

H_0	Предположения	Статистика критерия	H_1	Область принятия H_0
$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$	a_x и a_y неизвестны		а) $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ б) $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$	
$a_x = a_y$	σ_x^2 и σ_y^2 известны		а) $a_x \neq a_y$ б) $a_x > a_y$ в) $a_x < a_y$	
	σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны, но равны		а) $a_x \neq a_y$ б) $a_x > a_y$ в) $a_x < a_y$	
$p_1 = p_2$	n_1 и n_2 велики (>30)		а) $p \neq p_0$. б) $p > p_0$ в) $p < p_0$	

Примеры

1. В прошлом году средняя заработная плата жителей города Булкино составляла ***N*** руб. В этом году выборка из 400 человек показала, что средняя заработная плата составляет ***A*** руб. при выборочном среднем квадратическом отклонении ***B*** руб. Можно ли на уровне значимости 5% утверждать, что заработная плата жителей города увеличилась? Решить задачу, если: ***N***= 7300, ***A*** = 7320, ***B*** = 150; б) ***N***= 7770, ***A*** = 7779, ***B*** = 120.
2. Среднее время сборки изделия было 90 мин. Инженер изобрел новый метод сборки этого изделия. В результате времена сборки 10 изделий новым способом составили: 79, 74, 112, 95, 83, 96, 77, 84, 70, 90 мин. Можно ли утверждать, что среднее время сборки сократилось (на уровне значимости 5%).
3. В книжном магазине проведено исследование продаж фантастического романа писателя Бурьяненко «Танцы в пустоте». В течение 25 рабочих дней роман продавался ежедневно в среднем по 64 экземпляра с выборочным средним квадратическим отклонением 10 экземпляров. Можно ли утверждать на уровне значимости 5%, что этот роман расходится хуже, чем предыдущий роман автора, «Звездная жуть», если тот расходился в среднем по 70 экземпляров в день.

Примеры

4. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $\boldsymbol{n}$ = 17 и по ней найдена выборочная дисперсия $s^2 = 0{,}24$. Требуется на уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $\boldsymbol{H_0}$: $s^2 = s_0{}^2 = 0{,}18$, приняв в качестве альтернативной гипотезы $\boldsymbol{H_1}$ $s^2 > 0{,}18$.
5. Партия изделий принимается, если дисперсия размеров не превышает 0,2. Выборочная дисперсия для 30 изделий оказалась равна 0,3. Можно ли принять партию на уровне значимости 5%.
6. В таблице представлены месячные объемы продаж в магазинах фирмы до и после проведения ее рекламной компании (у.е.):

Магазин	1	2	3	4	5	6	7
До рекламы	10	15	12	13	14	11	15
После рекламы	17	20	13	11	16	10	18

Можно ли утверждать на уровне значимости 0,10, что рекламная кампания привела к существенному увеличению объемов продаж?
7. Независимому статистику поручено проверить информацию маркетинговой службы некоторого туристического бюро о том, что 70% клиентов выбирают в качестве формы обслуживания полупансион. Статистик провел опрос 150 случайно выбранных туристов, из них полупансион предпочли 84 человека. К какому выводу пришел статистик при проверке гипотезы H_0: $p = 0{,}7$ при альтернативе H_1: $p \neq 0{,}7$ на уровне значимости критерия а = 0,05

Примеры

8. Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две пробы (выборки), объемы которых $\boldsymbol{n} = 10$ и $\boldsymbol{m} = 8$. В результате измерения контролируемого размера отобранных изделий получены следующие результаты.

xi	1,08	1,10	1,12	1,14	1,15	1,25	1,36	1,38	1,40	1,42
yi	1,11	1,12	1,18	1,22	1,33	1,35	1,36	1,38		

Можно ли считать, что станки обладают одинаковой точностью, если уровень значимости $\boldsymbol{\alpha} = 0{,}1$ и в качестве конкурирующей гипотезы взять H_1: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$?

9. По двум независимым выборкам с объемами $\boldsymbol{n}$=10 и $\boldsymbol{m}$ =10, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние, равные 14,3 и 12,2 соответственно. Генеральные дисперсии известны: $\sigma_x^2 = 22$, $\sigma_y^2 = 18$. На уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $\boldsymbol{a_x} = \boldsymbol{a_y}$ при конкурирующей гипотезе H_1: $\boldsymbol{a_x} > \boldsymbol{a_y}$.

10. Компания по производству сахарного песка имеет две производственные линии для наполнения пакетов сахарным песком по 1 кг. Среднее квадратическое отклонение веса пакетов, поставляемых с первой линии, $\sigma_1 = 0{,}02$ кг, а со второй линии — $\sigma_2 = 0{,}04$ кг. С первой линии была взята случайная выборка объема $\boldsymbol{n_1} = 10$ пакетов и найден средний вес $\overline{x_1}$=1,018 кг. Подобная выборка $\boldsymbol{n_2}$= 12 пакетов была взята со второй линии и найден средний вес $\overline{x_2}$=0,989 кг. Есть ли основание считать, что средний вес пакетов первой и второй линий различаются? Проверить гипотезу при уровне значимости 0,01