ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы и действия над ними

Определение:

Матрицей *A* размера **m × n** называется **прямоугольная таблица чисел**, содержащая **m** строк (*i*) и **n** столбцов (*j*). **Числа**, составляющие матрицу, называются **элементами** матрицы (a_{ij}).

Матрица **A** размера **m × n**

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения:

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита: *A*, *B*, *C*, *D* и т.д. ;

Матрицы обозначаются скобками: ( ) или [ ] ;

$A_{m\times n}$ **– матрица размерности $m \times n$;**

a_{ij} **– элемент матрицы i –ой строки и j -го столбца, где $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$**

Определения:

Две матрицы называются <u>**равными**</u>, если у них одинаковая размерность и совпадают строки и столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется <u>**квадратной**</u>.

В случае квадратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

побочная диагональ **главная диагональ**

элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют главную диагональ – диагональ идущая с левого верхнего угла в правый нижний,

элементы a_{n1}, …, a_{22}, …, a_{1n} – побочную диагональ матрицы – диагональ идущая с верхнего правого угла в левый нижний.

Определения:

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются **диагональными**.

Если в квадратной матрице все диагональные элементы равны *1*, а остальные элементы равны *0*, то она называется **единичной**.

Определение:

Матрица, состоящая из одной строки, называется <u>матрицей-строкой</u>.

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$$

Определение:

Матрица, состоящая из одного столбца, называется <u>матрицей-столбцом</u>.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{1} & \overset{a_{12}}{0} & \overset{a_{13}}{-2} \\ \overset{a_{21}}{-2} & \overset{a_{22}}{4} & \overset{a_{23}}{5} \\ \overset{a_{31}}{0} & \overset{a_{32}}{-3} & \overset{a_{33}}{1} \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица размера **m×n = 3 × 3,** где ***a_{11}*= 1, *a_{22}*= 4, *a_{33}*= 1 -** **элементы главной диагонали, *a_{31}*= 0, *a_{22}*= 4, *a_{13}*=-2 - элементы побочной диагонали**

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \textbf{матрица} - \textbf{столбец}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \textbf{матрица} - \textbf{строка}$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью матриц удобно описывать различного рода зависимости.

Пример:

Распределение ресурсов по отраслям экономики:

Ресурсы	***Промышленность***	***с/х***
Эл. энергия	8	7.2
Труд. ресурсы	5	3
Водные ресурсы	4.5	5.5

Эту зависимость можно представить в виде матрицы:

$$\underset{3\times 2}{A}=\begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Где элемент a_{ij} показывает сколько i – го ресурса потребляет j – отрасль.

Например, a_{32} показывает, сколько воды потребляет сельское хозяйство.

Действия над матрицами

1) Умножение матриц на число

Чтобы умножить матрицу на произвольное число (λ), надо каждый элемент этой матрицы (a_{ij}) умножить на это число.

Полученные произведения образуют итоговую матрицу.

$$7\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -28\\ 7 & 70\end{pmatrix}$$

Пусть дана матрица: $A_{m\times n} = (a_{ij})$

Умножаем ее на число λ: $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij})$

Где каждый элемент матрицы:

$$\boxed{a_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}}$$

Где: $i = 1,2 \ldots m$

$j = 1,2 \ldots n$

Пример:

Умножая матрицу на число 2, получим: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot 2 & 0\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 0\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

2) Сложение (вычитание) матриц

Складываются (вычитаются) матрицы <u>только одинаковой размерности</u>.

Получается матрица $C = A \pm B$ **той же размерности, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц:**

$A = (a_{ij})$ **и** $B = (b_{ij})$

Где каждый элемент матрицы С:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Пример 1

Найти: 1) сумму и 2) разность матриц:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad и \quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

Решение:

$$1)\, A+B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}; \quad 2)\, A-B=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

Пример 2

Найти: 1) сумму и 2) разность матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение:

$$1)\ A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -10 \\ -1 & 9 & 6 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad 2)\ A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -8 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов i – ой строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй.

Результатом умножения двух матриц $\underset{m\times k}{A}$ и $\underset{k\times n}{B}$

где элемент матрицы a_{ij}, а элемент матрицы b_{ij}

является матрица С размера m × n, т.е. :

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$$

где каждый элемент матрицы С, т.е. c_{ij} равен:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1,2\ldots m$$

$$j = 1,2\ldots n$$

Даны две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

размера $m \times n$ и $n \times k$ соответственно.

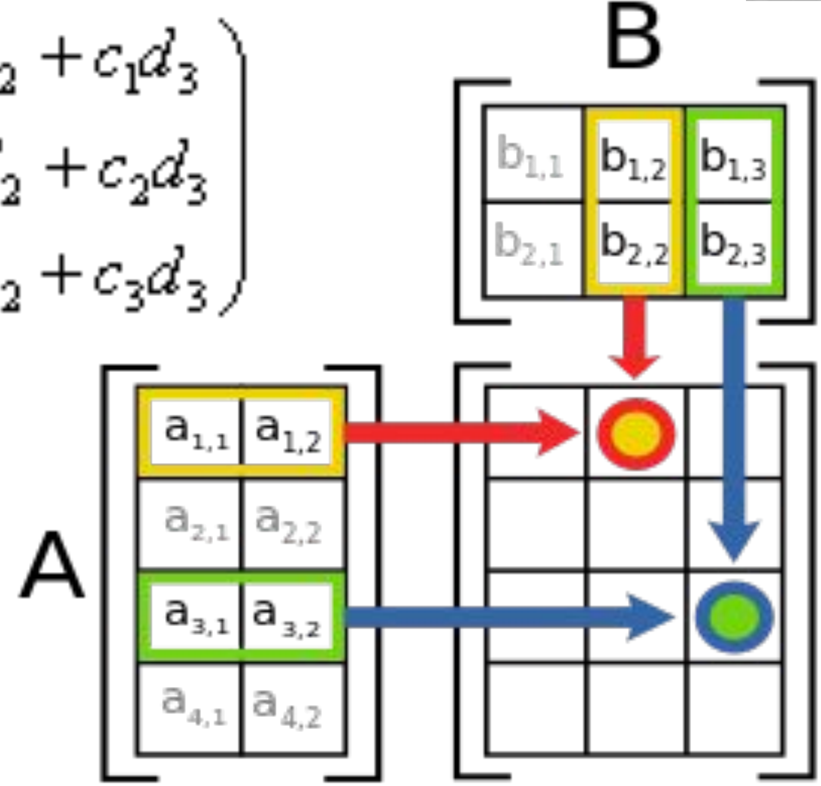
Произведением **матрицы** $\mathbf{A}_{m\times n}$ **на матрицу** $\mathbf{B}_{n\times k}$ называется **матрица** $\mathbf{C}_{m\times k}$ с **элементами** c_{ij} равными **сумме произведений** элементов ***i*-ой строки матрицы A** на соответствующие элементы ***j*-го столбца матрицы B**, **т.е.** $c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$, **где** $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, k$

Умножаем по принципу: **строка на столбец:**

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$$



Пример 1:

Найти произведение матриц:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&0&4\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&4\\0&2\end{pmatrix}$$

Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times2}{B}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+3\cdot4+0\cdot2\\1\cdot1+0\cdot1+4\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4+4\cdot2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5&12\\1&8\end{pmatrix}}$$

Эти две матрицы так же можно перемножить и в обратном порядке, так как **число столбцов первой матрицы** равно **числу строк второй** (это исключение, см. свойство 3):

$$\underset{3\times 2}{B}\cdot\underset{2\times 3}{A}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4\\ 1\cdot 2+4\cdot 1 & 1\cdot 3+4\cdot 0 & 1\cdot 0+4\cdot 4\\ 0\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 3+4\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 3 & 16\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}^{\substack{m=2 \\ \text{2 столбца}}} \cdot \left.\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}_{n=2 \text{ строки}}$$

m = n, значит, умножать можно

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\substack{m=1 \\ \text{столбец}}} \cdot \left.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right\}_{n=2 \text{ строки}}$$

$m \neq n$, значит, умножать нельзя

Пример 2: Найти произведение матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Решение:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 4+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot(-1)\end{bmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}}.$$

4) Транспонирование матриц

Матрица A^T называется <u>транспонированной</u> к матрице A, если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример:

Транспонировать матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

5) Возведение матриц в степень

Матрица $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\ раз}$ называется $\boldsymbol{k}$ степенью квадратной матрицы **A**

$$A^5 = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{5\ \text{раз}} = A^2 \cdot A^2 \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

Свойства перечисленных операций над матрицами:

1

$A \cdot \lambda = \lambda \cdot A$

$\lambda(A+B)= \lambda A+\lambda B$

2

$A \pm B=B \pm A$

$(A \pm B) \pm C=A \pm(B \pm C)$

3

A(B+C)=AB+AC

A(BC)=(AB)C

Умножение матриц в общем случае некоммутативно:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

4

$(A^T)^T = A$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Определение:

Понятие определителя (детерминанта) матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определителем или детерминантом (от лат. determinare - определять) квадратной матрицы А называется некоторое число, которое можно поставить ей в соответствие следуя определённым правилам.

Обозначения: $|\mathbf{A}|$, $\det(\mathbf{A})$, $\boldsymbol{\Delta}$

Определители записываются в прямых скобках | |.

Определения:

1) Определителем первого порядка называется **число**, соответствующее квадратной матрице содержащей один элемент, т.е. $\mathbf{A} = (a_{11})$, которое равно самому элементу $|\mathbf{A}| = a_{11}$.

Пример:

Вычислить определитель для матрицы: $\mathbf{A} = (5)$

Решение: $|\mathbf{A}| = 5$.

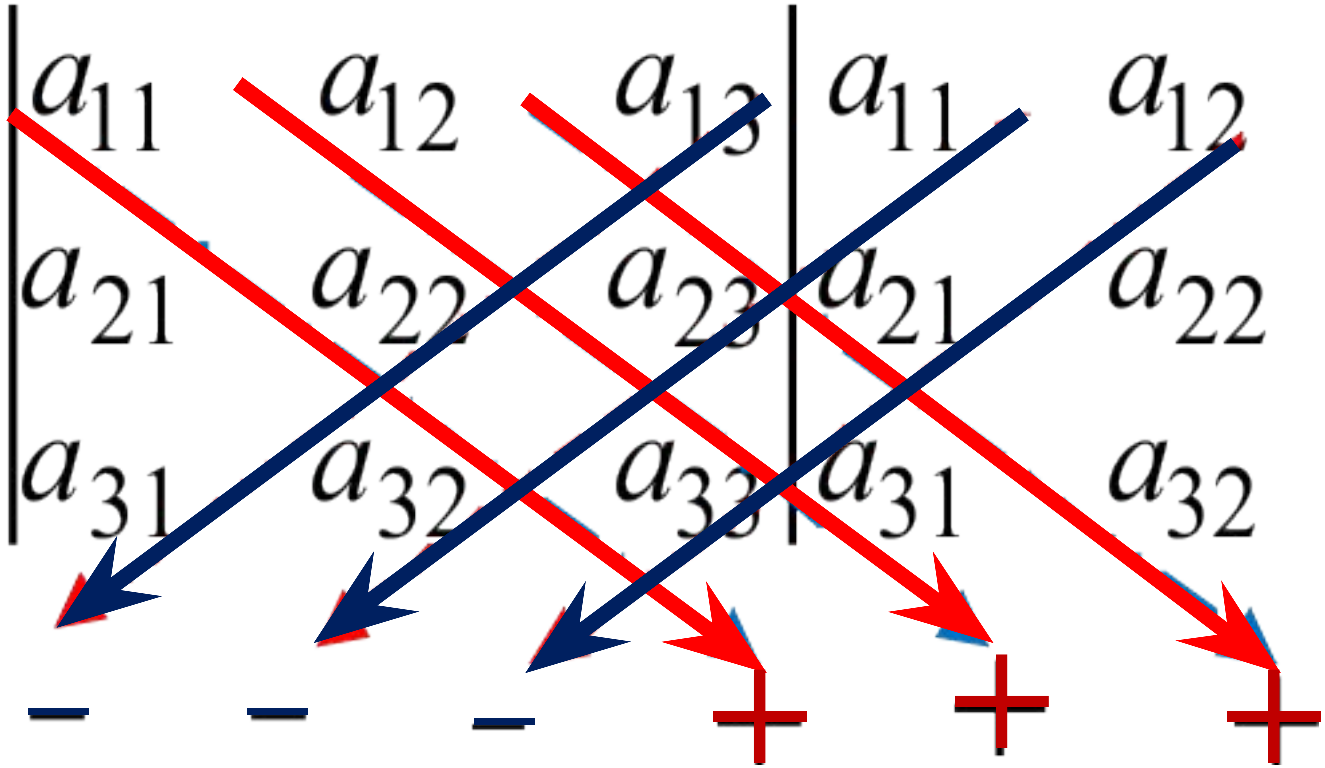
2) Определителем второго порядка называется **число**, соответствующее $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ квадратной матрице и вычисленное по следующему правилу: **произведение элементов, стоящих по главной диагонали минус произведение элементов, стоящих по побочной диагонали, т.е. |A| = $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$ – правило диагоналей:**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Пример:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot 3 = 14 - (-15) = 29.$$

3) Определителем третьего порядка называется **число**, соответствующее квадратной матрице размера 3×3 и вычисленное по **правилу Саррюса** (франц. математик Пьер Фредерик Саррюс) (**правило параллельных полосок**):



произведения со знаком минус «–»

произведения со знаком плюс «+»

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ -7 & 8 & 9 & -7 & 8 \end{array}\right. =$$

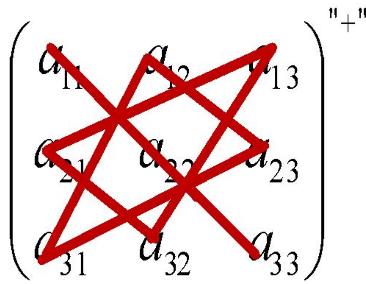
со знаком минус «–» **со знаком плюс «+»**

$$= 1\cdot 0\cdot 9 + (-2)\cdot 6\cdot (-7) + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 0\cdot (-7) - 1\cdot 6\cdot 8 - (-2)\cdot 4\cdot 9 =$$

$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 48 + 72 = 204$$

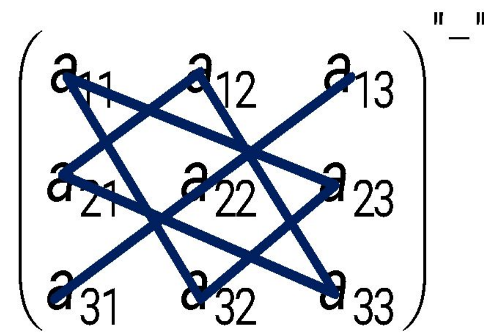
Можно свернуть форму вычисления по правилу Саррюса и получить **правило треугольников**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



произведения
со знаком плюс «+»

$+$



произведения
со знаком минус «–»

$=$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 2(-1) + 1\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 3(-2) - 1\cdot 2(-2) - 3\cdot 1(-1) -$$

$$-3\cdot 4\cdot 5 = -10 + 4 - 18 + 4 + 3 - 60 = -77.$$

Приведение определителя к треугольному виду:

Определение. Определитель, у которого все элементы, находящиеся над (под) главной (боковой) диагональю, равны нулю, называются ***определителем треугольного вида***.

Утверждение 1. Приведение любого определителя к треугольному виду всегда возможно.

Теорема Гаусса. Определитель треугольного вида равен:

- по главной диагонали - произведению элементов его главной диагонали.
- по боковой диагонали - произведению элементов его боковой диагонали со знаком "-"

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \\ I + II \\ I*(-3)+III \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -5 \end{vmatrix} = \{ II*(2)+III \} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 \cdot (-1) = 5$$

4) Определителем n-го порядка называется **число**, соответствующее квадратной матрице размера $n \times n$ и вычисленное по **теореме Лапласа**

Определитель квадратной матрицы **n-го порядка** равен сумме попарных **произведений элементов любой строки (столбца)** на их **алгебраические дополнения**:

Разложение по элементам $\boldsymbol{i}$-й строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

Разложение по элементам $\boldsymbol{j}$-го столбца:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

Алгебраические дополнения и миноры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{i1} & \boldsymbol{a_{ij}} \ldots\ldots a_{in} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{nj} \ldots\ldots\; a_{nn} \end{pmatrix}$$

В квадратной матрице ***n***-го порядка рассмотрим элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Вычеркнем ***i***-ю строку и ***j***-ый столбец, на пересечении которых стоит элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$. В результате получается матрица (***n-1***)-го порядка.

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n\text{-}1)$-го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

к элементу a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма $i+j$ четная, и со знаком «-», если сумма нечетная.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 8\cdot(-1) = 12 \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 4\cdot 3 = -4$$

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

где элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$ **: 1)** $\boldsymbol{a_{12} = 1}$**; 2)** $\boldsymbol{a_{31} = -1}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 3 = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(-40 - 6) = 46$$

Пример:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

Вычислить определитель разложением по **элементам 1-ой строки** (т.е. a_{1j})

Решение:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + 1\cdot 1 = 5$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix}\boxed{1 \quad -1 \quad 1}\\ 2 \quad 1 \quad 1\\ 1 \quad 1 \quad 2\end{vmatrix}$$

1-ая строка **вычёркиваем для всех A_{ij}**

1-й *2-й* *3-й*

вычёркиваем по очереди