

Теорія ймовірностей

Лекція 4

Випадкові події

Ймовірність події дорівнює відношенню числа виходів, що сприяють події, до загального числа виходів, тобто $P(A) = \frac{m}{n}$

Ймовірність $P(A)$ може приймати значення від 0 до 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

- *Імовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

- **Наслідок.** *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- Зауваження. Якщо ймовірність подій позначена як p , то ймовірність протилежної події позначають як q , тоді:

$$p + q = 1$$

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Ймовірність реалізації однієї із двох сумісних випадкових подій, дорівнює сумі ймовірностей цих подій, без ймовірності їхньої спільної появи, тобто:

- $$P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема множення ймовірностей

- Імовірність події , обчислена за умови, що відбулася інша подія , називається **умовною ймовірністю** події A і позначається $P_B(A)$,
- або $P(A/B)$
- Можливість спільної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

- Зокрема, для незалежних подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

тобто ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Імовірність появи хоча б однієї події

- Імовірність настання події A , що полягає в появі хоч би однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Формула повної ймовірності

- Ймовірність події A , що може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, \dots, B_n$, що утворюють **повну групу**, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A) ,$$

де

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$$

Комбінаторика

- **Перестановки**

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

- **Розміщення**

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

- **Сполучення**

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n - m)!}$$

Повторні незалежні випробування

- **Формула Бернуллі.** Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p , подія настане рівно m раз (байдуже, в якій послідовності), дорівнює:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

де

$$q = 1 - p \quad .$$

Формула Пуассона:

- Використовують для рішення задач за схемою Бернуллі, коли $n \geq 10$ і $p < 0,1$

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!}$$

$$\mu = np$$

Формула Муавра-Лапласа

- Використовують для рішення задач за схемою Бернуллі, коли $n \geq 10$ і $p > 0,1$

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

- Для інтервала значень:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!