Уфимский государственный авиационный технический университет
Общенаучный факультет
Кафедра математики

Лекции по теории функции комплексной переменной

Уфа
2016г

Лекция № 1

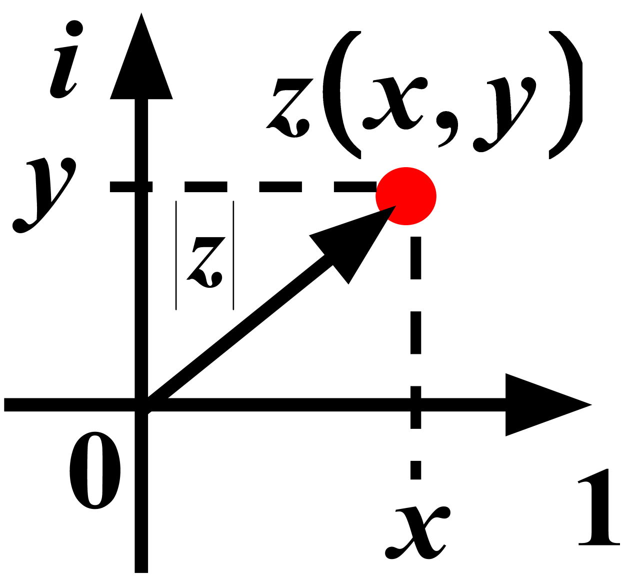
§1. Комплексные числа и последовательности комплексных чисел.

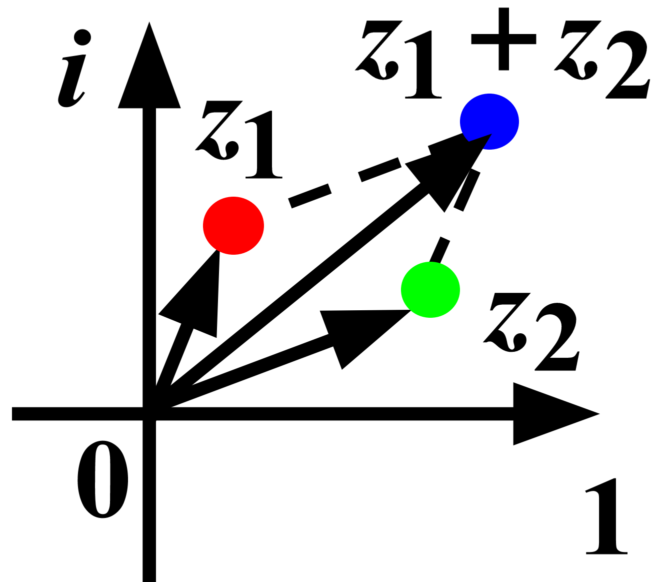
п. 1. Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация.

Рассмотрим плоскость R^2. $\forall z(x,y)\in R^2$ -вектор $x\in R,\ \ y\in R.$ Определим $\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ \ (1)}$ **операцию сложения:**

$$\forall z_1(x_1,y_1), z_2(x_2,y_2) ▯ \ \ z(x,y):$$

$$z=z_1+z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1+x_2 \\ y=y_1+y_2 \end{cases};\ \ (2)$$





операцию умножения на число:

$$\forall z(x, y), \quad \alpha \in R: \qquad \alpha z = (\alpha x, \ \alpha y)$$

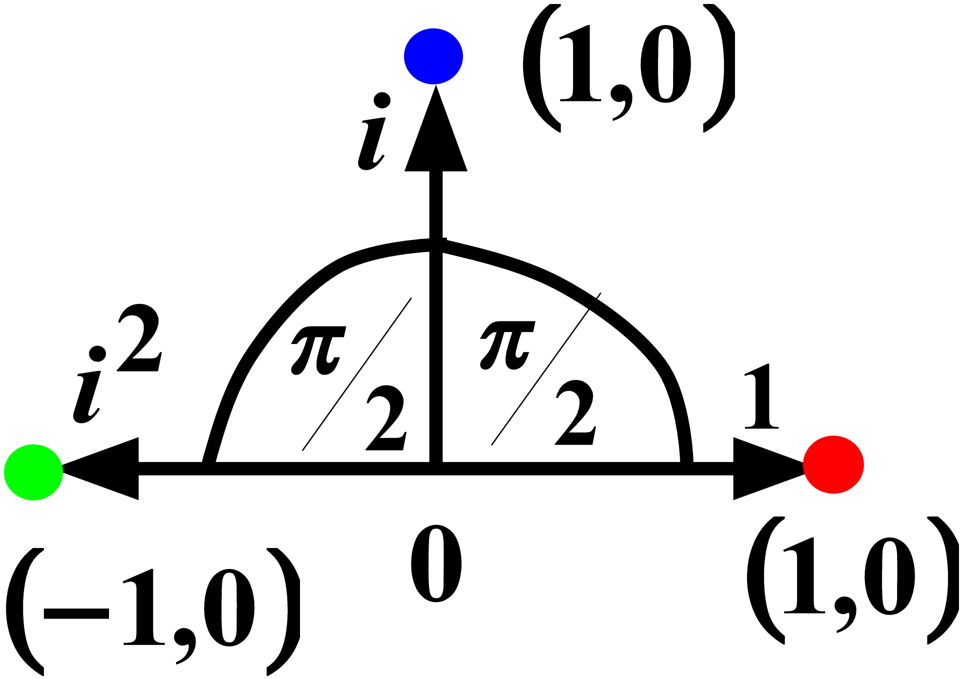
$$1 = (1, 0) \qquad i = (0, 1) \quad \text{базис} \qquad (3)$$

$$\forall z(x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i$$

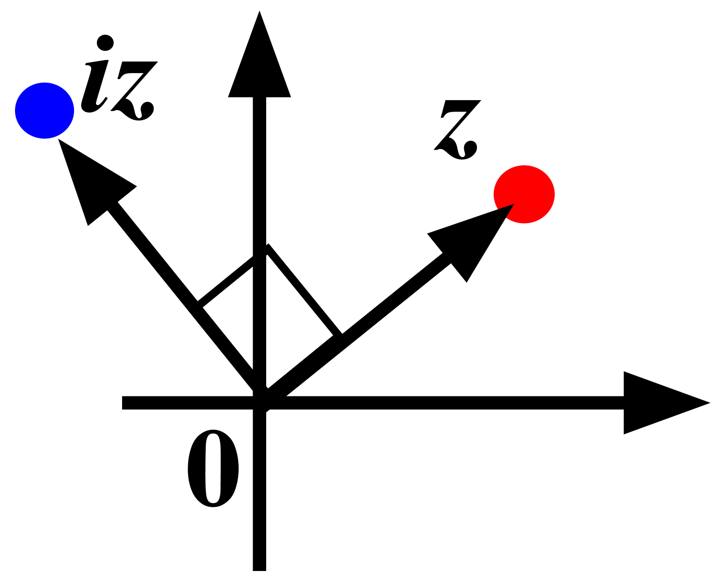
Как ввести $z = z_1 \cdot z_2$,

Вектор 1– единица операции умножения.

Определим $i \cdot i = i^2$. Т.к. $1 \cdot i = i$, то <u>полагают</u>



$$i^2 = -1. \quad (4)$$



$$z(x,y):\ z \cdot i = (x \cdot 1 + y \cdot i) \cdot i = -y \cdot 1 + x \cdot i = (-y, x)$$

$$(5)$$

Правило умножения $z_1(x_1, y_1), z_2(x_2, y_2) \in R^2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_1, y_1) =$$

$$= (x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 \cdot 1 + y_2 \cdot i) =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) \cdot 1 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i =$$

$$= ((x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2); \ (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)) \quad (6)$$

Def. Числовая плоскость R^2 называется *комплексной плоскостью* C, если для ее точек определены модули (1), операции сложения (2) и умножения (6).

Точки комплексной плоскости C называются *комплексными числами*.

Действительные числа включаются в множество комплексных чисел.

***a*=(*a*,0)-вещественное число, 0=(0, 0), 1=(1, 0), -1=(-1, 0), *ib*= (0, *b*)-чисто мнимое число,**

***i* =(0, 1)- мнимая единица, -*i*=(0, -1).**

Равенство. $z_1\left(x_1, y_1\right), \ z_2\left(x_2, y_2\right)$:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Алгебраическая форма записи.

$$\boxed{z = x + i\,y = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.}$$

$z(x, y)-$ **упорядоченная пара вещественных чисел.**

Комплексное сопряжение.

$$\bar{z} \equiv z^* = x - i\,y = (x, -y).\quad \mathrm{Re}\,z^* = x,\quad \mathrm{Im}\,z^* = -y.$$

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z + z^*}{2},\ \mathrm{Im}\,z = \frac{z - z^*}{2i},\quad \left(z^*\right)^* = z,$$

$$\left(z_1 \pm z_2\right)^* = z_1^* \pm z_2^*,\quad \left(z_1 \cdot z_2\right)^* = z_1^* \cdot z_2^*,$$

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Деление.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Примеры.

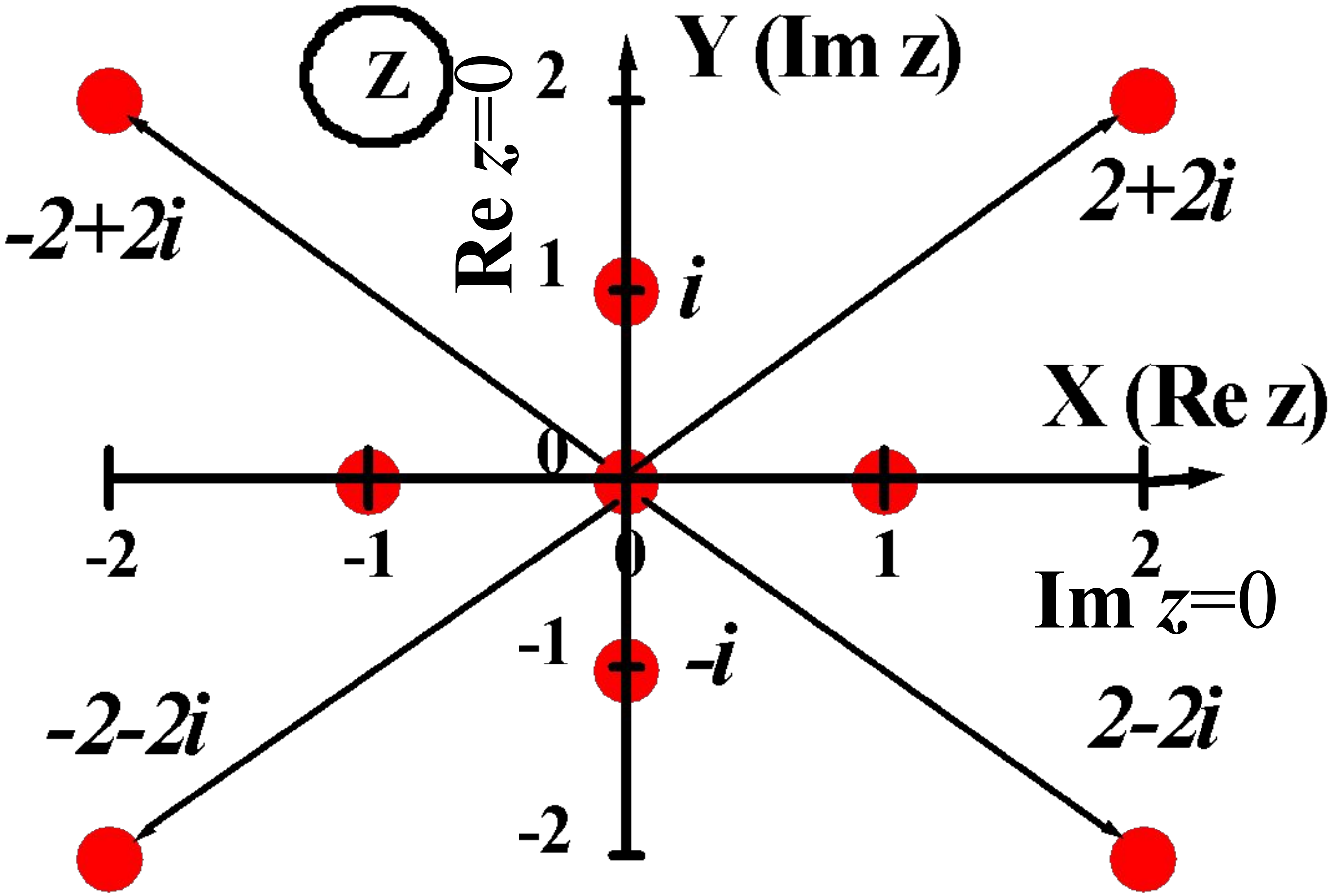
$$z^2 = (x+iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i\cdot(2xy);$$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n=4k \\ i & n=4k+1 \\ -1 & n=4k+2 \\ -i & n=4k+3 \end{cases}, \quad k=0,1,2\ldots; \quad i^* = -i;$$

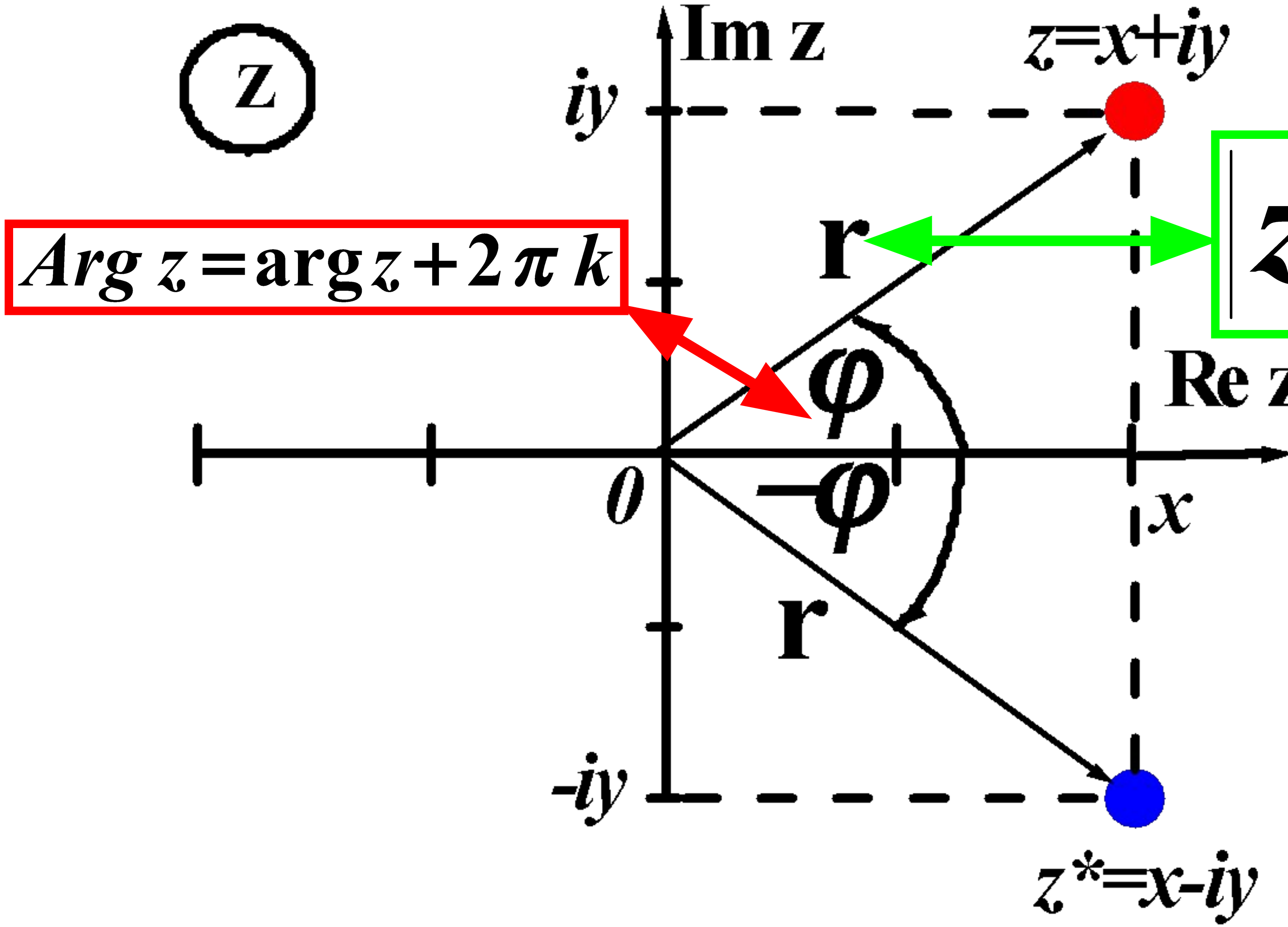
$$\frac{3+4i}{2-3i} = \frac{(3+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{6-12}{2^2+3^2} + i\frac{8+9}{2^2+3^2} =$$

$$= -\frac{6}{13} + i\frac{17}{13}; \qquad {}^{1}\!/_{i} = -i$$

Комплексные числа можно изображать точками на комплексной плоскости.



Модуль и аргумент комплексного числа



Полярные координаты $(x,y)\leftrightarrow(r,\phi)$.

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Модуль комплексного числа:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

Аргумент комплексного числа:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z}; \quad \varphi = \varphi_0 + 2\pi k; \alpha_0 \le \varphi_0 \le \alpha_0 + 2\pi$$

$$Arg\, z = \arg z + 2\pi k;$$

$\alpha_0 \le \arg z \le \alpha_0 + 2\pi$ **Главное значение** аргумента.

$\boxed{-\pi < \arg z \leq \pi}$ -разрез по $\operatorname{Re} z < 0$

$0 \leq \arg z < 2\pi$ -разрез по $\operatorname{Re} z > 0$

<u>Примеры.</u> $|0| = 0, \ \arg 0$ — не определен!

$|1| = 1, \ \arg 1 = 0;$ $\quad |i| = 1, \ \arg i = \frac{\pi}{2};$

$|-1| = 1, \ \arg(-1) = \pi;$ $\quad |-i| = 1, \ \arg(-i) = -\frac{\pi}{2};$

$z = 2 - 2i, \ |z| = 2\sqrt{2}, \ \arg(z) = -\frac{\pi}{4};$

Тригонометрическая форма записи

$$z = x + i\,y, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

$$\boxed{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \quad r = |z|, \quad \varphi \in Arg\, z.}$$

формула Эйлера: φ $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in R.$

Показательная форма записи

$$\boxed{z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in Arg\, z.}$$

Теорема.1.1. Пусть $\varphi, \psi \in R, \quad k \in Z$, тогда

1) $e^{i0} = 1$; 2) $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$;

3) $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}$; 4) $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$; 5) $\left|e^{i\varphi}\right| = 1.$

Примеры.

$$1=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)=e^{i0};\qquad \sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}};$$

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}};\quad -2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}};$$

$$-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=e^{i\pi};\qquad i\sqrt{3}-1=2e^{i\frac{2\pi}{3}};$$

$$-i=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$-e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Вопрос. $$e^{i\varphi}=e^{(i2\pi)\frac{\varphi}{2\pi}}=1^{\frac{\varphi}{2\pi}}=1\quad\forall\varphi\quad ?$$

Умножение и деление в показательной форме.

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2e^{i\varphi_2},$$

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Формула Муавра. $z=re^{i\varphi}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$

$$z^n=r^ne^{in\varphi}=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=$$
$$=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

$$\boxed{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$$

Извлечение корня. $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$$= r\left(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)\right) = re^{i(\varphi+2\pi k)};$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}},$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Корень *n*-той степени из комплексного числа принимает *n* различных значений.

Примеры.

$$(-1-i)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{3\pi}{4}\cdot 3}=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{9\pi}{4}}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2-2i.$$

$$\sqrt[3]{2-2i}=\left(\sqrt{8}\right)^{1/3} e^{i\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\begin{cases} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad k=0; \\ e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad k=1; \\ e^{i\frac{5\pi}{4}}=e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-1-i, \quad k=2; \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{1}=e^{i\frac{2\pi k}{4}}=\begin{cases} e^{i0}=1, \quad k=0; \\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i, \quad k=1; \\ e^{i\pi}=-1, \quad k=2; \\ e^{i\frac{3\pi}{2}}=e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i, \quad k=3. \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & k=0; \\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), & k=1; \\ e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), & k=2; \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), & k=3. \end{cases}$$

Множество комплексных чисел C образует <u>*поле*</u>.

Поле C <u>*не является упорядоченным*</u>.

В упорядоченном поле P $\forall a, b \in P$

$$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

В поле C $1^2 + i^2 = 0,$ **но** $1 \neq 0, \quad i \neq 0.$

Операция сравнения в C <u>не определена</u>.

Утверждение $1 + i > i \Rightarrow 1 > 0 -$ **неверно.**

Модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **удовлетворяет**

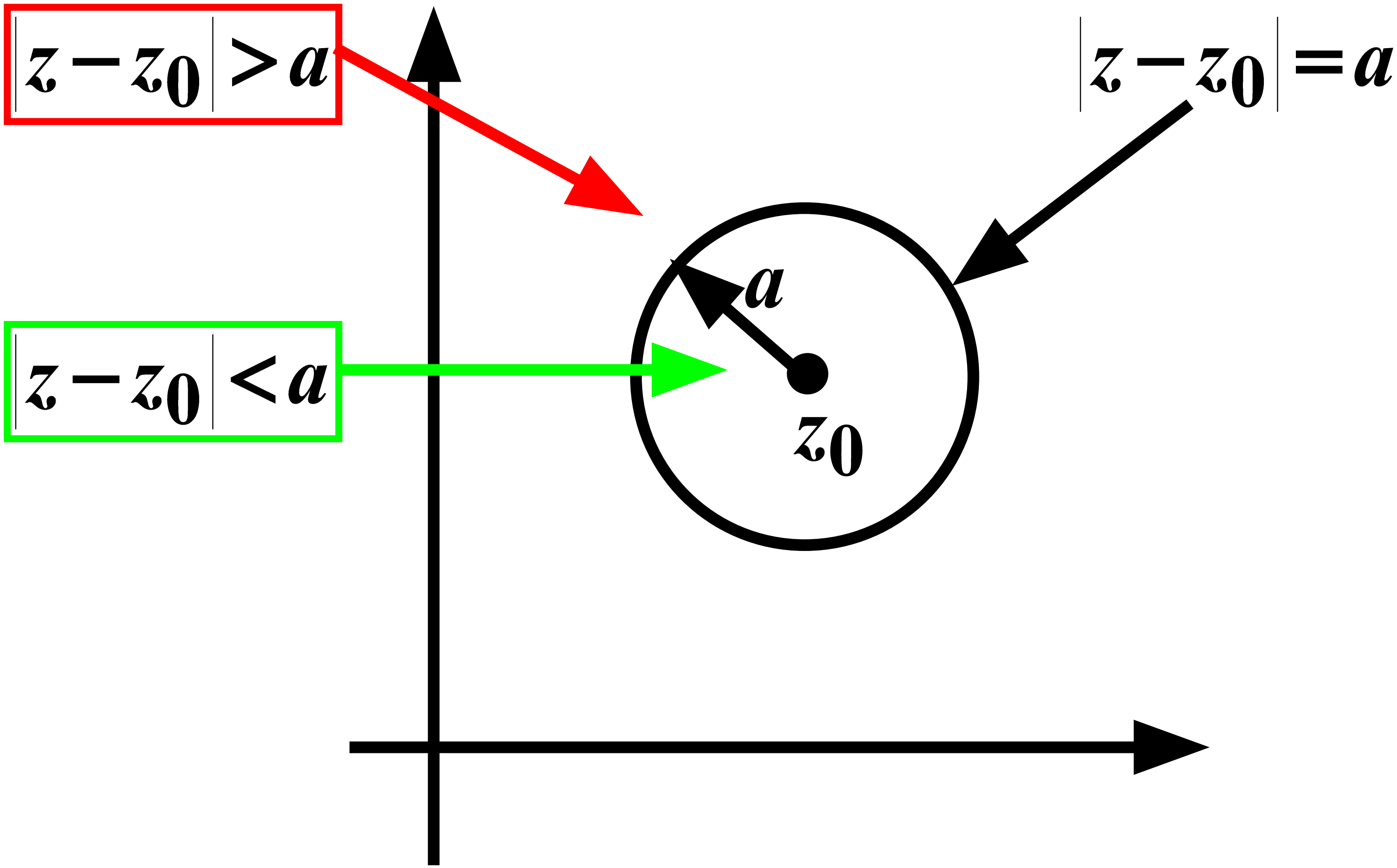
аксиомам норм.

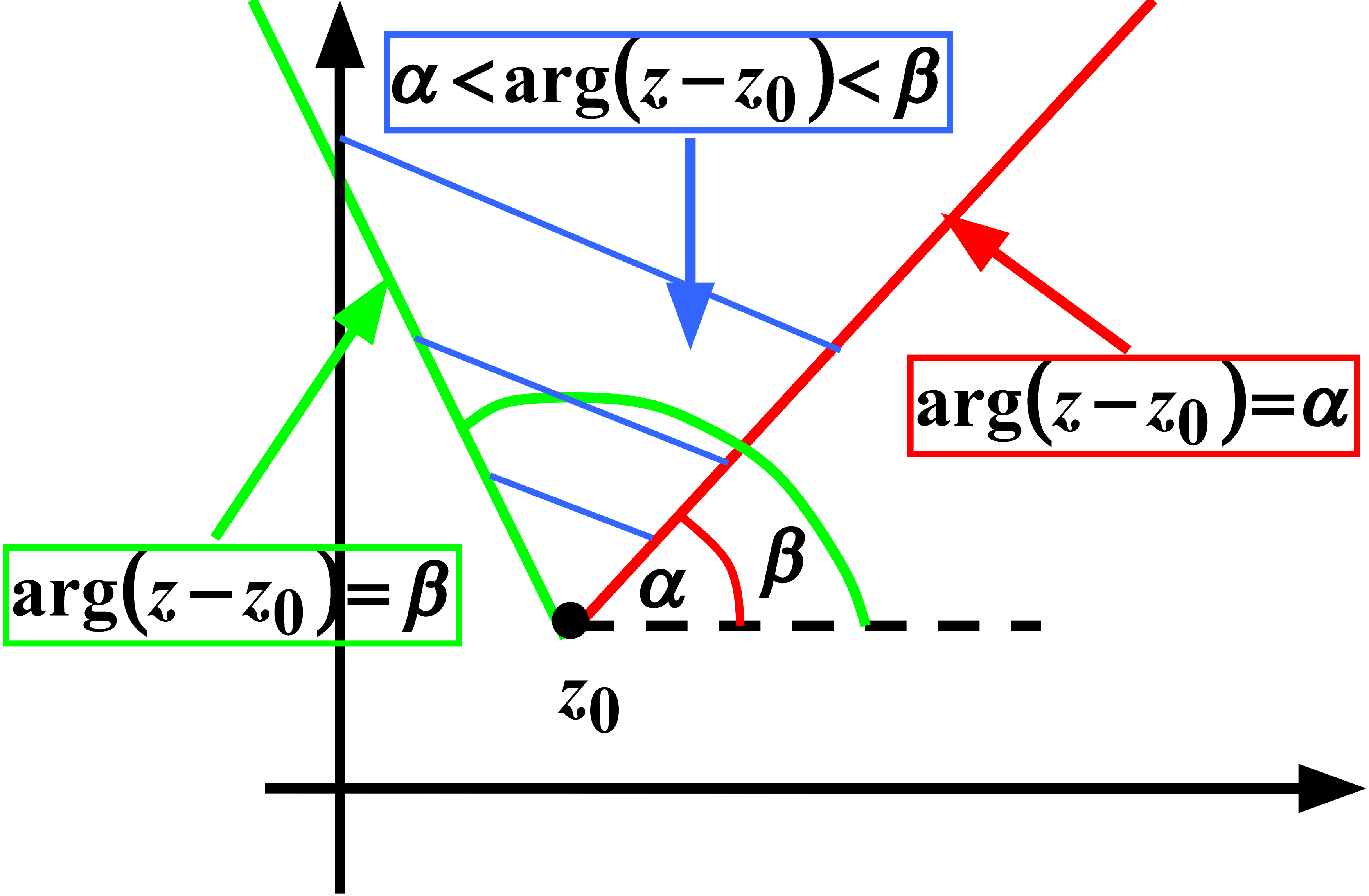
Неравенства треугольника.

$$\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

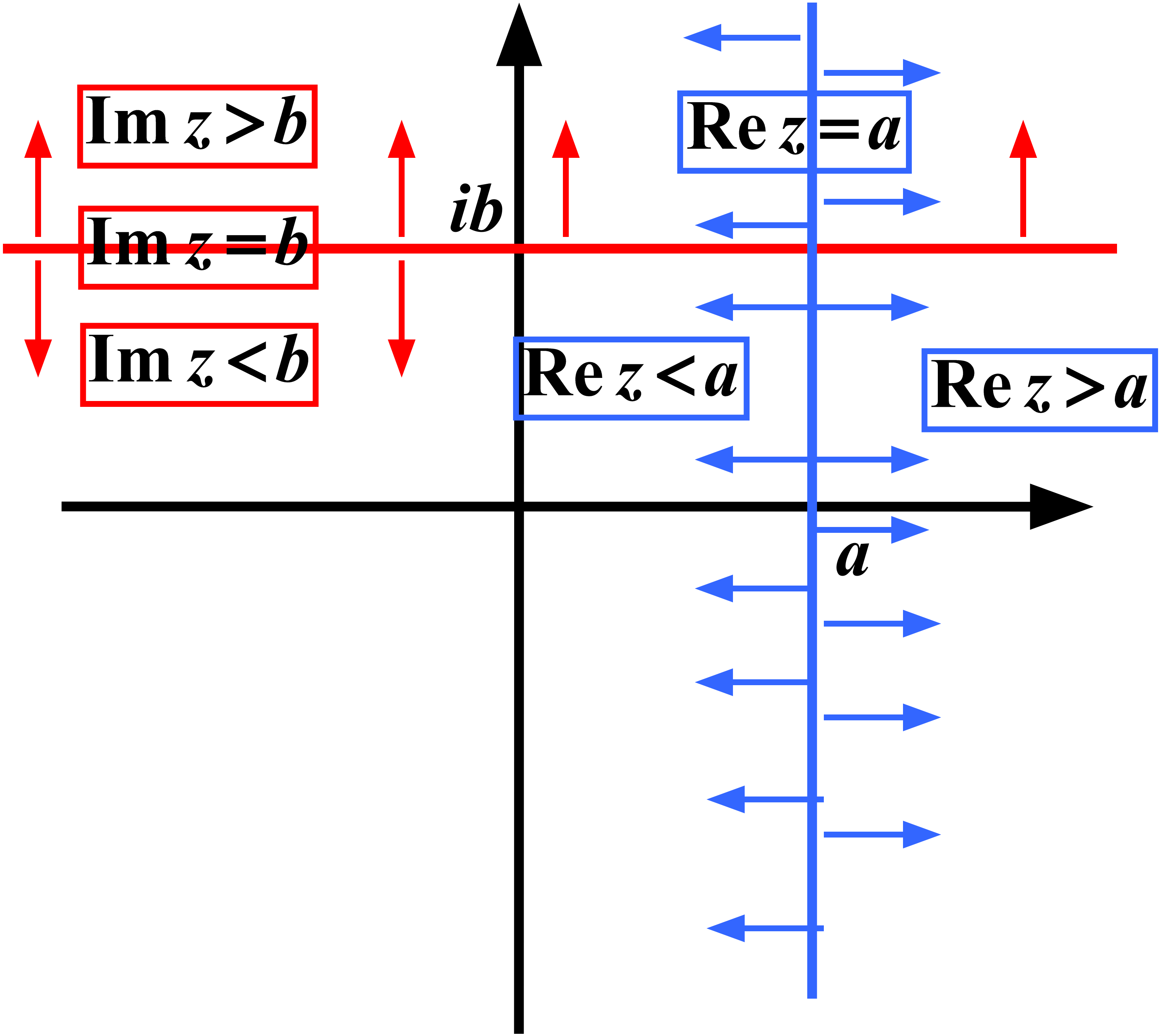
Упорядоченная четверка $E=\left(C,+,\bullet,|\ \ |\right)$ **является нормированным векторным пространством над полем *R*. Оно превратится в метрическое пространство, если** $\forall z_1, z_2 \in C$ **ввести метрику по формуле** $\rho\left(z_1, z_2\right)=|z_1-z_2|$.

Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости.





$\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$
$\arg(z - z_0) = \alpha$
$\arg(z - z_0) = \beta$
α
β
z_0



Im z > b
Im z = b
Im z < b
ib
Re z = a
Re z < a
Re z > a
a

п.2. Последовательности комплексных чисел.

Def. ***Последовательностью комплексных чисел*** **называют упорядоченное счетное множество комплексных чисел. Обозначение:** $\{z_n\}$

Члены последовательности располагаются в порядке следования их номеров.

Сходящиеся последовательности.

Def. Комплексное число z называется ***пределом последовательности*** $\{z_n\}$, **если для** $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N(\varepsilon): \ |z - z_n| < \varepsilon, \ \ n > N.$$

$$\{z_n\} \to z, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Примеры.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z;$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\begin{cases} 0, n=2k \\ \pi, n=2k+1 \end{cases}$$ не существует

Каждый член последовательности

$$z_n = a_n + ib_n \Rightarrow \{z_n\} = \{a_n\} + i\{b_n\}.$$

Т.1.2. Необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\} \to z = a + ib$ является требование $\{a_n\} \to a,\ \{b_n\} \to b.$

Def. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists A>0: \ |z_n|<A \ \ \forall n.$

Сходящаяся последовательность ограничена.

Т.1.3. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Критерий Коши. Необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\}\to z$ является требование, чтобы для $\forall\varepsilon>0 \ \ \exists N(\varepsilon):$

$$|z_{n+m}-z_n|<\varepsilon, \ \ \forall n>N, \forall m>0.$$

Неограниченно возрастающие последовательности.

Def. Если для $\forall A > 0 \; \exists N(A)$: $|z_n| > A, \forall n > N$, то последовательность $\{z_n\}$ называется *неограниченно возрастающей*.

Примеры. $z_n = z^n$, $|z| > 1$; $z_n = in$.

$\exists! \, z_\infty \equiv \infty$: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$. $\dfrac{z}{\infty} = 0$; $\dfrac{z}{0} = \infty$;

$z \cdot \infty = \infty$; $z + \infty = \infty$;

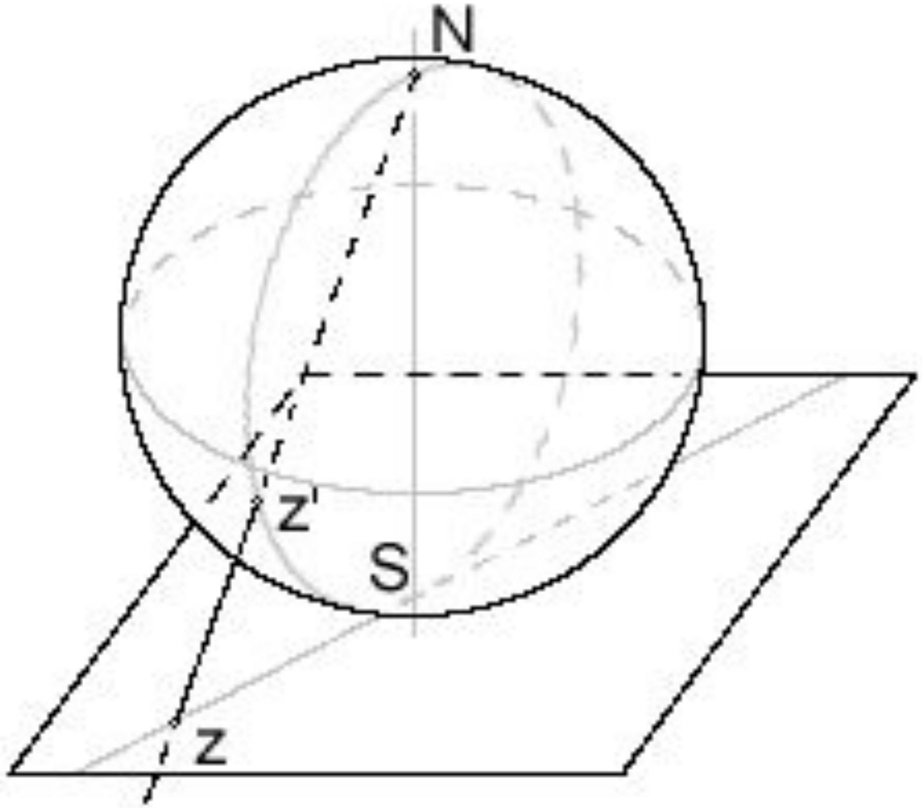
$\{z_n\} \to \infty \Rightarrow \{\xi_n\} = \left\{\dfrac{1}{z_n}\right\} \to 0.$

$\dfrac{\infty}{\infty} = \forall$; $\dfrac{0}{0} = \forall$;

Все неограниченно возрастающие последовательности сходятся к <u>единственной</u> *<u>бесконечно удаленной точке</u>* комплексной плоскости.

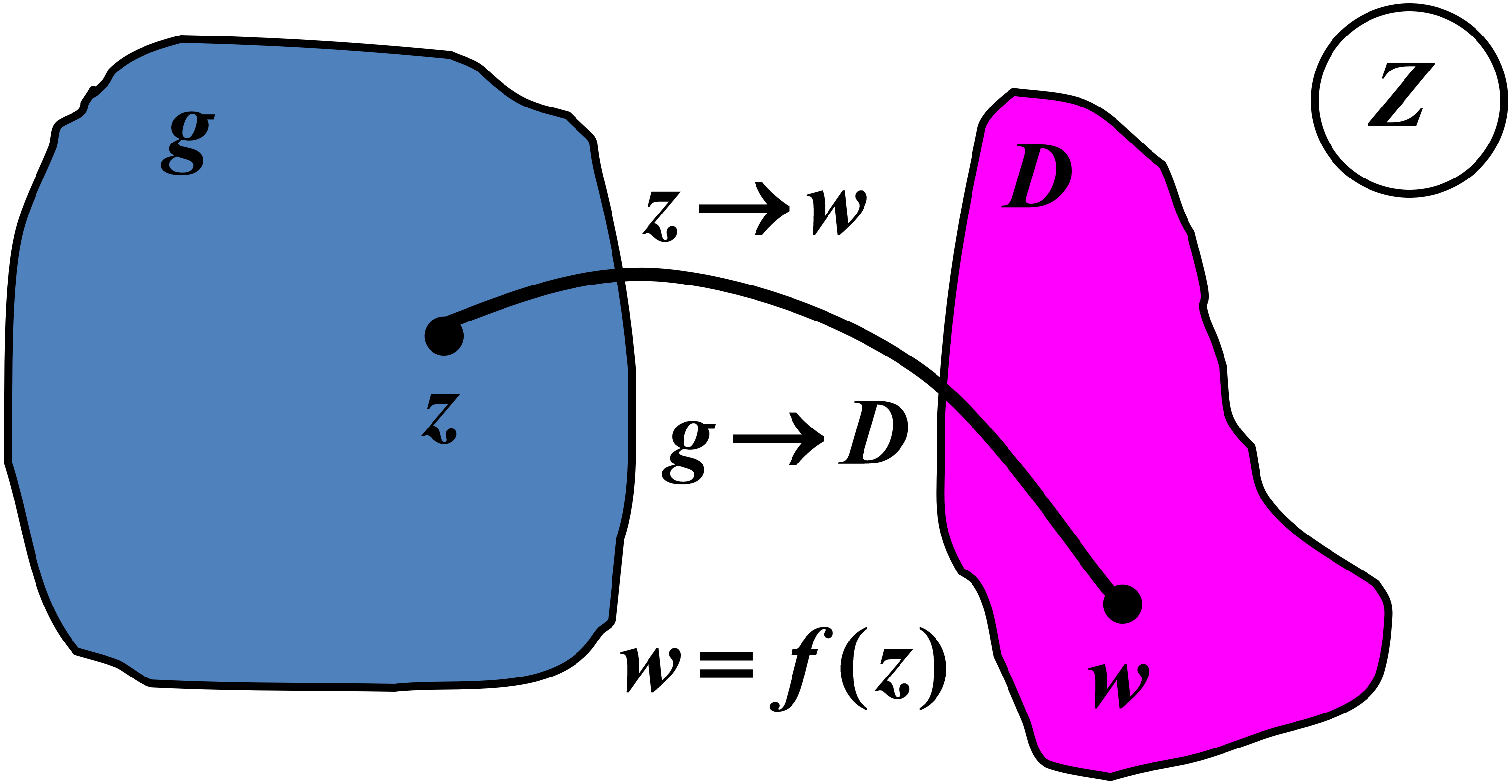
Def. Комплексная плоскость дополненная бесконечно удаленной точкой называется *расширенной комплексной плоскостью*.

Def. Окрестностью бесконечно удаленной точки называется множество $\{z: \ |z| > R\}$ **– внешность круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса** R**.**



N
z'
S
z

§2. Понятие функции комплексной переменной.



g

множество задания (определения) $f(z)$

D

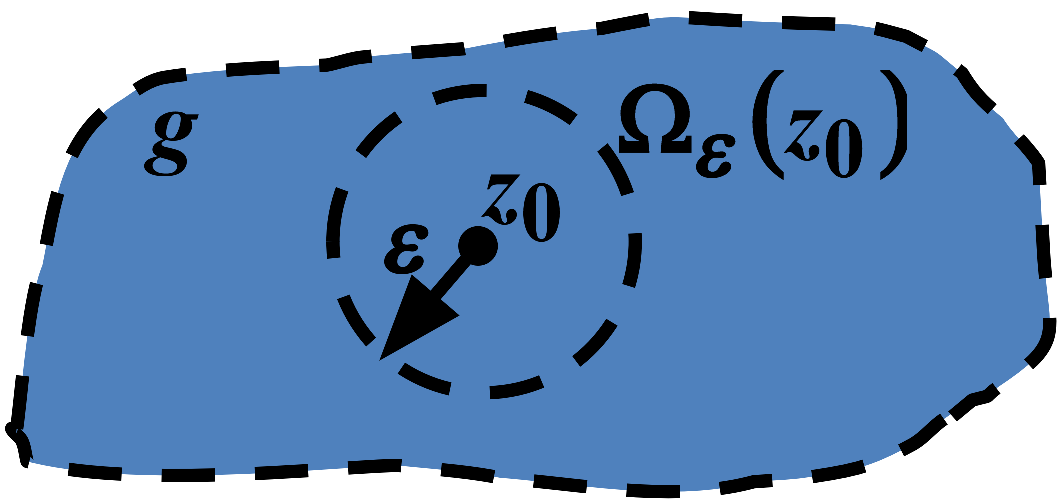
множество значений $f(z)$

Точки множества.

Def. Точка $z_0 \in g$ называется *внутренней* точкой множества g, если

$$\exists \Omega_\varepsilon(z_0) \equiv \{z: \ |z - z_0| < \varepsilon\}: \ \Omega_\varepsilon(z_0) \subset g.$$

Def. Множество, состоящее из внутренних точек называется *открытым* множеством.



Def. Множество g называется *связным*, если $\forall z_1, z_2 \in g$ можно соединить кусочно-гладкой кривой $L \subset g$.

Def. *Область* — открытое, связное множество.

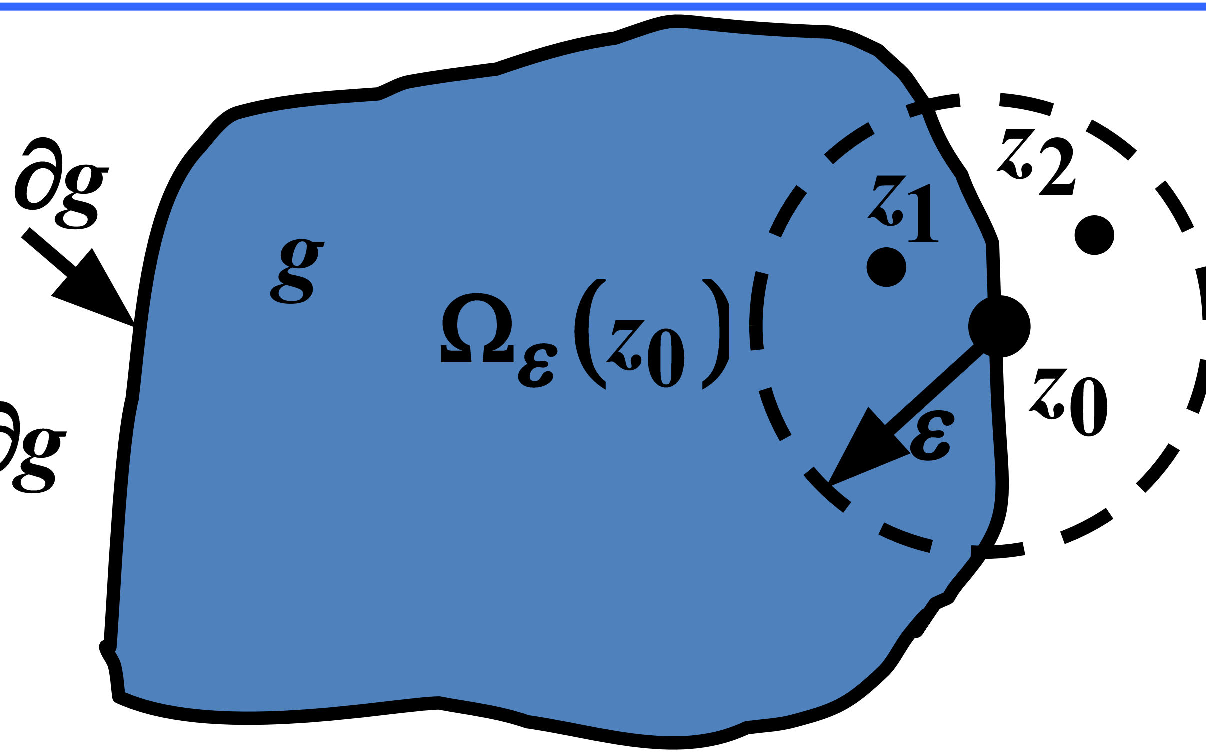
Def. Точка $z_0 \in g$ называется *граничной* точкой множества g, если в $\forall \Omega_\varepsilon(z_0)$ $\exists z_1 \in g$ и $\exists z_2 \notin g$.

Def. Совокупность граничных точек множества g называется *границей* множества g.

$\partial g, \quad C, \quad \Gamma, \quad \Sigma,$ …

Граница множества может состоять из конечного числа точек, и даже из одной точки (как, например, у множества $|z|>0$).

<u>Def.</u> . Замыкание области g, состоящее в присоединении к g ее границы ∂g называется *замкнутой областью* □g $=g+\partial g$.



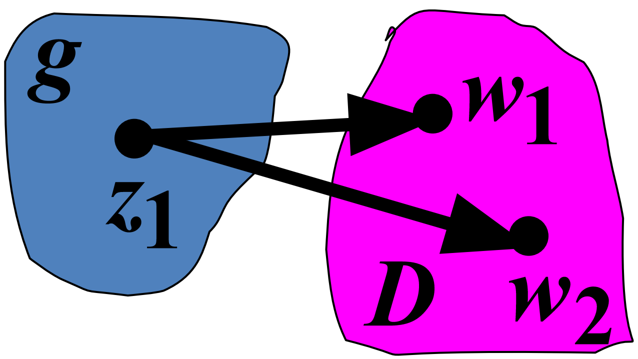
$$\overline{g}=g+\partial g$$

Отображение $g \to D$ **однозначно (по умолчанию).**

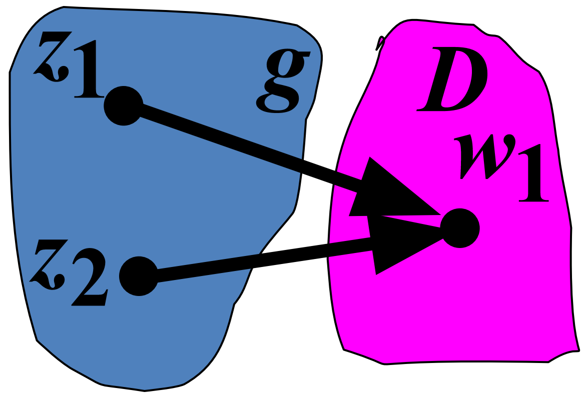
Если $\forall z_1 \neq z_2 \in g \quad f(z_1) = w_1 \neq w_2 = f(z_2)$,

то отображение *взаимно однозначно (инъекция)* $g \leftrightarrow D$.

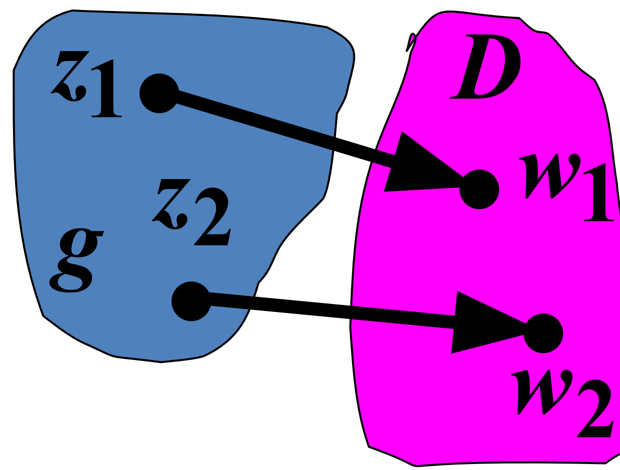
В этом случае *g* называется *областью однолистности f(z)*, а *f(z)* — *однолистной* в *g*.



неоднозначное отображение



однозначное, не однолистное отображение



однозначное, однолистное отображение

При $g \leftrightarrow D$ когда область значений совпадает с D в D $\exists$ *обратная функция* $z=\phi(w)$, осуществляющая отображение $D \to g$.
Если отображение $g \to D$ однозначно, но не однолистно, то можно говорить об обратной функции, но она не будет однозначной.

При $z=x+iy$, $w= f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
Свойства функции комплексной переменной определяются свойствами функций двух действительных переменных.

Некоторые элементарные функции комплексной переменной.

1. $w = f(z) = az + b;$

$$z = x + iy, \quad a = a_1 + ia_2 = ke^{i\alpha}, \; b = b_1 + ib_2.$$

Однозначная, однолистная на всей комплексной плоскости.

Геометрический смысл: растяжение в k раз, поворот на угол α, параллельный перенос вдоль вектора b.

Единственное отображение, сохраняющее подобие всех фигур.

2. $w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy, \quad z = x + iy.$

$$w = f(z) = r^2 e^{2i\varphi}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Однозначная, но не однолистная на всей комплексной плоскости. $f(z) = w_1 = w_2 = f(-z);$

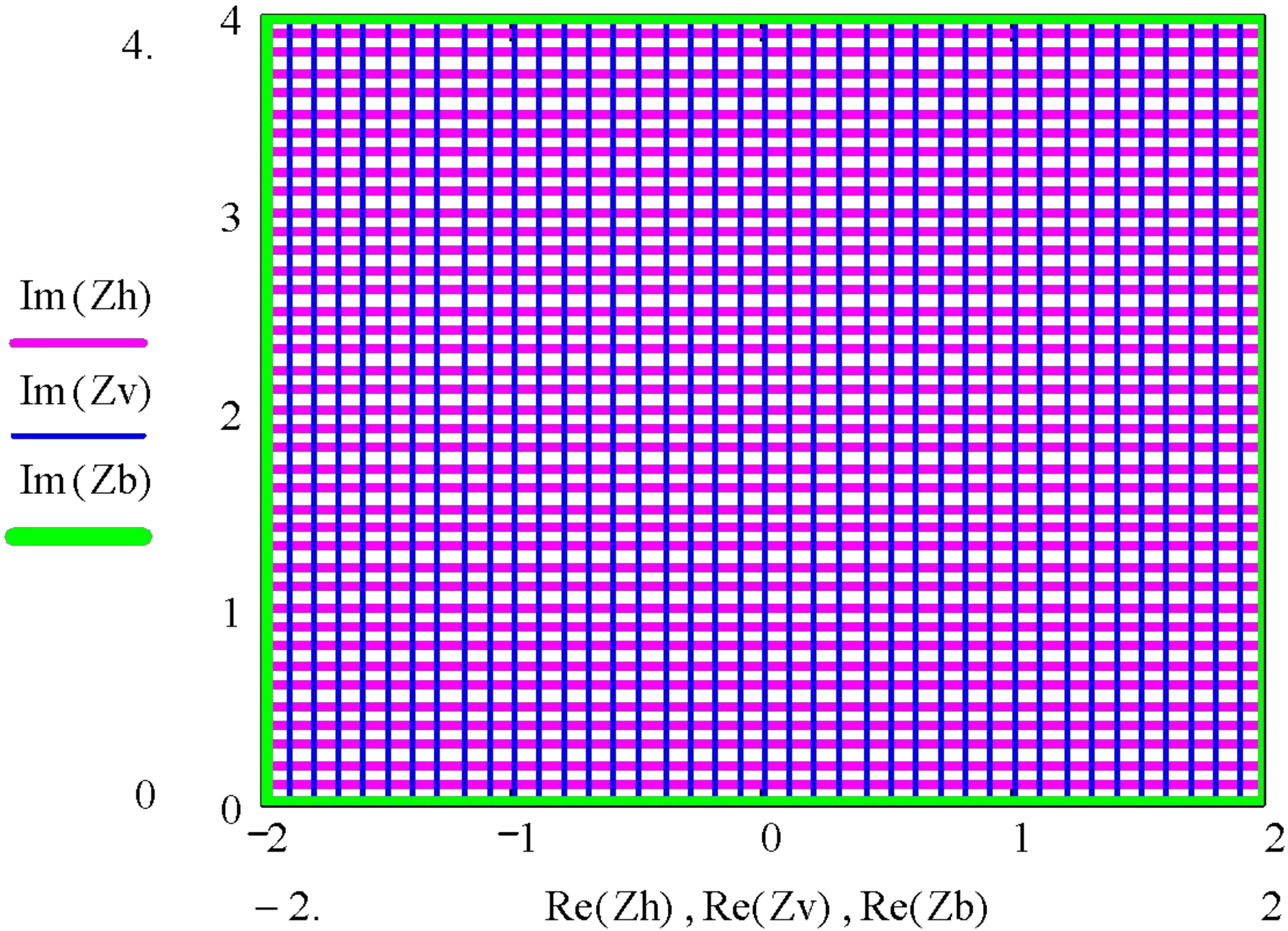
Область однолистности— полуплоскость

$$C < \arg \quad z < C + \pi, \quad C \in R.$$

Область однолистности отображается на всю комплексную плоскость.

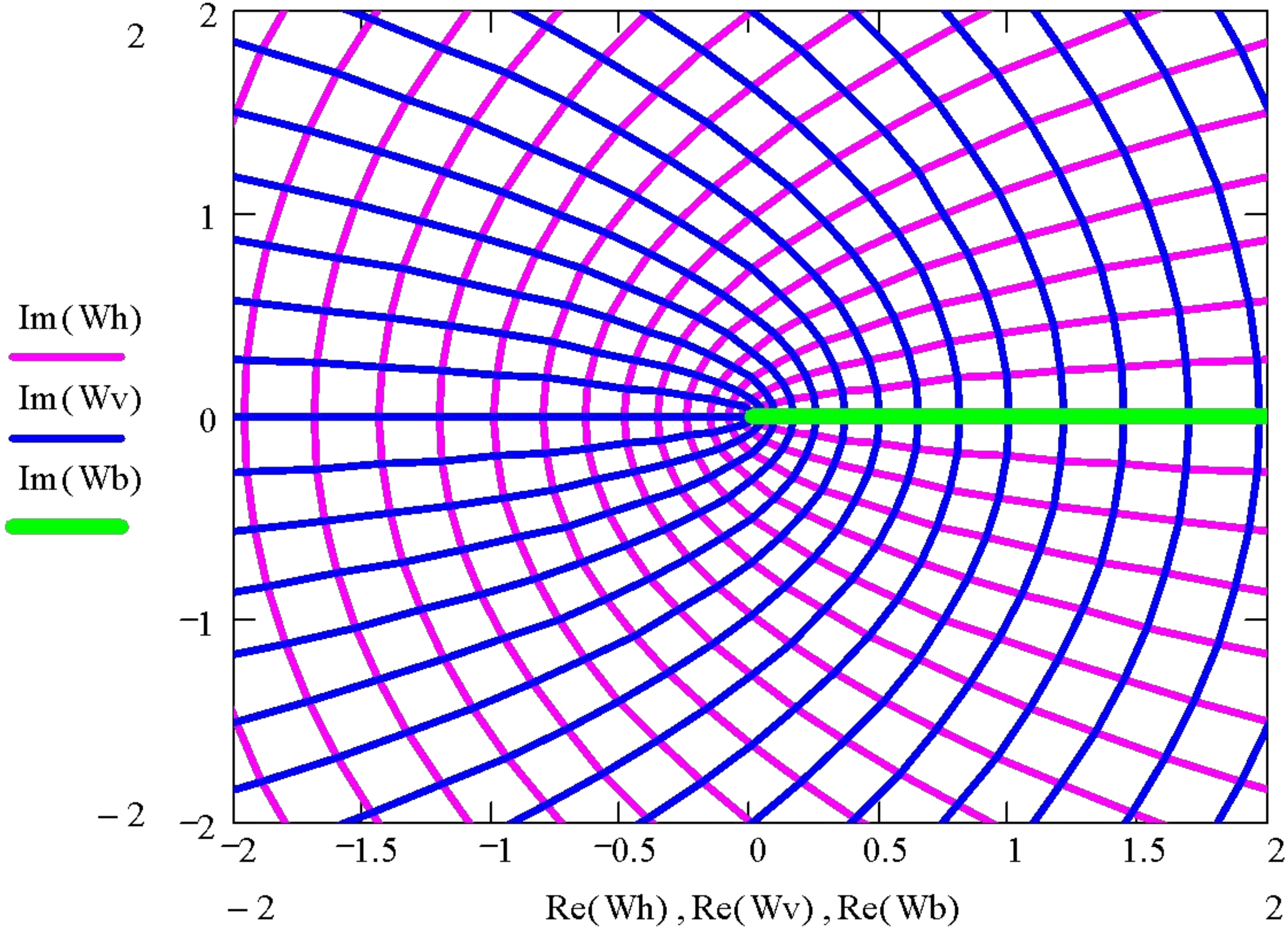
Любая прямая, не проходящая через точку z**=0 отображается в параболу. Декартова сеть линий в верхней полуплоскости отображается в 2 взаимно ортогональных семейства софокусных парабол.**

Декартова сеть



Отображение декартовой сети в $\operatorname{Im} z > 0$

$$w = z^2$$



3. $w = f(z) = \sqrt{z}$. **Многозначная функция.**

Две ветви: $w_1 = \sqrt{z}, \quad w_2 = -\sqrt{z}$.

Точки ветвления, при обходе которых по любому замкнутому контуру происходит переход с одной ветви на другую $z = 0, \quad z = \infty$.

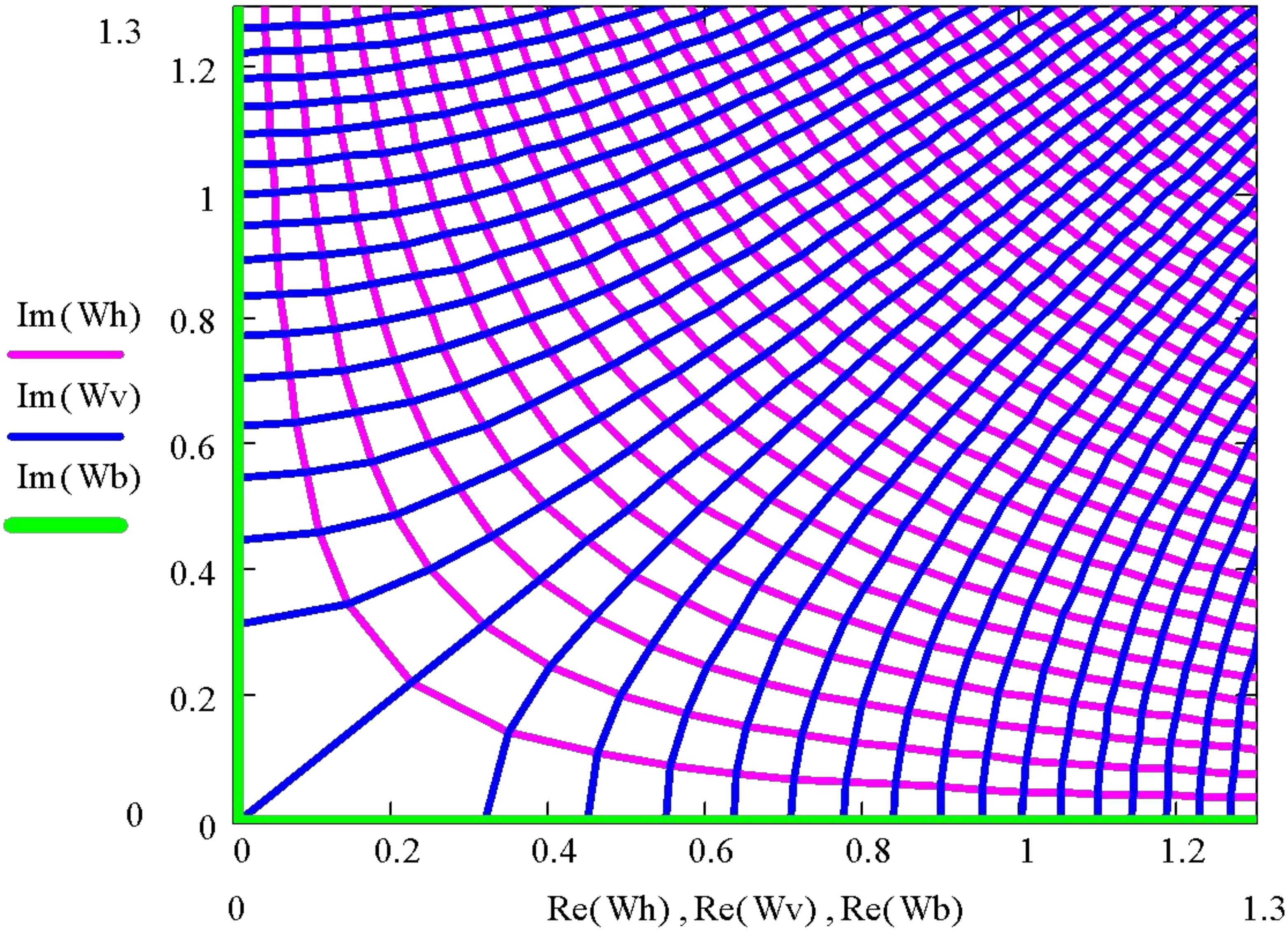
На плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси $-\pi < \arg z < \pi$ **каждая ветвь— однозначная функция.**

$w_1 = \sqrt{z}$ − **главное значение.** $-\dfrac{\pi}{2} < \arg w_1 < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\{-\pi < \arg z < \pi\} \xrightarrow{w_1 = \sqrt{z}} \{\operatorname{Re} w_1 > 0\}.$$

Отображение декартовой сети в $\operatorname{Im} z > 0$

$$w = \sqrt{z}$$



4. $$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}, \quad z = x+iy.$$

$$w = f(z) = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Однозначная, однолистная на всей комплексной плоскости.

Геометрический смысл: симметричное отражение относительно вещественной оси и инверсия относительно единичной окружности.

Отображение декартовой сети в z $\quad w = \frac{1}{z}$