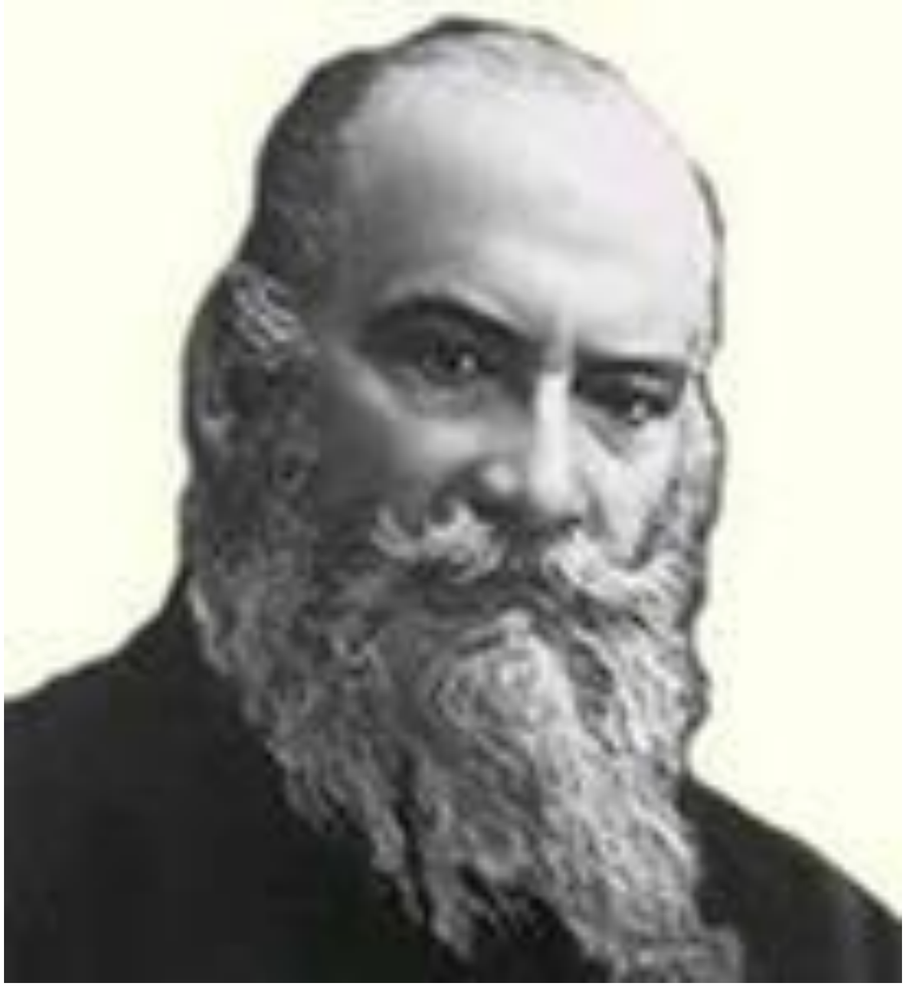
Лекция 3.

Система параллельных сил. Теория пар сил

Из того, что пересекающиеся силы имеют равнодействующую, следует, что параллельные имеют ее тоже, поскольку последние являются частным случаем пересекающихся.

Николай Егорович Жуковский



Николай Егорович Жуковский
1847-1921, Москва

На предыдущей лекции

- Изучили систему сходящихся сил
- Показали, что ССС имеет равнодействующую
- Установили уравнения равновесия ССС
- Познакомились с алгоритмом решения задач статики
- Ввели понятие момента силы относительно точки и оси

Цель лекции

- ***Решение задач статики для тел, на которые действует система параллельных сил***
- ***Ввести понятие пары сил***
- ***Сформулировать основную теорему статики***

План лекции

3.1. Параллельные силы, направленные в одну сторону

3.2. Параллельные силы, направленные противоположно

3.3. Теория пар сил

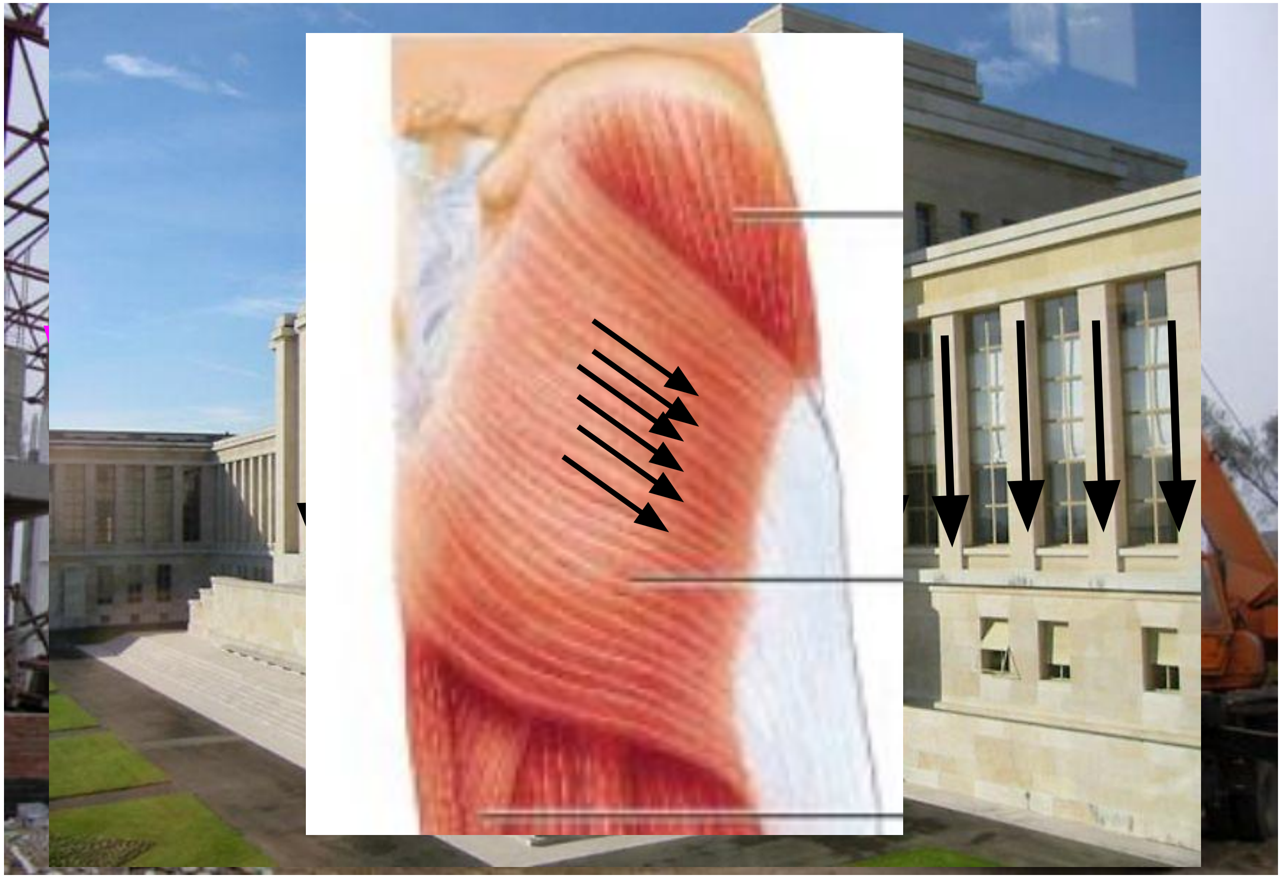
3.4. Основная теорема статики

3.5. Условия равновесия СПС

3.6. Заключение

3.1. Определение СПС

Система сил, линии действия которых параллельны, называются системой параллельных сил (СПС)



Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, равную по модулю сумме их модулей, параллельна им и направленную в ту же сторону.

Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения данных сил обратно пропорционально их величине

Доказательство

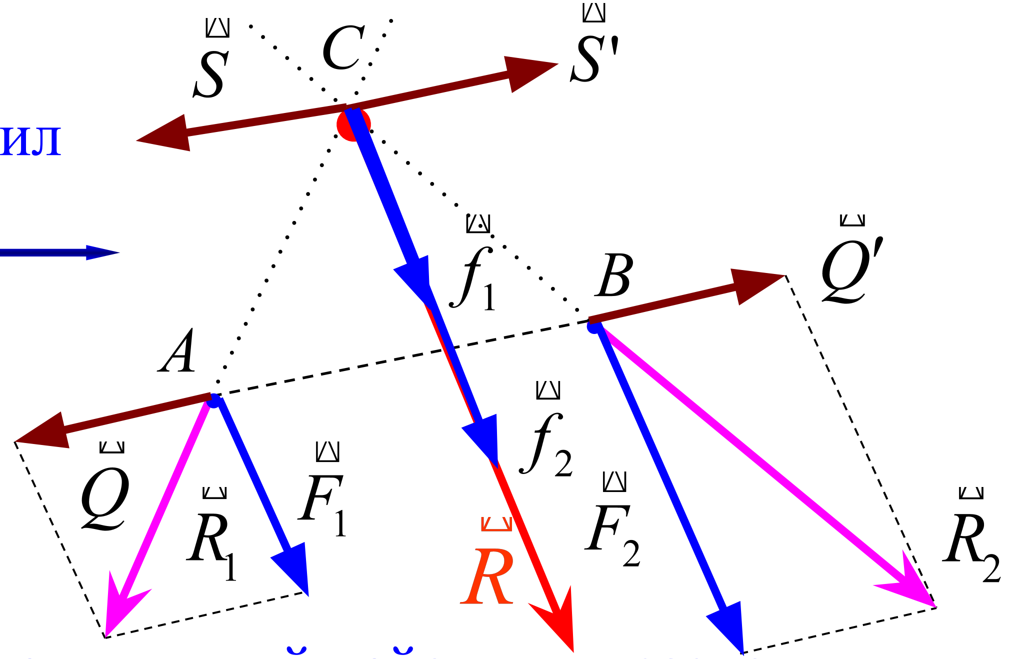
Даны силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и $\vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$

Соединим точки приложения сил

Добавим систему сил $\vec{Q} = -\vec{Q}'$ →

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2\} \sim$$
$$\sim \{\vec{R}_1, \vec{R}_2\}$$

Эти силы не параллельны



Перенесем их до точки пересечения линий действия и разложим на составляющие:

$$\vec{R}_1 = \vec{S} + \vec{f}_1,\ \vec{R}_2 = \vec{S}' + \vec{f}_2, \text{ где } \vec{S} \parallel \vec{Q},\ \vec{S}' \parallel \vec{Q}',\ \vec{F} \parallel \vec{f},\ \vec{F}_1 \parallel \vec{f}_1 \longrightarrow$$

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \{\vec{R}_1, \vec{R}_2\} \sim \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \longrightarrow \boxed{|\vec{R}| = |\vec{f}_1| + |\vec{f}_2| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|}$$

Первая часть теоремы доказана

Доказательство второй части теоремы

Определим положение точки D

$$\{\vec{F}_1,\vec{F}_2\}\sim\{(\vec{S},\vec{f}_1),(\vec{S}',\vec{f}_2)\}$$

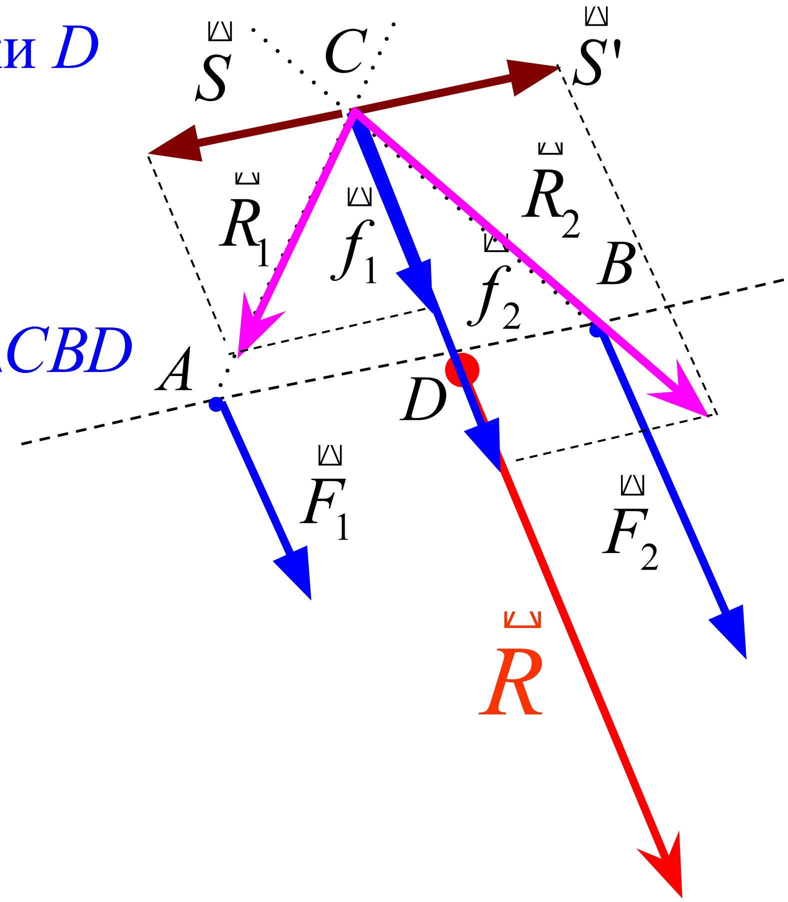
Рассмотрим треугольники

$$\Delta\vec{S}\vec{f}_1\vec{R}_1\propto\Delta CDA,\quad \Delta\vec{S}'\vec{f}_2{}'\vec{R}_2\propto\Delta CBD$$

$$\frac{f_1}{S}=\frac{CD}{AD},\qquad \frac{f_2}{S'}=\frac{CD}{DB}$$

$$\underbrace{f_1\cdot AD=f_2\cdot DB}=S\cdot CD$$

$$\boxed{\frac{AD}{DB}=\frac{f_2}{f_1}=\frac{F_2}{F_1}}$$



Вторая часть теоремы доказана

Дана СПС $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_n\}$

- Равнодействующая сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ =

$\vec{R}_{12} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ и $A_1C_1 / P_2 = C_1A_2 / P_1$

$$\mathbf{A_1C_1} / P_2 = \mathbf{C_1A_2} / P_1$$

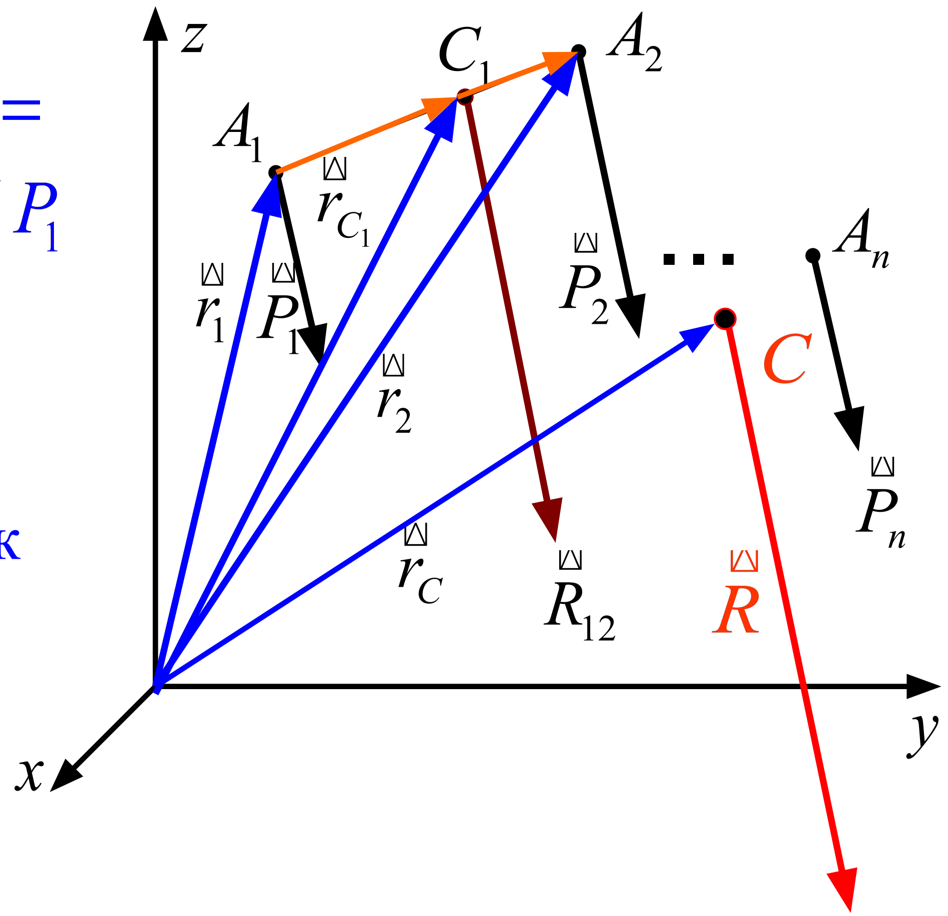
- Введем систему координат
- Тогда для радиус-векторов точек приложения сил имеем

$$(\vec{r}_{C_1} - \vec{r}_1) / P_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_{C_1}) / P_1$$

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{P_1\vec{r}_1 + P_2\vec{r}_2}{P_1 + P_2}$$

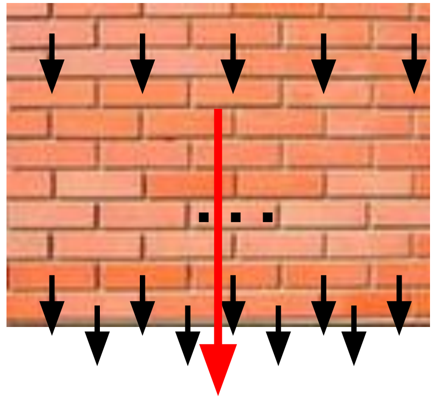
- Далее по индукции можно доказать, что

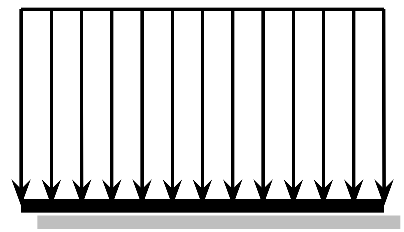
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i, \qquad \vec{r}_C = R^{-1} \sum_{i=1}^{n} P_i \vec{r}_i$$



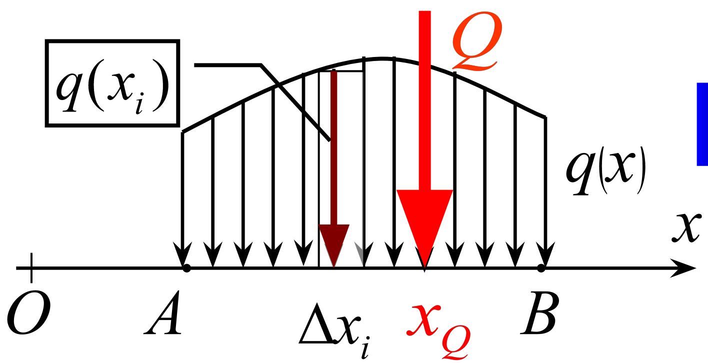
Сосредоточенная сила

Распределенная нагрузка





Сила, действующая на единицу длины линии, называется **интенсивностью нагрузки *q***

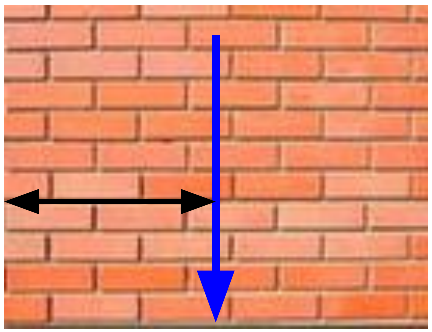


$$Q = \sum_i q(x_i)\Delta x_i$$

$$Q = \int_A^B q(x)dx$$

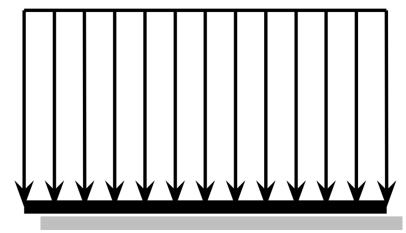
$$x_Q = \frac{1}{Q}\int_A^B x q(x)dx$$

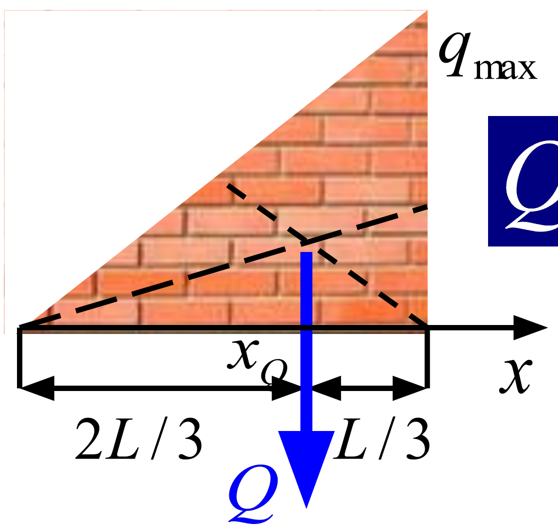
Равномерно распределенные нагрузки



$q(x)=const$

$$Q = qL$$

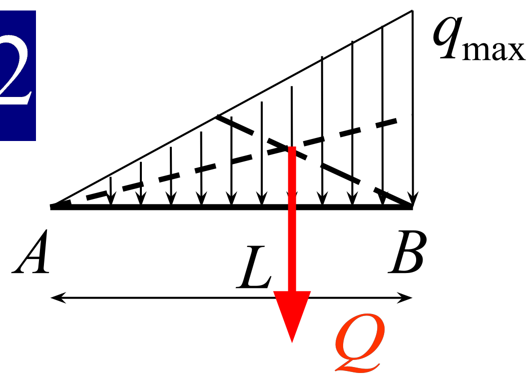




$$Q = ?$$

$$Q = qL/2$$

$$x_Q = 2L/3$$



3.2. Параллельные силы, направленные противоположно

Система двух не равных по модулю сил, линии действия которых параллельны, но силы направлены противоположно, имеет равнодействующую, которая равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы.

Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая лежит на продолжении отрезка АВ и делит этот отрезок внешним образом на части, обратно пропорциональные силам

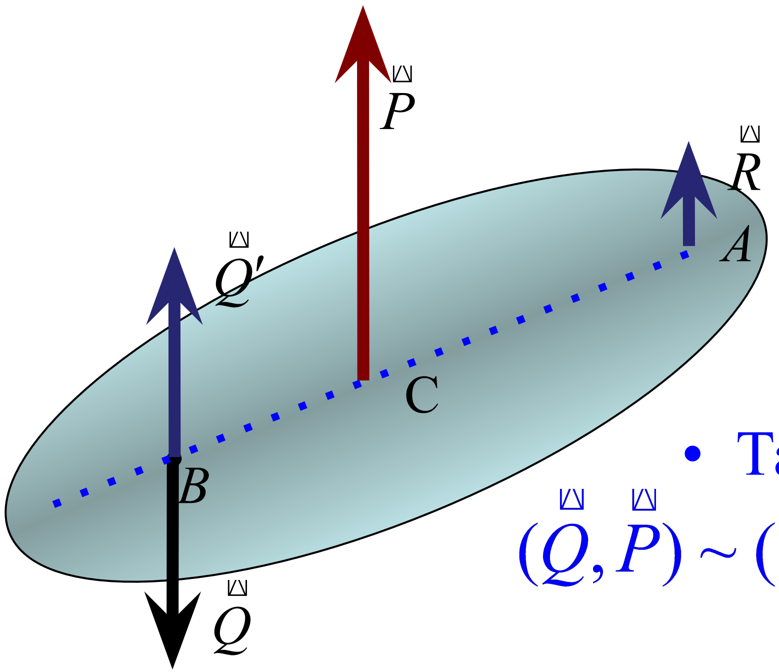
Доказательство

Дано тело, на которое действует система двух противоположно направленных сил $(\vec{Q},\vec{P})$, $\vec{Q}\parallel\vec{P}$, $P>Q$

- Разложим бóльшую силу на две ей параллельные $\vec{P}\sim(\vec{Q}',\vec{R})$

- Пусть, кроме того, $\vec{Q}'=-\vec{Q}$ →

$$\vec{R}=\vec{P}-\vec{Q}$$



- Эта сила приложена в точке A

$$AC=\frac{Q'\cdot BC}{R}=\frac{Q\cdot BC}{P-Q}$$

- Таким образом,

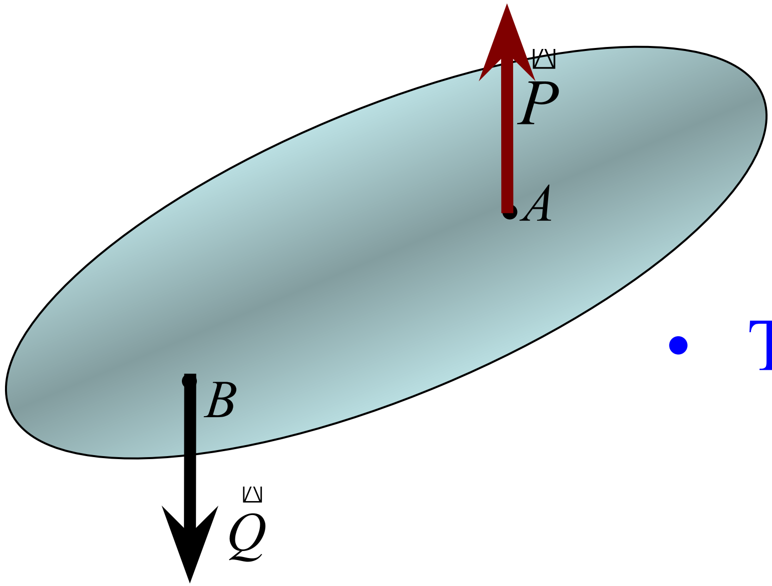
$$(\vec{Q},\vec{P})\sim(\vec{Q},\vec{Q}',\vec{R})\sim(0,\vec{R})\sim\vec{R}$$

Теорема доказана

3.3. Теория пар сил

Рассмотрим случай, когда $P = Q$

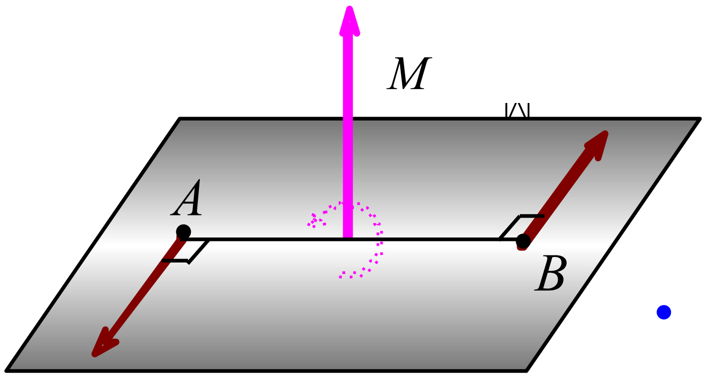
- Из доказанной теоремы следует, что $R = P - Q = 0$ и



$$AC = \lim_{P \to Q} \frac{Q \cdot AB}{P - Q} = \infty$$

- Такая система сил не имеет равнодействующей и называется **парой сил**

- Под действием пары сил тело вращается и это вращение характеризуется **моментом пары**



Пусть дана пара сил $(\vec{F}, \vec{F}_1)$

- Плоскость, проходящая через линии действия сил, называется **плоскостью действия пары**
- Расстояние между линиями действия сил называется **плечом пары**

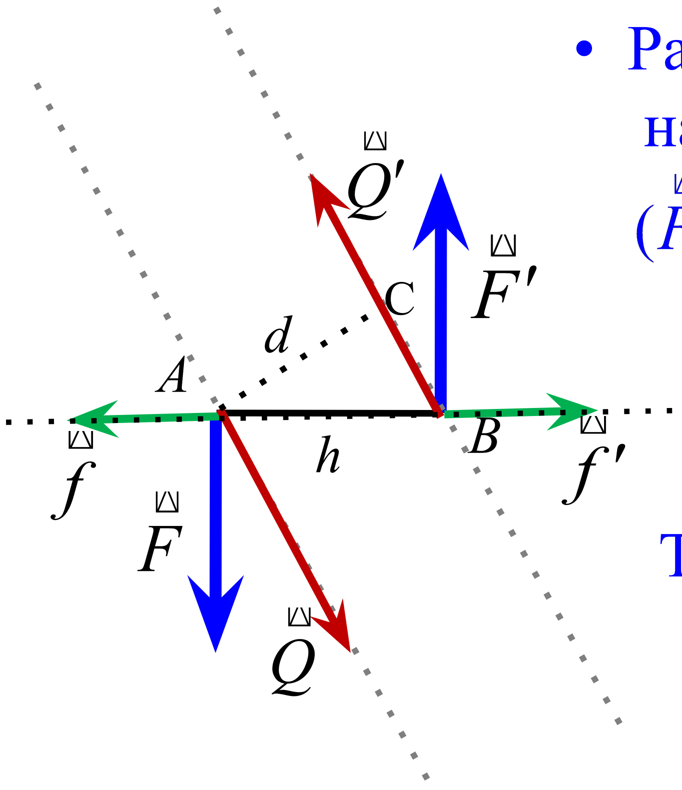
Моментом пары сил называется вектор $\vec{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары: $M=Fd$. Этот вектор направлен перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда вращение пары видно происходящим против часовой стрелки.

Для пар сил, расположенных в одной плоскости можно использовать понятие алгебраического момента пары: $M = \pm Fd$. Знак "плюс" берется, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, "минус" – по ходу.

Момент пары не зависит от точек приложения сил пары. Он определяется лишь плечом пары

Все пары сил, имеющие один и тот же момент, эквивалентны.

Доказательство



Дана пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ с моментом $m = Fh$

- Разложим каждую из них по двум направлениям на силы $\{\vec{f}, \vec{Q}\}, \{\vec{f}', \vec{Q}'\}$ ⟶

$(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{f}, \vec{Q}, \vec{f}', \vec{Q}')$ но $(\vec{f}, \vec{f}') \sim 0$ ⟶

$$\boxed{(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{Q}, \vec{Q}')}$$

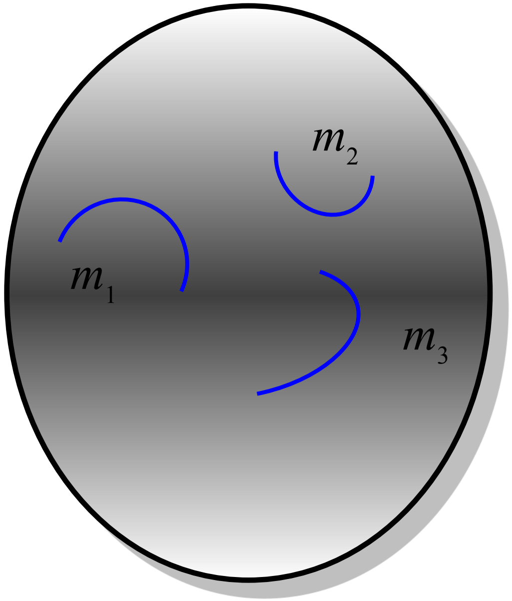
- Момент пары $(\vec{Q}, \vec{Q}')$ равен $m' = Qd$

Так как $\Delta ABC \sim \Delta FQf$ то $d = hF/Q$ ⟶

$$\boxed{m' = Qd = (Qh)F/Q = Fh = m}$$

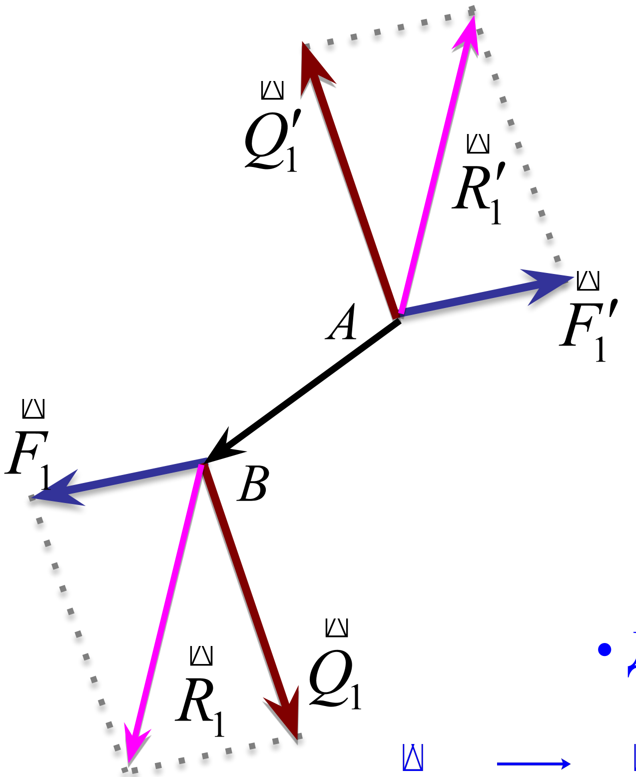
Теорема доказана для пар, лежащих в одной плоскости

- Таким образом, действие на тело пары сил целиком определяется ее моментом
- Действие всех пар, имеющих одинаковые моменты эквивалентны
- Располагать пару сил в пространстве можно в любом месте. Момент пары сил поэтому называют свободным вектором
- Если пары сил лежат в одной плоскости, то их моменты перпендикулярны этой плоскости и можно использовать понятие алгебраического момента пары



Действие на тело системы пар с моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots, \vec{M}_N$ Эквивалентно действию одной пары с моментом

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_k$$



- Докажем сначала теорему для двух пар сил
- Из теоремы об эквивалентности пар следует, что для доказательства достаточно рассмотреть две пары, точки приложения сил которых A и B совпадают
- Рассмотри две пары сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ и $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_1')$
- Действие рассматриваемых двух пар эквивалентно действию одной пары $(\vec{R}_1, \vec{R}_1')$ с моментом

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{R}_1 = \overrightarrow{AB} \times (\vec{F}_1 + \vec{Q}_1) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{AB} \times \vec{Q}_1 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Для N пар доказательство получается по индукции.

- Действие на тело произвольной системы пар сил с моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, ..., \vec{M}_N$ эквивалентно действию одной пары с моментом $\vec{M} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_k$

- Для того чтобы тело под действием системы пар тело находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы

$$\boxed{\vec{M} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_k = 0} \longrightarrow$$

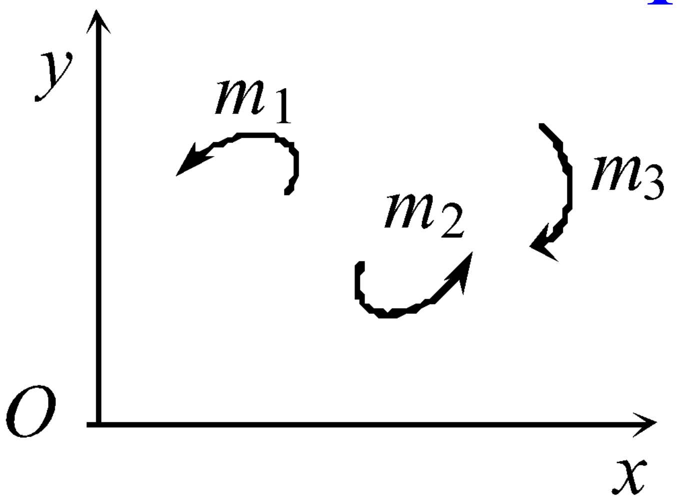
Уравнения равновесия

$$\boxed{M_x = \sum_{k=1}^{N} M_{kx} = 0,} \quad \boxed{M_y = \sum_{k=1}^{N} M_{ky} = 0,} \quad \boxed{M_z = \sum_{k=1}^{N} M_{kz} = 0}$$

Для плоской системы сил $\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} m_k = 0$

В плоскости *Oxy* расположены три пары сил. Определить момент пары m_3, при котором эта система пар находится в равновесии, если $m_1 = 510$ Н·м, $m_2 = 120$ Н·м

Решение



Уравнение равновесия данной системы пар имеет вид

$$m_1 + m_2 - m_3 = 0$$

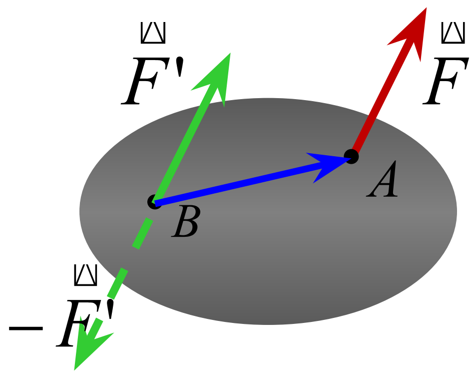
$$510 + 120 - m_3 = 0 \longrightarrow m_3 = 670\ Н \cdot м$$

3.3.8. Еще один тип связи

3.4. Основная теорема статики (теорема Пуансо)

Луи Пуансо
1777-1859, Париж

Действие на твердое тело силы $\vec{F}$, приложенной в точке *A*, эквивалентно действию силы $\vec{F}'$, равной исходной по модулю, параллельной ей и приложенной в точке *B*, и паре сил с моментом равным моменту данной силы относительно точки *B*



Доказательство

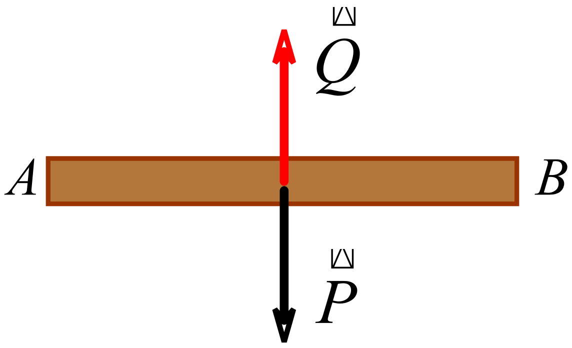
- Добавим к силе $\vec{F}$ уравновешенную систему сил $\{\vec{F}', -\vec{F}'\} \sim 0$ в точке B →

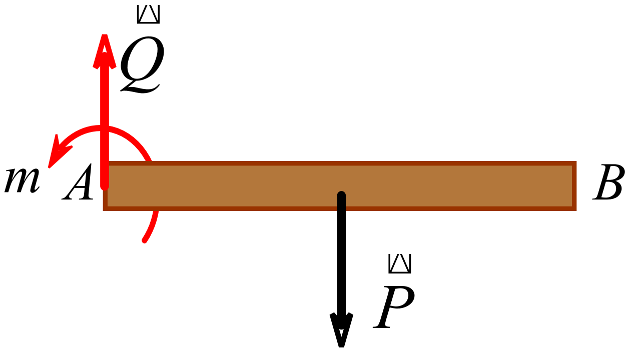
$$\vec{F} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', -\vec{F}'\}$$

- Но силы $\vec{F}, -\vec{F}'$ образуют пару сил с моментом

$$\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}') = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F})$$

Теорема доказана





Чтобы удержать однородный брусок весом P за его середину, нужно просто тянуть его вверх с силой $Q = P$

Чтобы удержать однородный брусок весом P в равновесии за конец А, необходимо не только тянуть его вверх с силой $Q = P$, но и создавать момент $m = P{\cdot}AB/2$

Главным вектором данной системы сил называется вектор $\vec{R}^*$, равный сумме всех сил системы

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Замечание

- Главный вектор определен для любой системы, а равнодей-ствующая в ряде случаев просто не существует
- Главный вектор системы сил не зависит от центра приведения

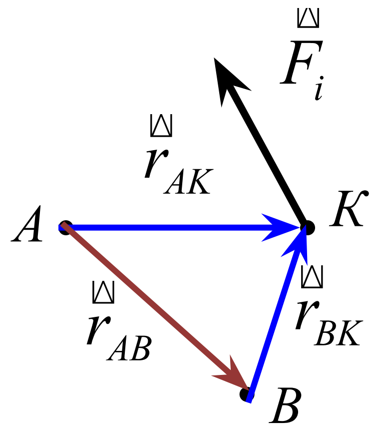
Главным моментом данной системы сил относительно точки A называется вектор $\vec{M}_A^*$, равный сумме моментов всех сил системы относительно той же точки

$$\vec{M}_A^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Ai} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i)$$

Замечание

- Главный момент меняется при смене центра приведения

Действительно, $\vec{M}_{Ai} = \vec{r}_{AK} \times \vec{F}_i$, а $\vec{M}_{Bi} = \vec{r}_{BK} \times \vec{F}_i$ $\longrightarrow$



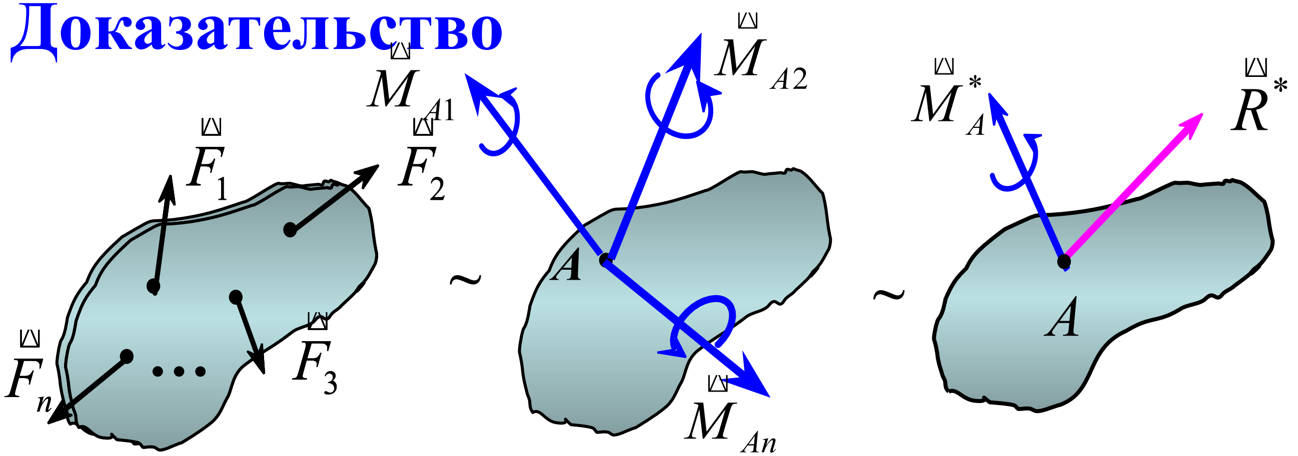
$$\vec{M}_A^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{AK} \times \vec{F}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BK}) \times \vec{F}_i = \vec{r}_{AB} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{BK} \times \vec{F}_i =$$

$$= \vec{r}_{AB} \times \vec{R}^* + \vec{M}_B^*$$

Произвольную систему сил можно заменить одной силы, приложенной в произвольно выбранной точке (центре приведения) и равной главному вектору системы сил, и парой сил с моментом, равным главному моменту системы относительно этой точки

Доказательство



$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_A^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i)$$

- Пользуясь леммой о параллельном переноса силы, перенесем их все параллельно в точку A

Теорема доказана

Для того чтобы две системы сил, приложенные к твердому телу, были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты

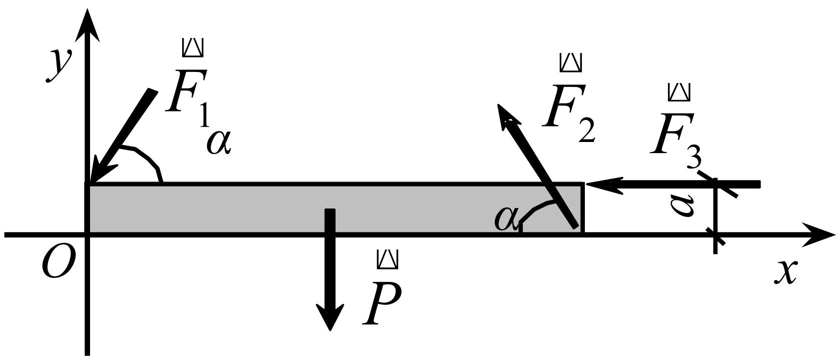
Основная теорема статики является конструктивной, она дает простой способ аналитического определения главного вектора и главного момента любой системы сил

$$\vec{R}^* = \left(\vec{i}R_v^* + \vec{j}R_v^* + \vec{k}R_v^*\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{i}F_{ix} + \vec{j}F_{iy} + \vec{k}F_{iz}\right)$$

$$\vec{M}_A^* = \left(\vec{i}M_{Ax}^* + \vec{j}M_{Ay}^* + \vec{k}M_{Az}^*\right) = \sum_{i=1}^{n}\vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{i}M_{Ax}(\vec{F}_i) + \vec{j}M_{Ay}(\vec{F}_i) + \vec{k}M_{Az}(\vec{F}_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{i}M_x(\vec{F}_i) + \vec{j}M_y(\vec{F}_i) + \vec{k}M_z(\vec{F}_i)\right)$$

Привести к центру O систему сил $\vec{P}, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, действующих на пластину длиной $2b$, если $P = 30$ Н, $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ Н, $a = 0{,}3$ м, $b = 0{,}5$ м, $\alpha = 60°$.



Решение

- Введем систему координат с началом в точке O
- Найдем главный вектор данной системы сил

$$R_x^* = -F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha - F_3 = -40\,(\text{Н}),$$

$$R_y^* = -F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha - P = -30\,(\text{Н})$$

- Найдем теперь главный момент данной системы сил. Эта система плоская, поэтому момент имеет единственную составляющую, перпендикулярную плоскости чертежа

$$M_O^* = aF_1 \cos\alpha + 2bF_2 \sin\alpha + aF_3 - bP = 11.3\,(\text{Н} \cdot \text{м})$$

3.5. Условия равновесия произвольной системы сил

Пусть дана произвольная система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\}$. Тело под действием этой системы сил находится в равновесии, если она эквивалента нулю $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\} \sim 0$

Но

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}^*, \vec{M}_O^*)\} \sim 0 \longrightarrow$$

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0, \qquad \vec{M}_O^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = 0$$

В координатной форме эти уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0$$

Пусть дана параллельных сил в пространстве (линии действия параллельны оси Oz. Главный вектор в этом случае имеет единственную составляющую, параллельную этой оси, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

Моменты же всех сил относительно оси Oz равны нулю, и следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0$$

Пусть все силы находятся в плоскости *Oxy*. В этом случае проекция главного вектора на ось *Oz* равна нулю, а главный момент направлен параллельно этой оси. Т.о., имеем три уравнения равновесия.

Основная форма уравнений равновесия ПСС

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0$$

Вторая форма уравнений равновесия ПСС ($AB \not\perp Ox$)

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

Третья форма уравнений равновесия ПСС (точки *A*, *B*, *C* не должны лежать на одной прямой)

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_C(\vec{F}_i) = 0$$

3.6. Заключение

3.6.1. Основные выводы

- Две сонаправленные силы, линии действия которых параллельны имеют равнодействующую
- Две параллельные противоположно направленные и не равные по модулю силы имеют равнодействующую
- Введено понятие пары сил, действие которой характеризуется ее моментом
- Действие на тело произвольной системы сил всегда можно заменить действием одной силы равной главному вектору и одной парой с моментом, равным главному моменту
- Для произвольной системы сил в общем случае можно составить 6 уравнений равновесия

3.6.2. Тема следующей лекции

3.6.2. Тема следующей лекции

3.6.2. Тема следующей лекции