

Лекция 2

Список литературы

- 1. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad**
- 2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики**
- 3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы**
- 4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика**
- 5. Компьютерное моделирование. №6401 (ВГАУ)**

Численные методы решения дифференциальных уравнений

- 1. Понятие о методе Эйлера (геометрическая интерпретация)***
- 2. Особенности реализации метода Эйлера в системе Mathcad***
- 3. Усовершенствованный метод ломаных***
- 4. Метод Эйлера-Коши***
- 5. Аппроксимация производных разностными отношениями. Порядок аппроксимации***
- 6. Явная и неявная схемы Эйлера***
- 7. Методы Рунге-Кутты и их реализация в системе Mathcad***

1. Понятие о методе Эйлера (геометрическая интерпретация)

Решение начальных задач с дифференциальными уравнениями является необходимым этапом математического моделирования. Приближенные решения можно получить с помощью методов, основанных на методе Эйлера.

Рассмотрим начальную задачу

$$y' = f(x, y) \quad x \in [a, b] \quad (1.1)$$

$$y(a) = y_0$$

Метод Эйлера заключается в следующем.

Отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$ разбивается на N

мелких и равных частей длины $h = \frac{b-a}{N}$

Дифференциальной задаче (1.1) соответствует разностная задача

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h} = f(x_{i-1}, v_{i-1}), \quad i=1, \dots, N \quad x_0 = a \quad x_i = x_{i-1} + h \quad v_0 = y_0 \quad (1.2)$$

Систему уравнений называют явной схемой Эйлера. Эта система приводится к рекуррентным формулам

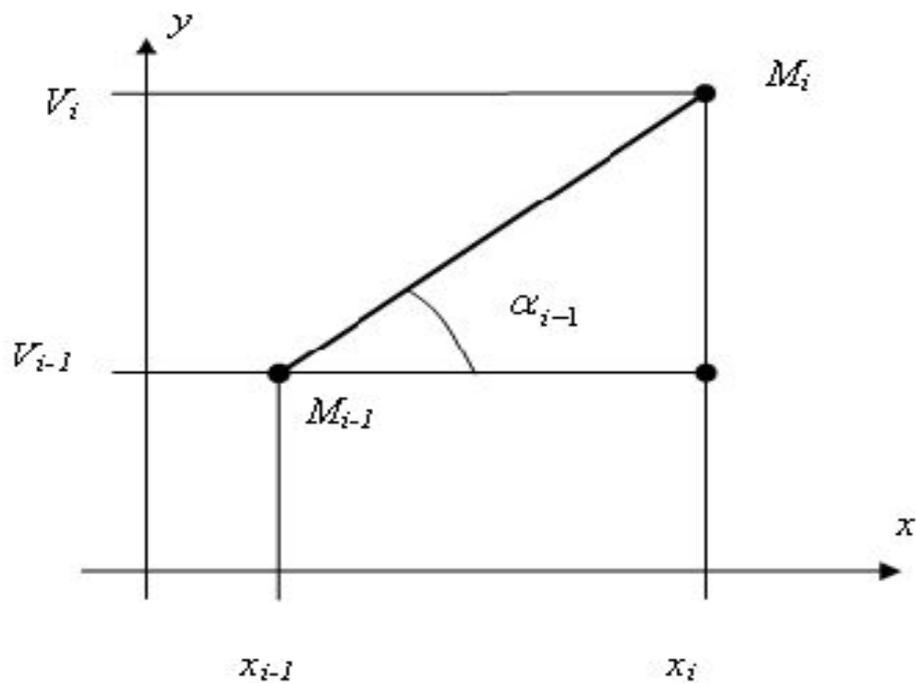
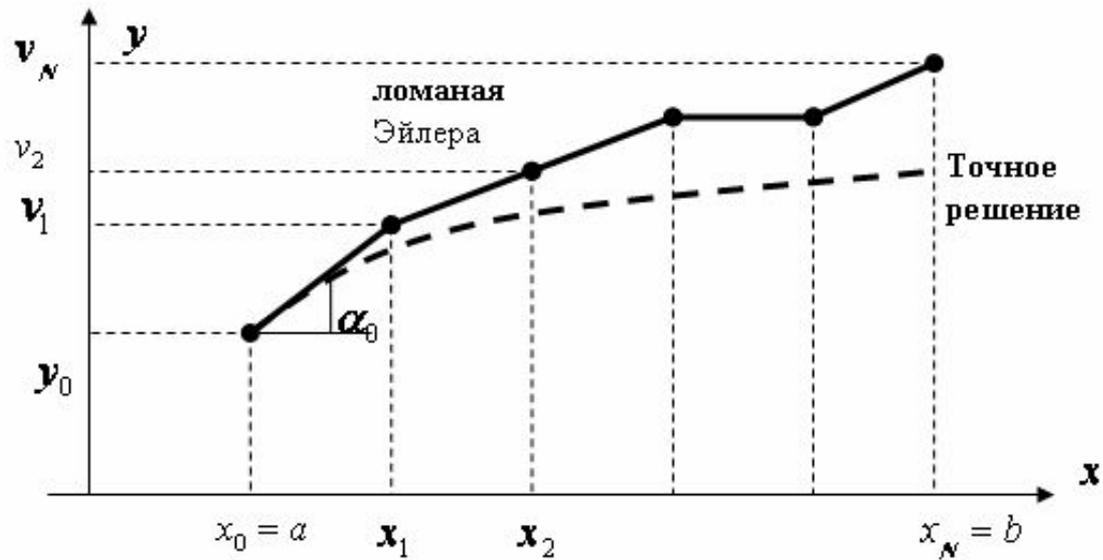
$$\begin{aligned}x_0 &= a & x_i &= x_{i-1} + h \\v_0 &= y_0 & v_i &= v_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, v_{i-1}) \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}$$

При изучении свойств метода Эйлера полезно рассмотреть геометрическую интерпретацию этого метода.

Дифференциальное уравнение первого порядка определяет поле направлений на плоскости: в каждой точке плоскости определена касательная к интегральной кривой, проходящей через данную точку. Угловым коэффициентом касательной определяется по формуле

$$k = \operatorname{tg} \alpha = y' = f(x, y) \qquad k = f(x, y)$$

Метод Эйлера состоит в том, что касательные, образующие ломаную Эйлера, проводятся к различным интегральным кривым дифференциального уравнения. При некоторых значениях шага интегрирования приближенное решение (ломаная Эйлера) существенно отклоняется от точного решения задачи. Данное свойство получило название неустойчивости разностной схемы.



$$\frac{v_i - v_{i-1}}{h} = \operatorname{tg} \alpha_{i-1} = f(x_{i-1}, v_{i-1})$$

2. Особенности реализации метода Эйлера в системе Mathcad

Рассмотрим задачу

$$y' = -\frac{x}{y} \quad x \in (-2; 10]$$

$$y(-2) = 4$$

Точное решение задачи имеет вид

$$y = \sqrt{20 - x^2}$$

Построим поле направлений дифференциального уравнения

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$k = \operatorname{tg} \alpha$	α	Уравнение изоклины
0	0	$x = 0$
1	$\frac{\pi}{4}$	$y = -x$
-1	$\frac{3\pi}{4}$	$y = x$

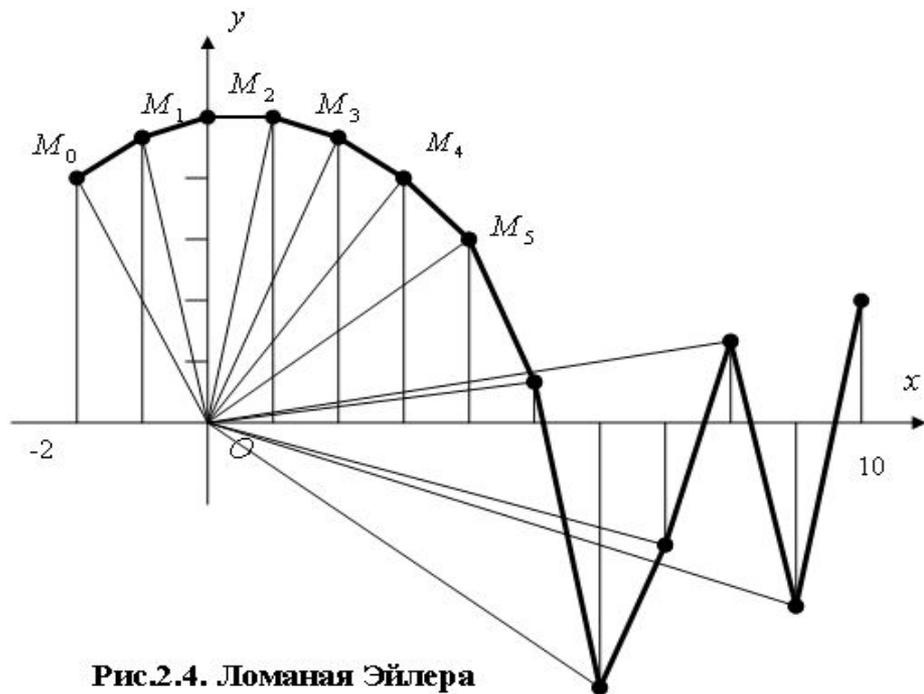
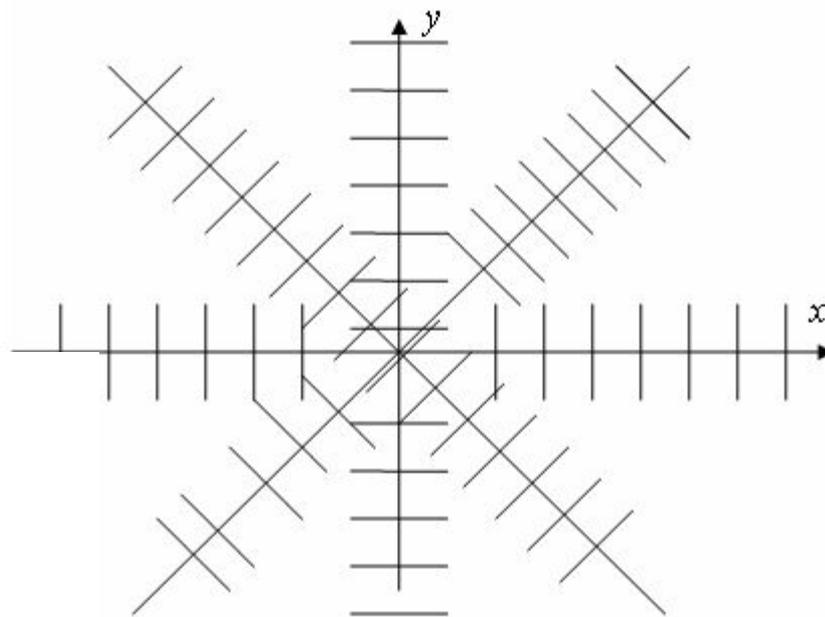


Рис.2.4. Ломаная Эйлера

$$V_0 = 4 \quad h = \frac{10 - (-2)}{N}$$

$$x_i = x_{i-1} + h \quad N = 12$$

$$V_i = V_{i-1} - h \frac{x_{i-1}}{V_{i-1}} \quad i = 1, \dots, 100$$

Реализация явной схемы Эйлера в системе Mathcad

$a := -2$

$b := 23$

$y_0 := 4$

$x_0 := a$

Явная схема Эйлера

$\text{diffeller}(y_0, a, b, N, f) :=$

$$h \leftarrow \frac{b - a}{N}$$

$$x_0 \leftarrow x_0$$

$$y_0 \leftarrow y_0$$

for $i \in 1..N$

$$x_i \leftarrow x_{i-1} + h$$

$$y_i \leftarrow y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$Z^{(0)} \leftarrow x$$

$$Z^{(1)} \leftarrow y$$

Z

Решение начальной задачи

$$\frac{d}{dx} Y = f(x, Y), \quad Y(x_0) = y_0$$

$N := 62$

$Z := \text{diffeller}(y_0, a, b, N, D)$

$x := Z^{(0)}$

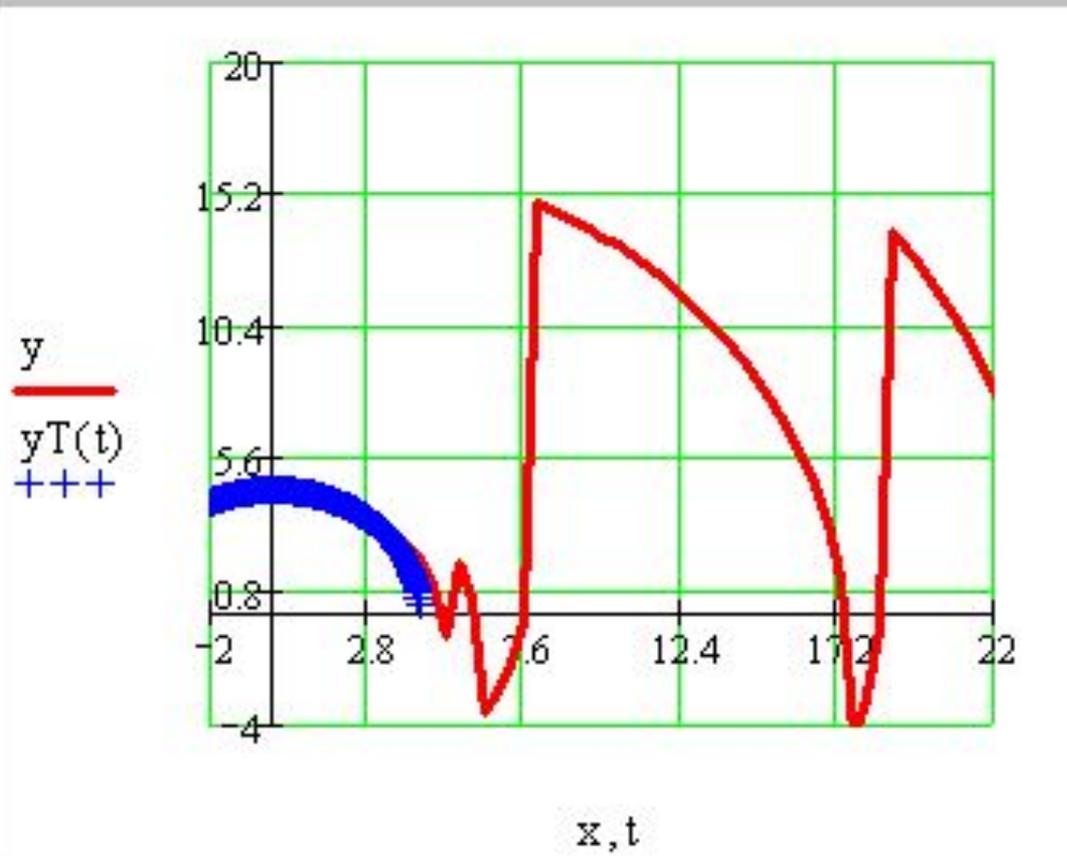
$y := Z^{(1)}$

Начальная задача имеет решение только на конечном отрезке

$N = 62$

$$yT(t) := \sqrt{20 - t^2}$$

Точное решение начальной задачи



3. Усовершенствованный метод ломаных

Первый шаг

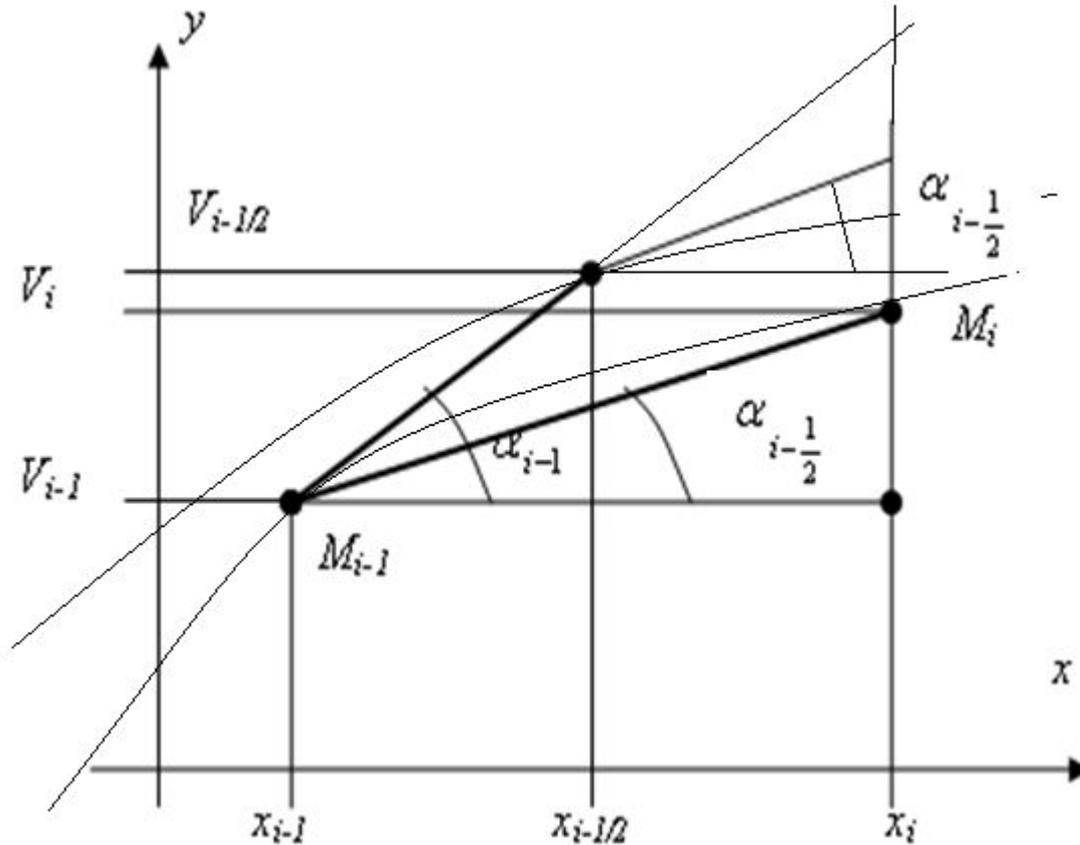
$$x_{i-1/2} = x_{i-1} + \frac{h}{2}$$

$$V_{i-1/2} = V_{i-1} + \frac{h}{2} f(x_{i-1}, V_{i-1})$$

Второй шаг

$$V_i = V_{i-1} + hf\left(x_{i-1/2}, V_{i-1/2}\right)$$

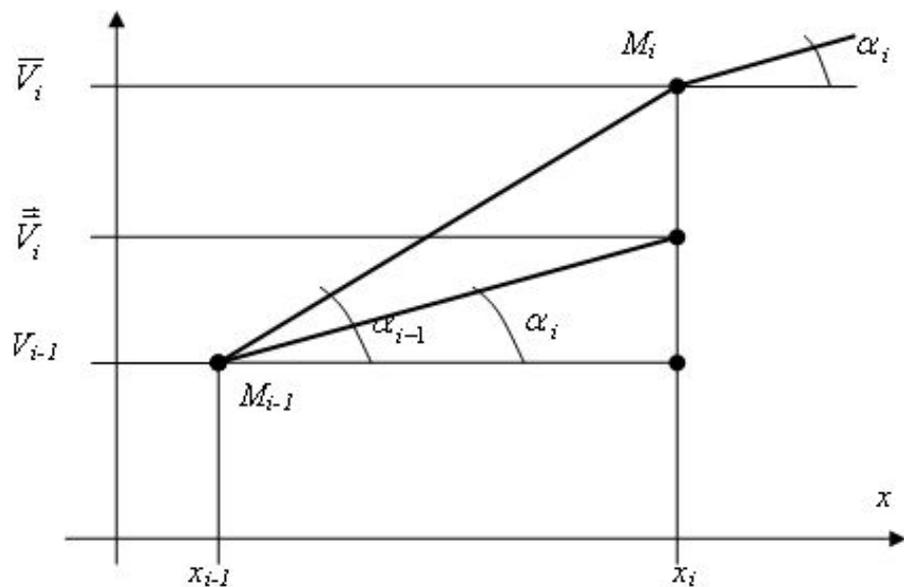
$$i = 1, 2, \dots, N$$



Усовершенствованный метод ломаных

```
diffellerU(y0 , a , b , N , f) :=  $\left( \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b - a}{N} \\ (x_0 \leftarrow a) \cdot (y_0 \leftarrow y_0) \\ \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left( \begin{array}{l} x_i \leftarrow x_{i-1} + h \\ \left( xp_i \leftarrow x_{i-1} + \frac{h}{2} \right) \cdot \left( yp_i \leftarrow y_{i-1} + \frac{h}{2} \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right) \\ y_i \leftarrow y_{i-1} + h \cdot f(xp_i, yp_i) \\ z^{(0)} \leftarrow x \\ z^{(1)} \leftarrow y \end{array} \right. \\ z \end{array} \right)$ 
```

4. Метод Эйлера-Коши



Первый шаг

$$x_i = x_{i-1} + h$$

$$\bar{V}_i = V_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, V_{i-1})$$

Второй шаг

$$\bar{\bar{V}}_i = V_{i-1} + hf(x_i, \bar{V}_i)$$

$$V_i = \frac{\bar{V}_i + \bar{\bar{V}}_i}{2}$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Схема Эйлера-Коши

```

diffellerK(y0, a, b, N, f) :=
  (h ← (b - a) / N) · (x0 ← a) · (y0 ← y0)
  for i ∈ 1..N
    xi ← xi-1 + h
    yPi ← yi-1 + h · f(xi-1, yi-1)
    ySi ← yi-1 + h · f(xi, yPi) · (yi ← (yPi + ySi) / 2)
    Z<0> ← x
    Z<1> ← y
  Z
  
```

4.Проведем тестирование программных блоков

$\underline{a} := -2$

$\underline{y0} := 4$

$\underline{N} := 22$

$ZP := \text{diffellerU}(y0, a, b, N, D)$

$ZP1 := \text{diffellerK}(y0, a, b, N, D)$ $N = 22$

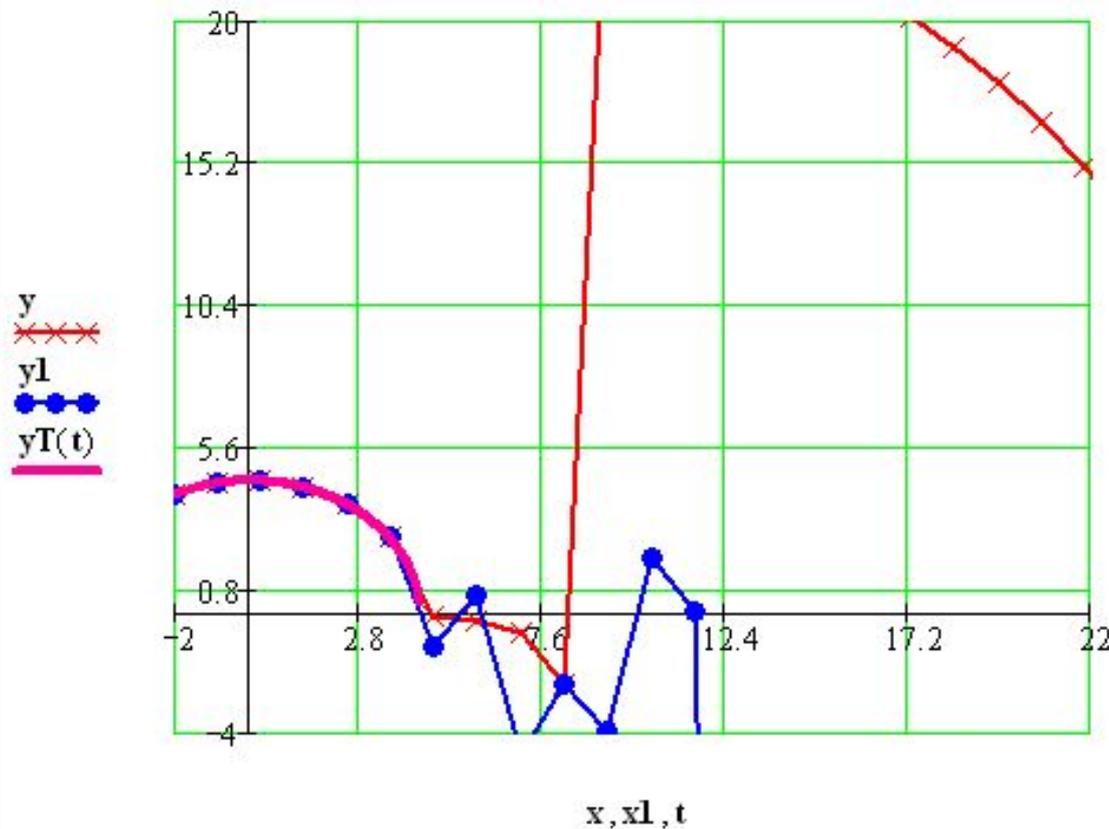
$x := ZP^{(0)}$

$y := ZP^{(1)}$

$x1 := ZP1^{(0)}$

$y1 := ZP1^{(1)}$

$\underline{yT}(t) := \sqrt{20 - t^2}$



y =

	0
0	4
1	4.38
2	4.455
3	4.238
4	3.683
5	2.608
6	-0.066
7	-0.212
8	-0.683
9	-2.354
10	24.844
11	24.386
12	23.865
13	23.277
14	22.617
15	21.878

$\underline{N} := 14$

Пример начальной задачи, которая имеет несколько решений

7. Решение начальной задачи не является единственным

$F6(x, y) := x \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{y}$ $a := 0$ $y0 := -0.000000001$ $a = 0$ $N := 220$ $b = 23$

$Z1 := \text{diffeller}(y0, a, b, N, F6)$ $Z2 := \text{diffellerU}(y0, a, b, N, F6)$ $Z3 := \text{diffellerK}(y0, a, b, N, F6)$

$Z4 := \text{diffRK}(y0, a, b, N, F6, 1, 1, 0.4, 0.6)$

$Z5 := \text{Rkadapt}(y0, a, b, N, F6)$

$y1 := Z1^{(1)}$

$y2 := Z2^{(1)}$

$y3 := Z3^{(1)}$

$y4 := Z4^{(1)}$

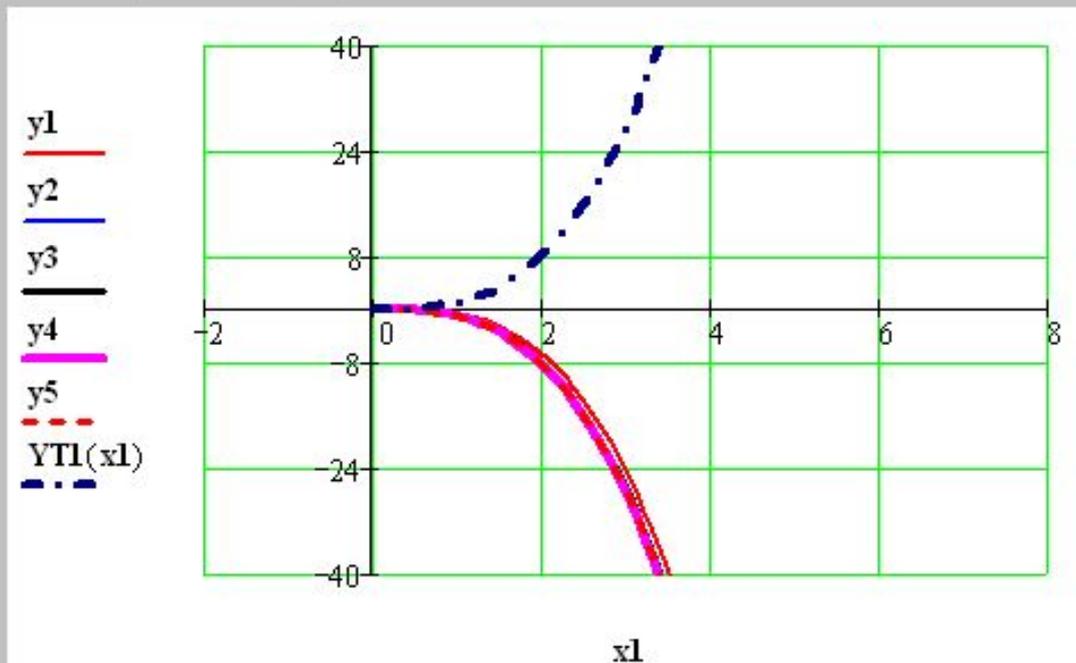
$y5 := Z5^{(1)}$

$YT1(t) := t^3$

$YT2(t) := -t^3$

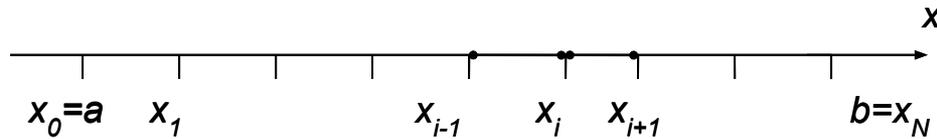
$N = 220$

$x1 := Z1^{(0)}$



5. Аппроксимация производных разностными отношениями. Порядок аппроксимации

Сеткой на отрезке $[a, b]$ называют любое конечное множество точек этого отрезка



Функция, определенная в точках сетки, называется сеточной функцией

Пусть $\omega_h = \{x_i = a + ih, i = 1, \dots, N - 1\}$ - равномерная сетка на $[a, b]$

где $h = \frac{b-a}{N}$ - шаг сетки, точка x_i - узел сетки

Рассмотрим функцию $y(x)$, которая имеет производные некоторого порядка

Введем обозначения $y_i = y(x_i)$ С учетом принятого обозначения

$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ - правая разностная производная в точке x_i

$y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ - левая разностная производная в точке x_i

$y_{\hat{x}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ - центральная разностная производная в точке x_i

Рассмотрим погрешность замены производной разностными отношениями (погрешность аппроксимации)

Формула Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \bar{x} \in (x_0, x)$$

Бесконечно малая величина β называется бесконечно малой порядка k

по отношению к бесконечно малой α , если β и α^k есть бесконечно малые одного порядка:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0 \quad \text{Записывают} \quad \beta = O(\alpha^k)$$

Локальная формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

Пусть функция $y = y(x)$ обладает необходимой гладкостью

тогда $x - x_i = h$ и в точке x_i

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2!} + O(h^3)$$

Отсюда получаем

$$\frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} = y'(x_i) + O(h) \qquad \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} - y'(x_i) = O(h)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2!} + O(h^3)$$

$$\frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} = y'(x_i) + O(h) \qquad \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h} - y'(x_i) = O(h)$$

Разностные отношения аппроксимируют производные с первым порядком относительно h

$$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2!} + O(h^3)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2!} + O(h^3)$$

$$y(x_i + h) - y(x_i - h) = 2y'(x_i)h + O(h^3)$$

$$\frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} = y'(x_i) + O(h^2) \quad \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} - y'(x_i) = O(h^2)$$

Центральное разностное отношение аппроксимирует производную со вторым порядком

Замечание. В дальнейшем используются обозначения.

$$y_i = y(x_i)$$

$$y_{i+1} = y(x_i + h)$$

$$y_{i-1} = y(x_i - h)$$

6. Явная и неявная схемы Эйлера

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad x \in (a, b]$$

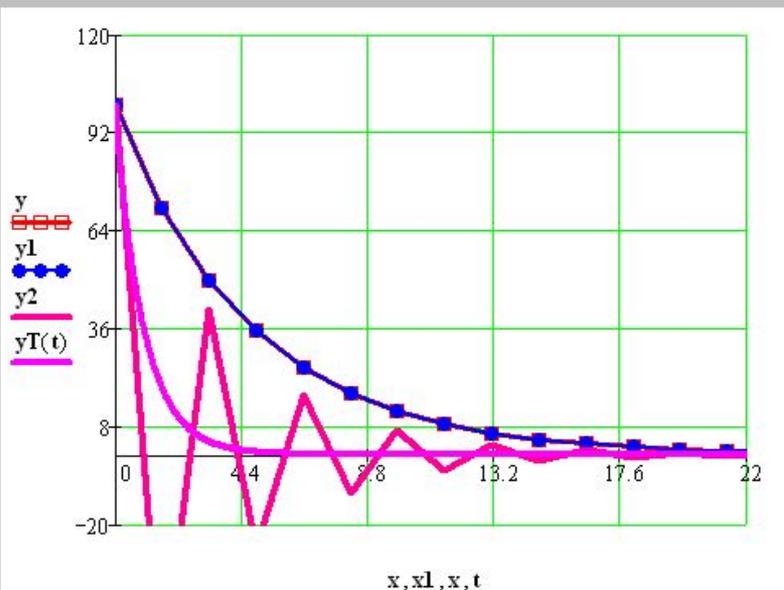
$$u(a) = u_0$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad - \text{ явная схема Эйлера}$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i) \quad - \text{ неявная схема Эйлера}$$

Метод (численный) сходится в точке $x_i = ih = x$, если $|y_i - u(x_i)| \rightarrow 0$
при $h \rightarrow 0$

```
ZP := diffellerU(y0, a, b, N, F1)  ZP1 := diffellerK(y0, a, b, N, F1)  N = 14
x := ZP<0>  y := ZP<1>  x1 := ZP1<0>  y1 := ZP1<1>  ZP2 := diffeller(y0, a, b, N, F1)
yT(t) := y0 * e^(-alpha * t)  y2 := ZP2<1>
```



Говорят, что метод имеет порядок точности p , если существует $p > 0$, такое, что

$$|y_i - u(x_i)| = O(h^p)$$

при $h \rightarrow 0$

$N = 14$ $\alpha := -1$ $F1(x, y) := \alpha \cdot y$ $a := 0$

$y0 := 100$

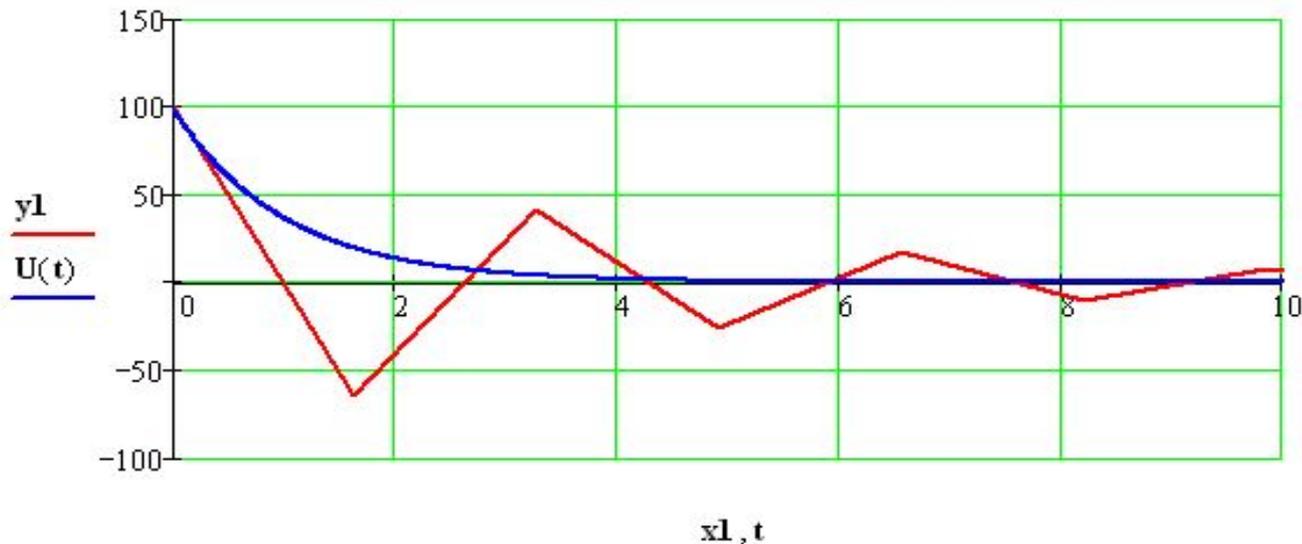
$Z1 := \text{diffeller}(y0, a, b, N, F1)$

$x1 := Z1^{(0)}$

$y1 := Z1^{(1)}$

$U(t) := y0 \cdot e^{\alpha \cdot t}$

Неустойчивость явной схемы Эйлера



Пример: $\frac{du}{dx} = -\beta \cdot u, \quad u(0) = u_0, \quad \beta > 0$

Рассмотрим явную схему Эйлера

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -\beta y_{i-1} \quad y_i - y_{i-1} = -h\beta y_{i-1} \quad y_i = y_{i-1} (1 - h\beta) = S y_{i-1}$$

$$S = (1 - \beta h) \quad y_m = S^m u_0$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N$$

Условие устойчивости $|S| < 1$ или $h < \frac{2}{\beta}$

Неявная схема Эйлера

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -\beta y_i \quad y_i - y_{i-1} = -h\beta y_i \quad y_i (1 + h\beta) = y_{i-1}$$

Отсюда следует

$$y_m = \frac{u_0}{(1 + h\beta)^m} \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

При любом h значения y_m уменьшаются с ростом m . Это соответствует убыванию точного решения начальной задачи.

Неявная схема является абсолютно устойчивой.

7. Методы Рунге-Кутты и их реализация в системе Mathcad

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad k_2 = f(x_{i-1} + a_2 \cdot h, y_{i-1} + b_{21} \cdot h \cdot k_1)$$

Схема Эйлера - Коши

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot (\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2)$$

$$a_2 = b_{21} = 1 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$$

5. Составим программный блок для реализации метода Рунге-Кутты

```
diffRK(y0, a, b, N, f, a2, b21, σ1, σ2) :=  
  h ←  $\frac{b - a}{N}$   
  x0 ← a  
  y0 ← y0  
  for i ∈ 1..N  
    | xi ← xi-1 + h  
    | k1 ← f(xi-1, yi-1)  
    | k2 ← f(xi-1 + a2 · h, yi-1 + b21 · h · k1)  
    | yi ← yi-1 + h · (σ1 · k1 + σ2 · k2)  
    | Z<0> ← x  
    | Z<1> ← y  
  Z
```

6.Проводим тестирование программного блока

$$\underline{a} := -2$$

$$\underline{y0} := 4$$

$$y0 = 4$$

$$y0 = 4$$

$$N = 14$$

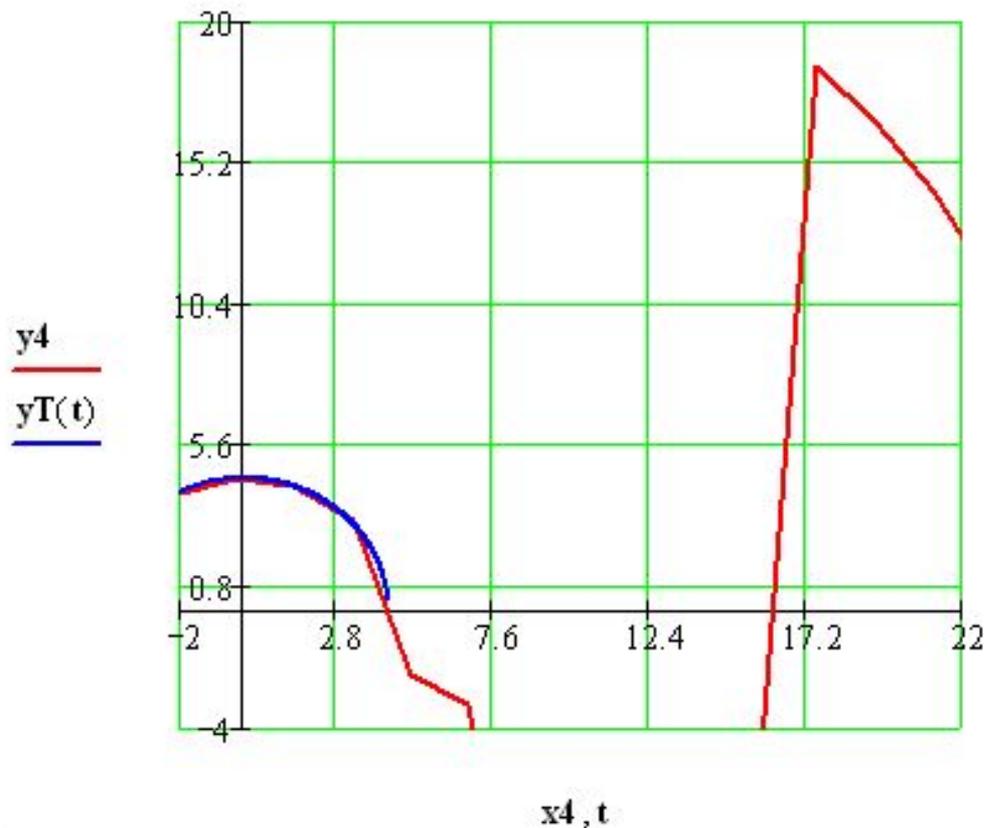
$$Z4 := \text{diffRK}(y0, a, b, N, D, 1, 1, 0.5, 0.5)$$

$$y4 := Z4^{(1)}$$

$$x4 := Z4^{(0)}$$

$$\underline{yT}(t) := \sqrt{20 - t^2}$$

$$a = -2$$



Для сравнения решений используются встроенные функции Mathcad $Rkadapt(...)$ и $rkfixed(...)$, в которых реализован метод Рунге-Кутты

$$a := 0$$

$$y0 := 100$$

$$y0 = 100$$

$$y0 = 100$$

$$N = 12$$

$$N := 12$$

$$Z4 := \text{diffRK}(y0, a, b, N, F1, 0.5, 0.6, 0.5, 0.5)$$

$$y4 := Z4^{(1)}$$

$$x4 := Z4^{(0)}$$

$$yT(t) := y0 e^{a \cdot t}$$

$$a = 0$$

$$Z5 := \text{Rkadapt}(y0, a, b, N, F1)$$

$$Z5 := \text{rkfixed}(y0, a, b, N, F1)$$

$$y5 := Z5^{(1)}$$

$$x5 := Z5^{(0)}$$

