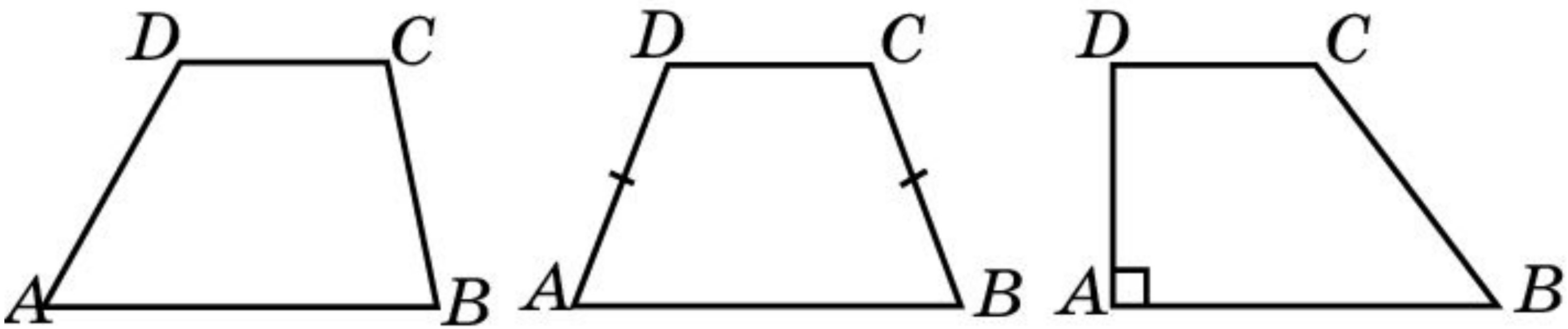
Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.



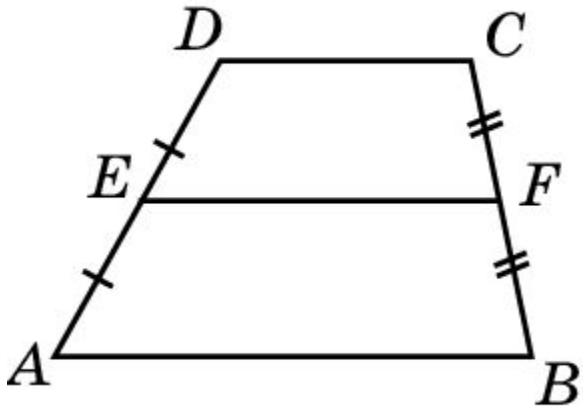
Параллельные стороны трапеции называются ее основаниями, а непараллельные стороны – боковыми сторонами.

Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

Трапеция называется прямоугольной, если один из ее углов прямой.

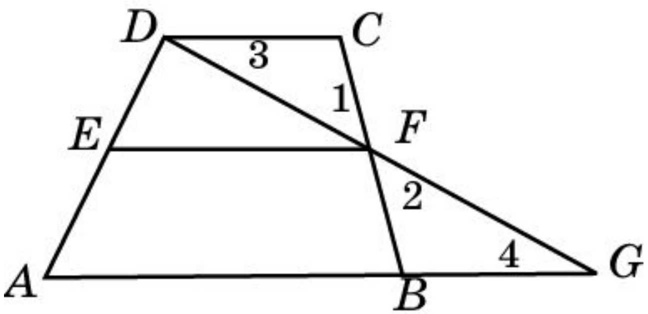
Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.



Теорема о средней линии трапеции

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Доказательство. Пусть EF – средняя линия трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Проведем прямую DF и ее точку пересечения с прямой AB обозначим G.

Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, угол 1 равен углу 2, как вертикальные, угол 3 равен углу 4, как накрест лежащие углы). Из равенства этих треугольников следует, что $DF = GF$ и, значит, EF - средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что EF параллельна AB и $EF = AG$. Так как $AB \parallel CD$, то EF будет параллельна обоим основаниям и кроме того, $EF = AG/2 = (AB + BG)/2 = (AB + CD)/2$.

Вопрос 1

Какой четырехугольник называется трапецией?

Ответ: Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Вопрос 2

Какие стороны трапеции называются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?

Ответ: а) Основаниями трапеции называются ее параллельные стороны;

б) боковыми сторонами трапеции называются ее непараллельные стороны.

Вопрос 3

Какая трапеция называется: а) равнобедренной; б) прямоугольной?

Ответ: а) Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны;

б) трапеция называется прямоугольной, если один из ее углов прямой.

Вопрос 4

Что называется средней линией трапеции?

Ответ: Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

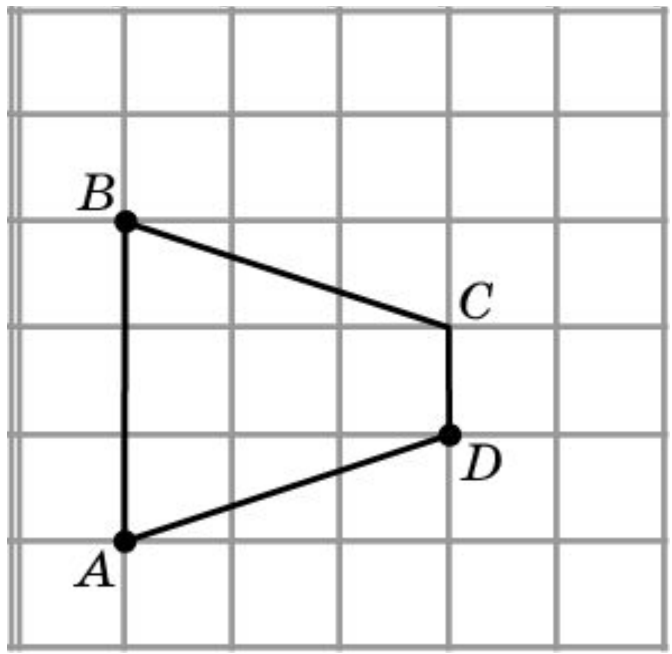
Вопрос 5

Сформулируйте теорему о средней линии трапеции.

Ответ: Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Упражнение 1

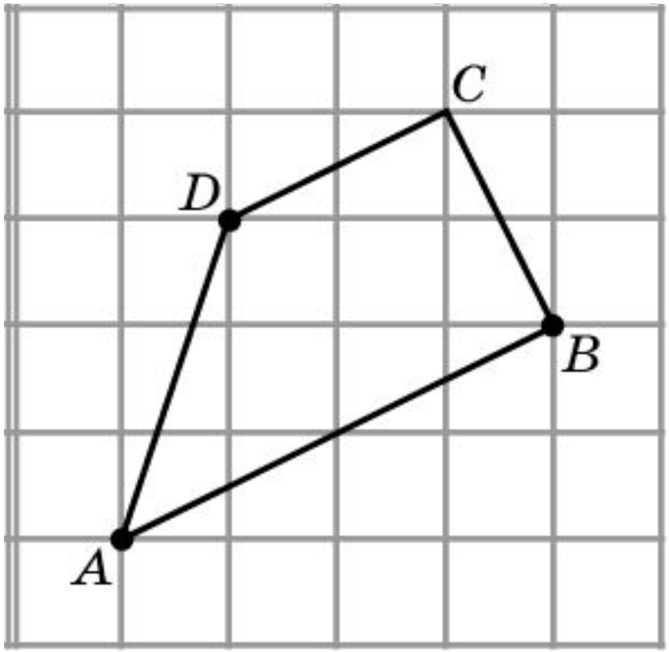
Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, три вершины которой даны на рисунке, а четвертая находится в одном из узлов сетки.



Ответ:

Упражнение 2

Изобразите прямоугольную трапецию $ABCD$, три вершины которой даны на рисунке, а четвертая находится в одном из узлов сетки.

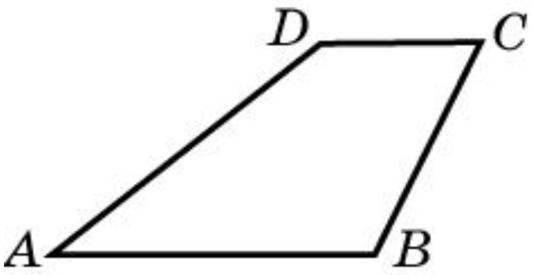


Ответ:

Упражнение 3

Могут ли углы, прилежащие к основанию трапеции, быть один острым, а другой тупым?

Ответ: Да.



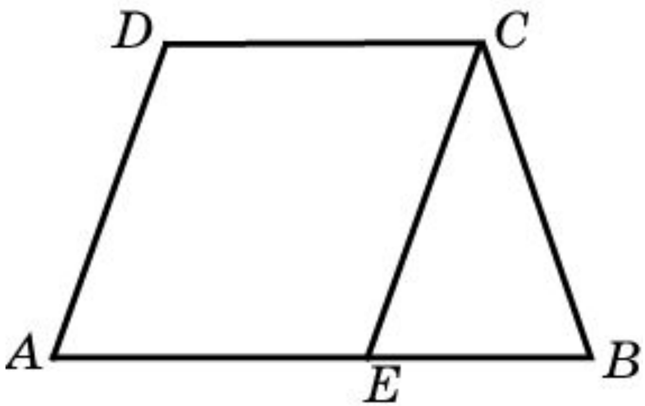
Упражнение 4

Может ли у трапеции быть: а) три прямых угла; б) три острых угла?

Ответ: а) Нет; б) нет.

Упражнение 5

Докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – трапеция, AD не параллельна BC. Докажем, что углы A и B равны.

Через вершину C проведем прямую, параллельную AD и обозначим E ее точку пересечения с прямой AB.

Четырехугольник $AECD$ – параллелограмм, следовательно, угол BAD равен углу BEC. Треугольник BCE – равнобедренный, следовательно, угол BCE равен углу BEC. Таким образом, в трапеции $ABCD$ угол A равен углу B.

Упражнение 6

Верно ли, что если два угла трапеции равны, то она равнобедренная?

Ответ. Нет, она может быть прямоугольной.

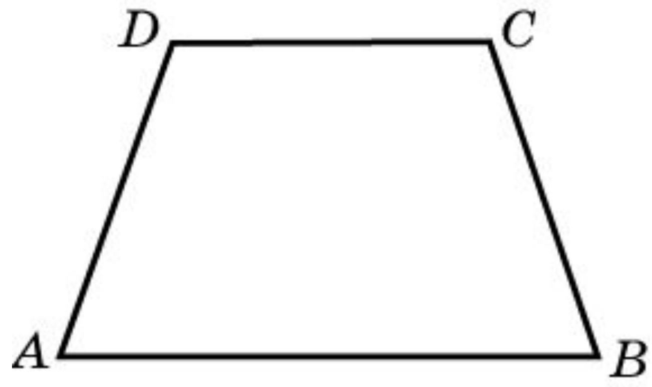
Упражнение 7

Верно ли, что если два угла при основании трапеции равны, то она равнобедренная?

Ответ. Да.

Упражнение 8

Докажите, что сумма двух противоположных углов равнобедренной трапеции равна 180°.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – трапеция, AD не параллельна BC. Докажем, что сумма углов A и C равна 180°. Действительно, Сумма углов B и C равна 180°. Угол A равен углу B. Следовательно, сумма углов A и C равна 180°.

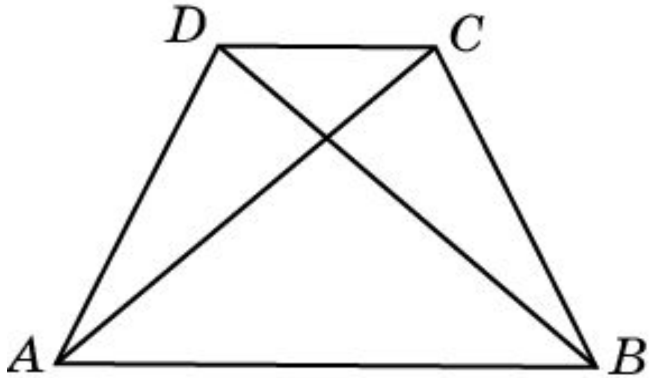
Упражнение 9

Чему равны углы равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40^{o}?

Ответ: 70^{o}, 110^{o}, 70^{o}, 110^{o}.

Упражнение 10

Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Треугольники ABC и BAD равны (AB – общая сторона, $BC = AD$, угол ABC равен углу BAD. Следовательно, $AC = BD$.

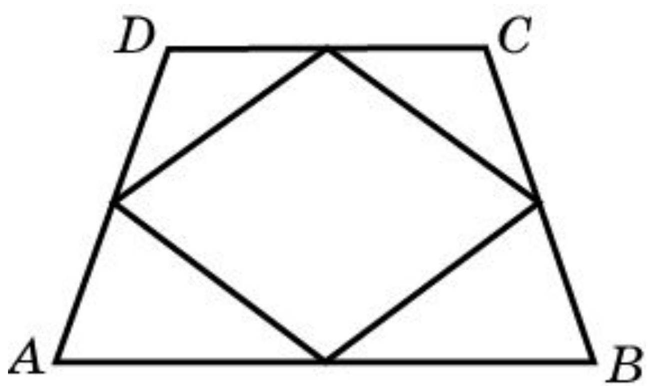
Упражнение 11

Верно ли, что если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная?

Ответ. Да.

Упражнение 12

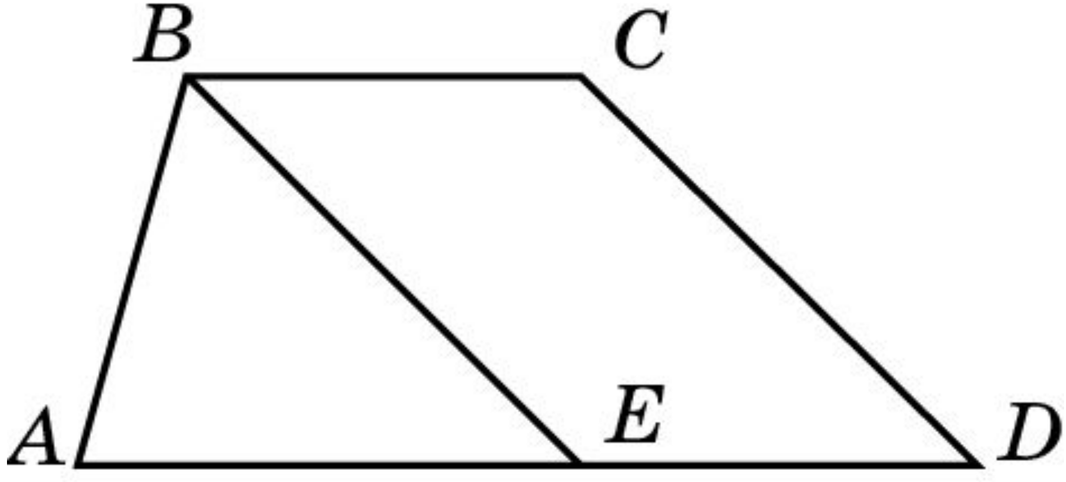
Определите вид четырехугольника, который получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон равнобедренной трапеции.



Ответ: Ромб.

Упражнение 13

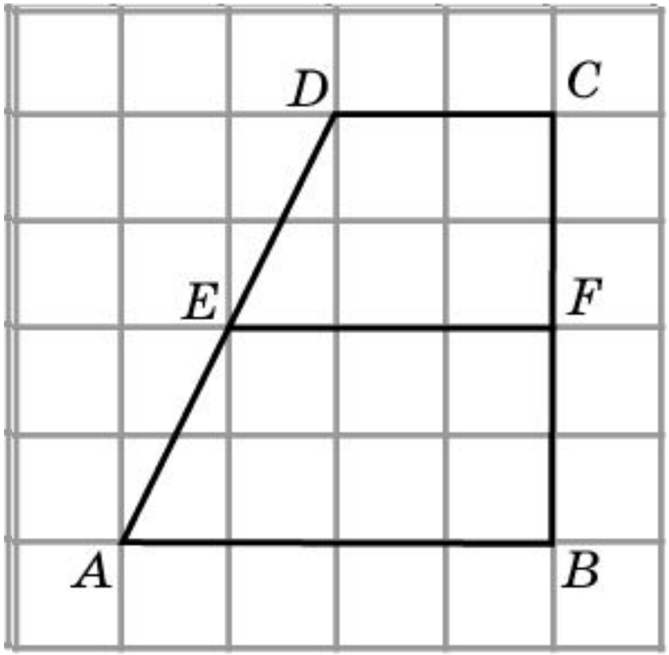
Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 3 см, отсекает треугольник, периметр которого равен 15 см. Найдите периметр трапеции.



Ответ: 21 см.

Упражнение 14

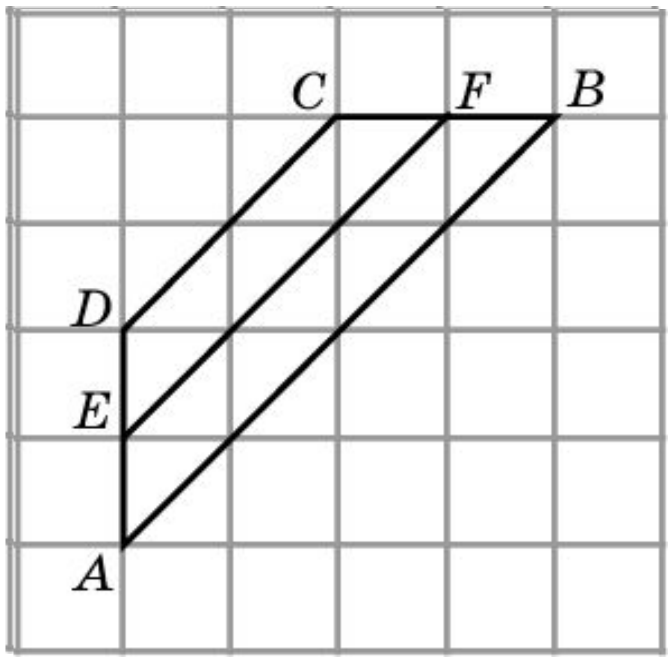
Проведите среднюю линию трапеции, изображенной на рисунке.



Ответ:

Упражнение 15

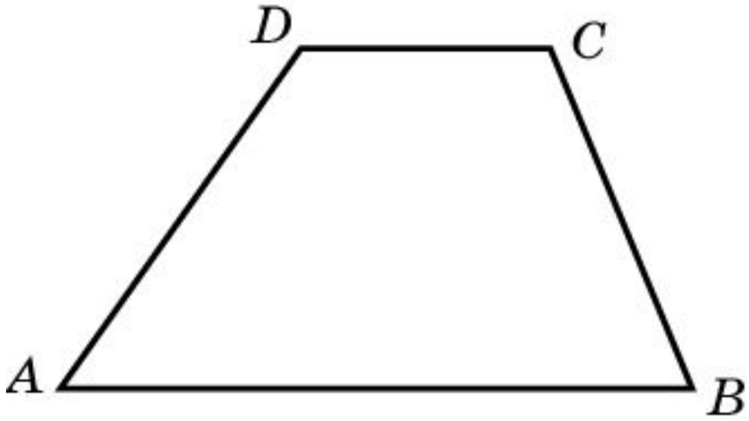
Проведите среднюю линию трапеции, изображенной на рисунке.



Ответ:

Упражнение 16

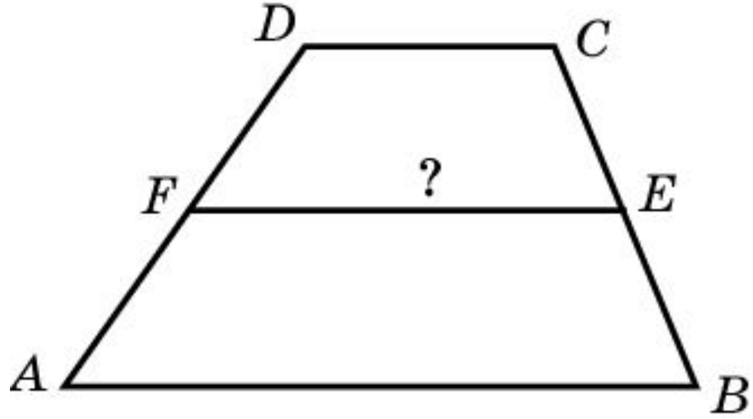
Основания трапеции относятся как 5:2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: 21 см.

Упражнение 17

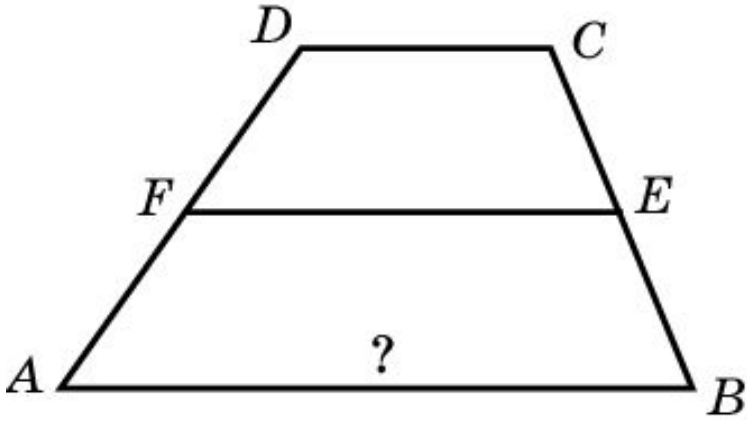
Периметр трапеции равен 50 см, а сумма непараллельных сторон равна 20 см. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: 15 см.

Упражнение 18

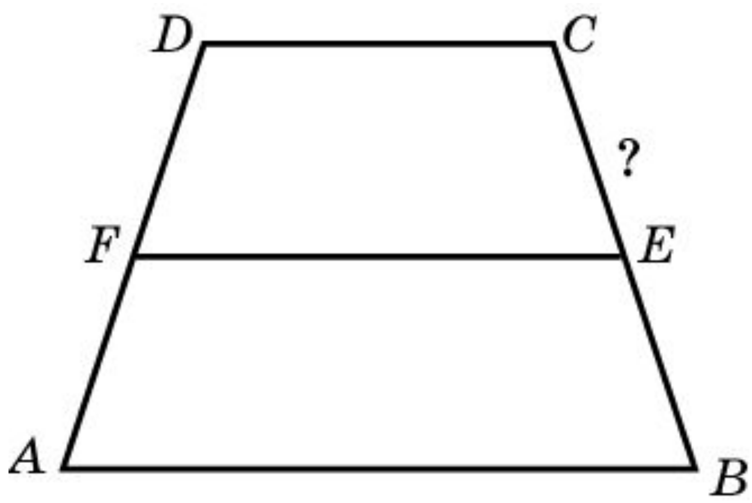
Средняя линия трапеции равна 30 см, а меньшее основание равно 20 см. Найдите большее основание.



Ответ: 40 см.

Упражнение 19

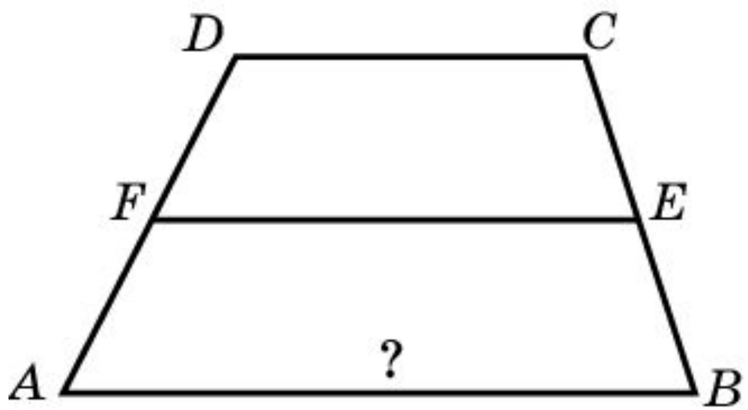
Периметр равнобедренной трапеции равен 80 см, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону данной трапеции.



Ответ: 20 см.

Упражнение 20

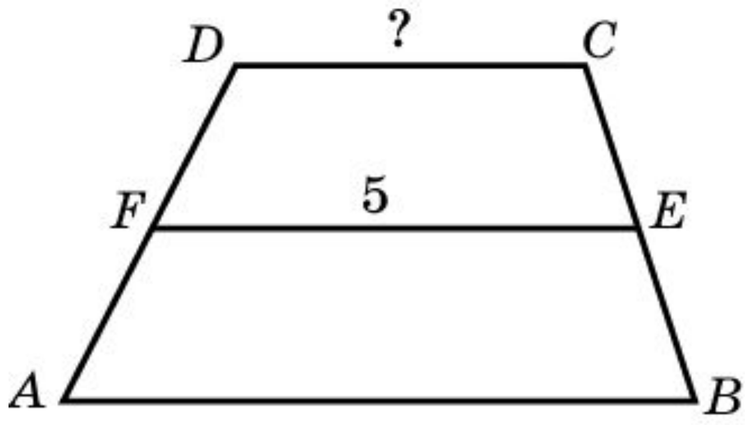
Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.



Ответ: 5 см и 9 см.

Упражнение 21

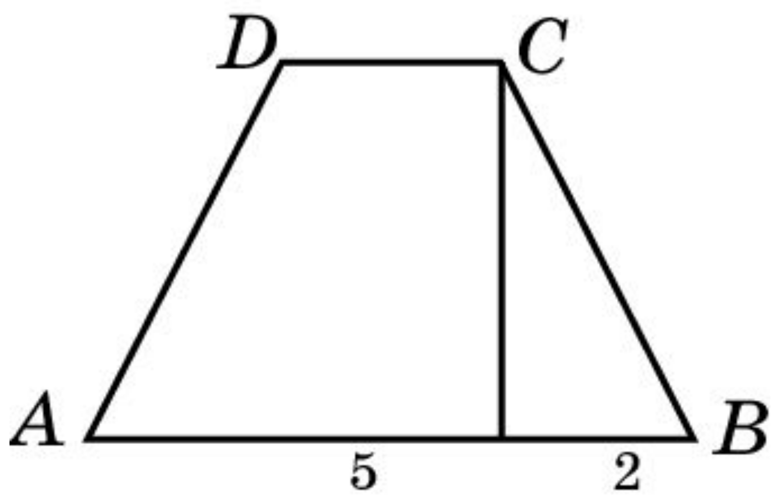
Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.



Ответ: 4 м и 6 м.

Упражнение 22

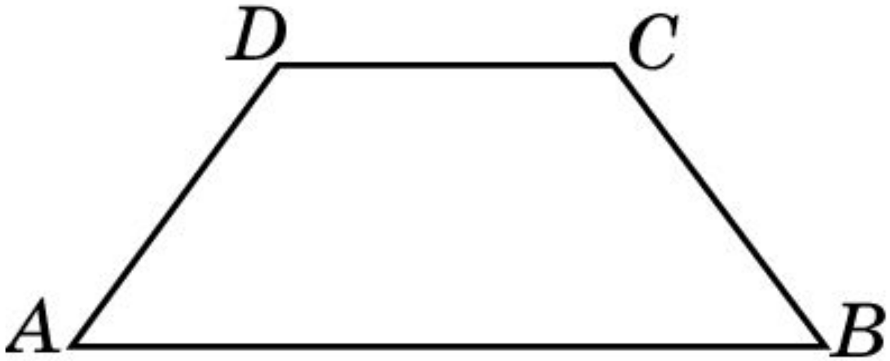
Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 5 см и 2 см. Найдите среднюю линию этой трапеции.



Ответ: 5 см.

Упражнение 23

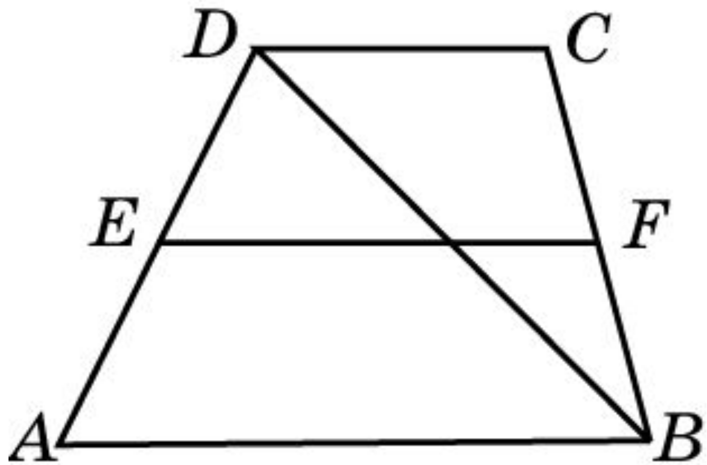
В равнобедренной трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.



Ответ: 1,7 м.

Упражнение 24

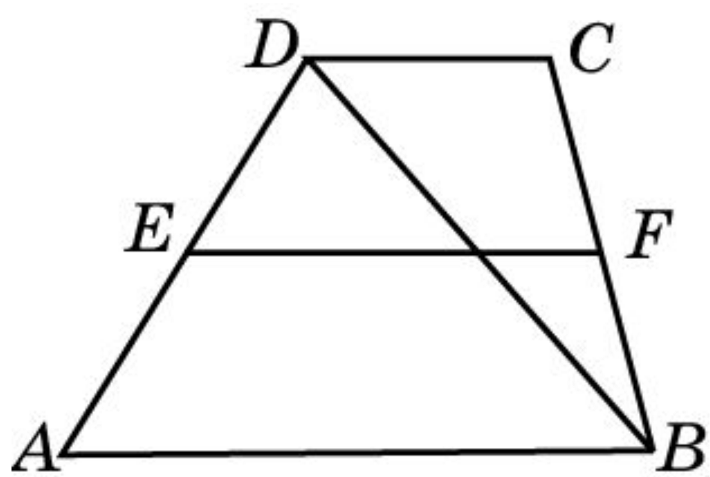
Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит ее на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания этой трапеции.



Ответ: 8 см и 12 см.

Упражнение 25

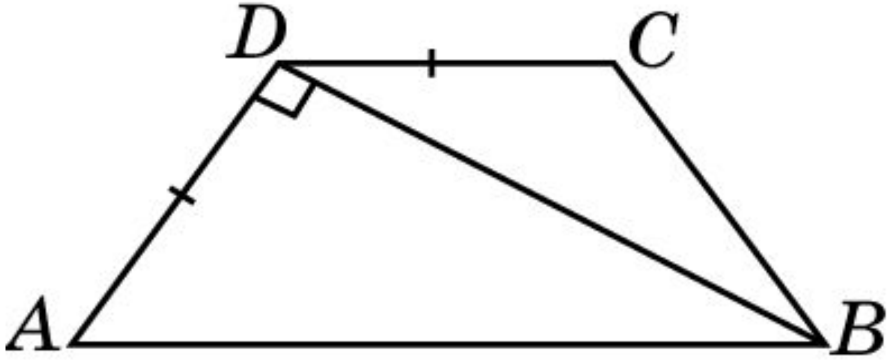
Основания трапеции равны 4 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



Ответ: 2 см и 5 см.

Упражнение 26

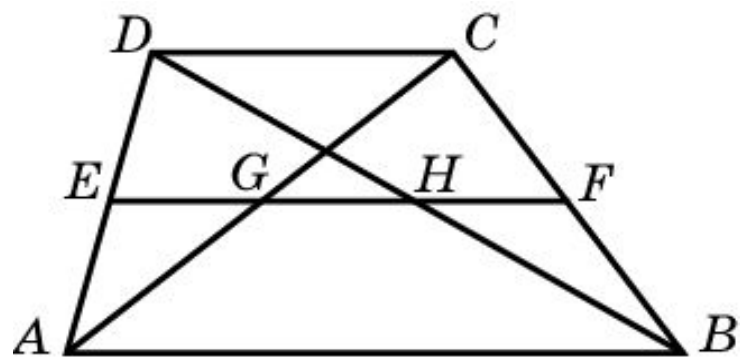
Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.



Ответ: 60^{o}, 120^{o}, 60^{o}, 120^{o}.

Упражнение 27*

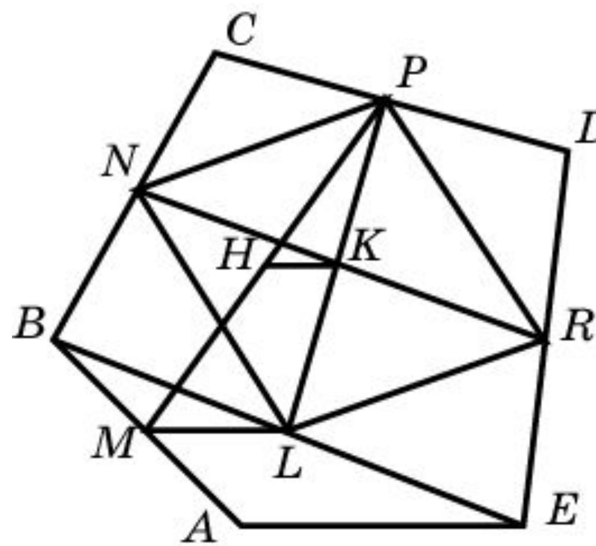
Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?



Решение: Нет. Действительно, пусть $ABCD$ – трапеция, EF – средняя линия, G, H – ее точки пересечения с диагоналями. Тогда EG – средняя линия треугольника ACD и, следовательно, равна половине CD. FH – средняя линия треугольника BCD и, следовательно, равна половине CD. Если бы точки G и H совпадали, то средняя линия EF была бы равна CD. В этом случае трапеция была бы параллелограммом.

Упражнение 28*

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AE = 4$. Середины сторон AB и CD, BC и ED соединены отрезками. Середины H и K этих отрезков снова соединены отрезками. Найдите длину отрезка HK.



Решение: Пусть M, N, P, R, L – середины соответствующих сторон. Тогда $HK = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{4}AE = 1$.