

# АТОМ РЕЗЕРФОРДА –

## БОРА

Томсон. Первая модель атома, - модель «пудинга с изюмом». Модель позволила объяснить существование линейчатых атомных спектров, хотя и не смогла дать толкование спектральным сериям. С момента предложения модели в 1898 г. до времени первой серьезной целенаправленной попытки ее проверки

прошло целых 13 лет.

Эксперимент, решивший судьбу «пудинга» выполнили в 1911 г. в знаменитой Кавендишской лаборатории по предложению Эрнста Резерфорда Гейгер и Марсден. Любопытно, что руководил этой лабораторией в период с 1884 по 1919г. сам Дж.Дж. Томсон.

Гейгер и Марсден поставили опыт по бомбардировке тонких фольг потоком альфа-частиц и по наблюдению их рассеяния.



Кавендишская лаборатория — физический факультет [Кембриджского университета](#).

Видимые вспышки на экране из  $ZnS$  – **сцинтилляции** при попадании в него альфа – частиц.

**Модель атома Томсона** → большая часть альфа-частиц пролетит прямо сквозь фольгу, оставшая испытает лишь небольшие отклонения. Такой характер рассеяния вытекал из томсоновской модели атома, в которой заряд равномерно распределен по объему, т.е. вещество является более или менее однородным, а следовательно нет причин для отклонения, а только для торможения.

**Эксперимент** → большинство альфа – частиц пролетают без отклонений, но наряду с этим часть из них отклоняется на очень большие углы, даже рассеивались в обратном направлении. Так как альфа – частицы довольно тяжелые (в 7 000 раз тяжелее электрона) и, кроме того, в эксперименте использовались альфа – частицы летящие с большой скоростью, то было ясно, **что заметное их отклонение могли вызвать только очень большие силы.** В модели Томсона на поверхности атома напряженность поля  $10^{13}$  В/м, для атома Резерфорда на поверхности ядра напряженность больше  $10^{21}$  В/м.

Для объяснения этих результатов Резерфорду пришлось представить атом в виде **крошечного ядра**, несущего положительный заряд и почти всю массу атома, и электронов, расположенных на некотором расстоянии от ядра. **Атом почти пустое пространство** большая часть альфа-частиц проходит сквозь фольгу не изменяя своей траектории. Когда же частица пролетает вблизи ядра, на нее действует сильное электрическое поле связанное с большой массой, следовательно - большая сила, и частица должна отклониться на большой угол. Атомные электроны будучи

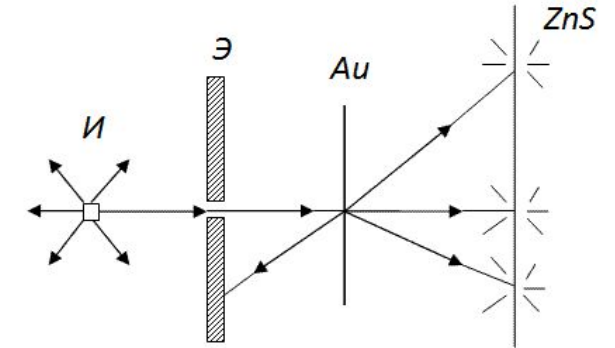
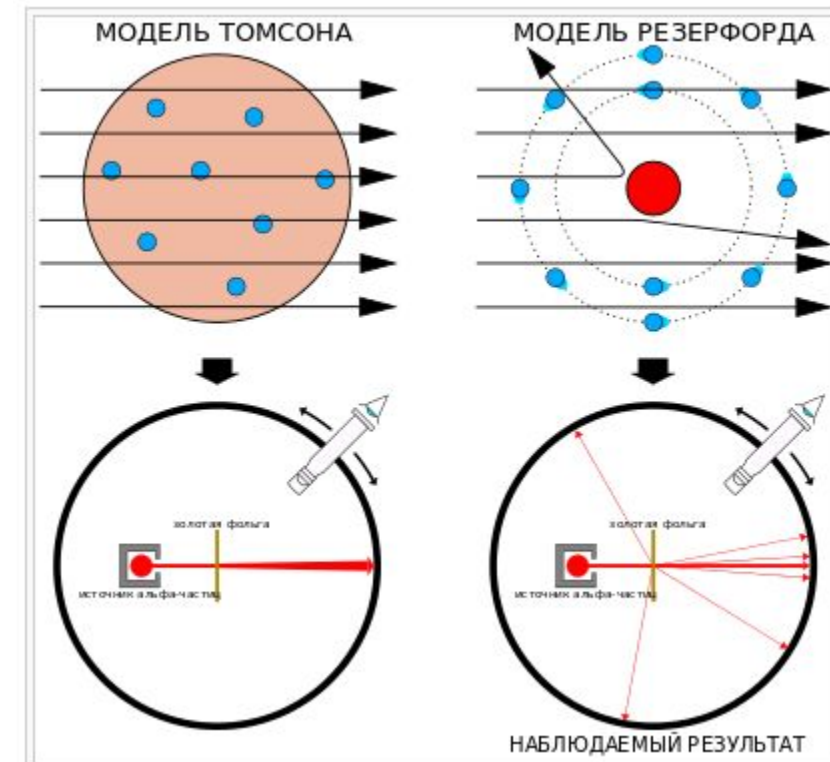


Схема опыта Гейгера и Марсдена. И - источник альфа-частиц; Э – свинцовый экран; Au - золотая фольга;  $ZnS$  - люминесцирующий слой.



# РАСSEЯНИЕ АЛЬФА – ЧАСТИЦ В ТОМСОНОВСКОЙ

## Влияние атомных

Рассмотрим лобовое столкновение между частицей массы  $M$  и начальной скоростью  $V$  и покоящейся частицей с массой  $m$ . Обозначим конечные скорости этих частиц после столкновения  $V'$  и  $U'$ , соответственно. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mU'^2; \quad \Rightarrow \quad M(\vec{V} - \vec{V}') = m\vec{U}'; \quad (P3)$$

$$M\vec{V} = M\vec{V}' + m\vec{U}'; \quad \Rightarrow \quad M(\vec{V} - \vec{V}')(\vec{V} + \vec{V}') = m\vec{U}'^2; \quad (P4)$$

Разделим (P4) на

$$(P3) \quad \vec{V} + \vec{V}' = \vec{U}'; \quad (P5)$$

$$(P3) \rightarrow \begin{cases} M(\vec{V} - \vec{V}') = m\vec{U}' \\ M(\vec{V} + \vec{V}') = M\vec{U}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(\vec{V} - \vec{V}') = m\vec{U}' \\ M(\vec{V} + \vec{V}') = M\vec{U}' \end{cases} \Rightarrow \vec{U}' = \frac{2M\vec{V}}{M+m};$$

$$m_p = 1836m_e; \quad m_n = 1839m_e; \quad M \approx 2(m_p + m_n) = 7350m_e \gg m_e;$$

$$\vec{U}' = 2\vec{V};$$

$$\Delta p = mU' \Rightarrow \Delta p = 2mV;$$

$$\Theta \approx \frac{\Delta p}{p} \text{ рад} = \frac{2mV}{3 \cdot 10^{-10} \cdot 7000} < 3 \cdot 10^{-4} = \dots \approx$$

$$\approx (200 \cdot 10^{-4})^\circ = 2 \cdot 10^{-2} = 0,02^\circ$$



Ганс Гейгер

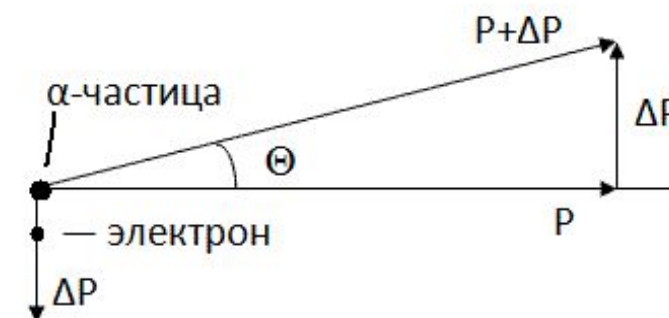


Эрнст Марсден

### Действие положительно заряженного облака

Будем полагать, что  $\alpha$ -частица проникает вглубь атома. Вне облака напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от его центра равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_R}{r^2}, \quad \text{где } Q_R \text{ — полный положительный заряд облака.}$$



Внутри облака оценим напряженность по теореме Гаусса, применим её к сфере радиуса  $r$ :  $\oint_{4\pi r^2} E dS = \frac{Q_r}{\epsilon_0}$ ;

$r < R$ :

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_r}{\epsilon_0}; \quad Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3; \quad \rho = \frac{Q_R}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{Q_R}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3; \quad \longrightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_R}{R^3} \cdot r; \quad E|_{r=R} = \max(E) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Если допустить, что альфа – частица сумеет добраться до центра такого атома, то при этом ее кинетическая энергия в электростатическом поле атома изменится на величину  $\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2$ ;

$\Delta W_1$  – изменение энергии внутри атома,

$\Delta W_2$  – вне атома.

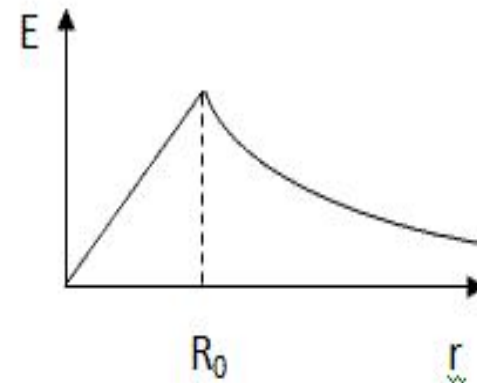
$$\Delta W_1 = 2e\Delta\varphi_1 = 2e \int_R^0 E dr = 2e \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} (-1) \int_R^0 r dr$$

$$\Delta W_1 = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Delta W_2 = 2e\Delta\varphi_2 = 2e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{2eQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = \frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$\cos(\vec{E}, d\vec{r})$

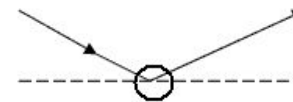


В точности такая же работа будет совершена электростатическими силами при удалении частицы от атома. При приближении эта работа уменьшит кинетическую энергию частицы, при удалении увеличит на точно такую же величину. Однако, и в том и в другом процессе будет происходить **изменение импульса в одну сторону** .

## Оценка изменения импульса

Будем считать, что:

1.  $\alpha$  – частица двигалась из бесконечно удаленной точки и достигла центра атома;
2. изменение импульса при скользящем ударе такое же, как при центральном.



$$\Delta W_{\text{кин}} = -\Delta W_{\text{эл}} = -W;$$

$$\frac{\Delta p^2}{2M} = \frac{p\Delta p}{M} = -\frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 R};$$

$$\frac{|\Delta p|}{p} = \frac{3eQ \cdot M}{4\pi\epsilon_0 R p^2} = \frac{3eQ}{4\pi\epsilon_0 R \left(\frac{p^2}{2M}\right) \cdot 2} = \frac{\Delta W_{\text{эл}}}{2W_{\text{кин}}};$$

Такое же изменение импульса произошло при удалении частицы, следовательно,

$$\Delta p_{\Sigma} = 2\Delta p.$$

$$\left| \frac{\Delta p_{\Sigma}}{p} \right| = \left| \frac{\Delta W_{\text{эл}}}{W_{\text{к}}} \right|.$$

Для всех известных в настоящее время ядер энергии  $\alpha$ - частиц лежат в  $4 \text{ МэВ} \leq W_{\text{к}} = W_{\alpha} \leq 9 \text{ МэВ}$ .

интервале  
Для рассеяния на золоте ( $Q=Ze=79e$ ,  $R=10^{-10} \text{ м}$ )

$$\frac{\Delta p_{\Sigma}}{p} = \theta = \frac{3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 80 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-10} \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4 \cdot 10^{-4}$$

$$\theta \approx 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10 = 57^{-4} \cdot 2 \cdot 10 = \text{град.}$$

# УЧЕТ МНОЖЕСТВЕННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Несмотря на то, что отклонение налетающей альфа – частицы как атомными электронами, так и положительным зарядом всего порядка одной минуты, возникает вопрос: «Не может ли последовательность таких отклонений привести к заметному углу рассеяния?».

Из статистического рассмотрения следует, что при среднем угле единичного рассеяния, равном  $\Theta$ , полное среднее отклонение равно  $\sqrt{N} \cdot \Theta$ .

Фольга в опытах Гейгера и Марсдена имела толщину порядка  $10^4$  атомных слоев. Исходя из модели Томсона и считая, что при прохождении одного слоя происходит в среднем отклонение на  $0.01^\circ$  (на электроне, или положительном заряде) И действительно, среднее отклонение, наблюдавшееся Гейгером и Марсденом составляло около  $1^\circ$ .

Однако, некоторая часть альфа – частиц отклонялась на углы, значительно превышающие  $1^\circ$ . На  $1^\circ$  и более рассеивалась одна из 8 000 частиц. Это был важнейший результат опытов.

Одна из 8000 может и не казаться очень впечатляющим числом, однако, для гауссова распределения случайной величины вероятность того, что произойдет суммарное отклонение большее некоторого угла  $\Theta$  при среднем отклонении  $\langle \theta \rangle$  равна

$$p(\geq \langle \theta \rangle) = \exp \left[ - \left( \frac{\Theta}{\langle \theta \rangle} \right)^2 \right].$$

Следовательно, вероятность того, что альфа – частица испытывает рассеяние на угол  $90^\circ$  и более, в модели Томсона составляет

$$\begin{aligned} p(\geq 90^\circ) &= \exp \left[ - \left( \frac{90}{1} \right)^2 \right] = \exp \left[ -90^2 \right] = e^{-8100} = 10^{-\lg e \cdot 8100} = \\ &= 10^{-0,434 \cdot 8100} = 10^{-3515}. \end{aligned}$$

**Расхождение теории с экспериментом составляет 3500 порядков!**

# ФОРМУЛА

# РЕЗЕРФОРДА

Гейгер и Марсден - 1909 г. Резерфорд - 1911 г. В течение двух лет Резерфорд не опубликовал ни одной работы. В 1911 г. он пришел к новой модели атома, состоявшей из маленького массивного положительно заряженного ядра с находящимися вокруг него электронами. В рамках кулоновского взаимодействия  $\alpha$  - частиц с атомным ядром им была выведена формула, получившая название формулы Резерфорда.

Кулоновское взаимодействие – центральное – т.е. силы между частицами направлены вдоль соединяющей их линии. Для поля центральных сил в случае, если начало координат/т.е. точка, из которой проводятся радиусы – векторы/ помещено в центр поля, справедливо соотношение

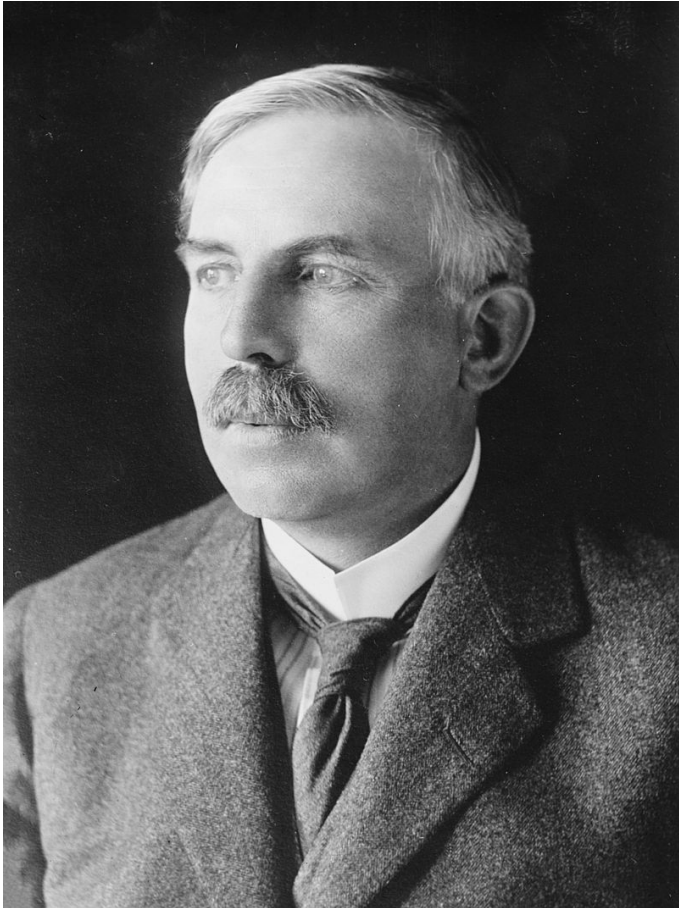
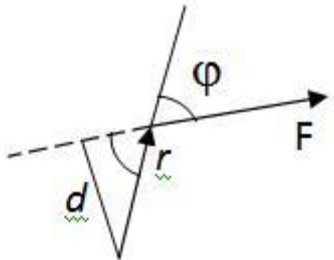
$$\vec{F}(\vec{r}) = e_r f(r),$$

$e_r$  – орт радиуса – вектора,  $f(r)$  – модуль центральной силы. Для силы отталкивания  $f(r) > 0$

В общем случае момент силы определяется как  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ . В

нашем случае (см. рис.), в силу  $\sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) = 0 \Rightarrow \vec{N} = 0$ .

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}, \quad \vec{M} = \text{const.}$$



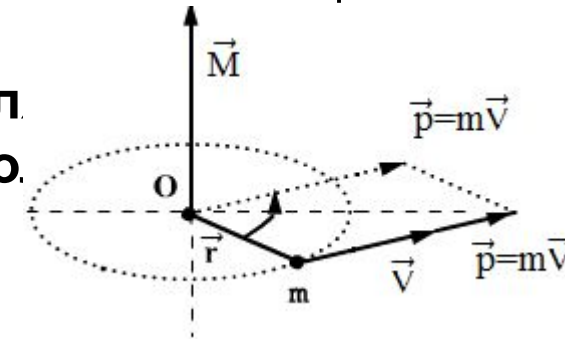
**Эрнест Резерфорд**  
Ernest Rutherford (1871-1937)  
[Нобелевская премия по химии](#) 1908 г. «за проведённые исследования в области распада элементов в химии радиоактивных веществ».



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = \text{const.}$$

$\vec{M}$  в каждый момент времени перпендикулярен векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , образующим векторное произведение, перпендикулярен к плоскости, определяемой этими векторами. Т.к.  $\vec{M}$  остается постоянным, то постоянной оказывается и плоскость содержащая векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , поскольку одна точка этой плоскости фиксирована – это начало координат и поэтому невозможно смещение плоскости параллельное самой себе.

**При движении в поле центральных сил траектория частицы представляет собой плоскую кривую, причем эта плоскость проходит через центр по.**



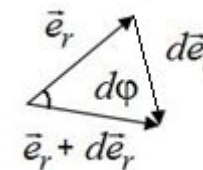
Найдем выражение для момента импульса в полярных координатах, в которых положение точки характеризуется радиус  $r$  вектором  $\vec{r}$ , или расстоянием до точки  $r$  и полярным углом  $\phi$  - для плоского движения.

## Выражения для кинетической энергии и момента импульса в полярных координатах.

Скорость точки  $\vec{v}(r, \phi) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$ ;  
 радиальная составляющая  $\dot{r} \vec{e}_r$  ; тангенциальная составляющая  $r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$

Поскольку единичный вектор не может изменяться по величине, а только по направлению, то модуль вектора  $\vec{e}_r$  равен единице  $d\vec{e}_r = -\vec{e}_\phi d\phi$ . Учтя, что  $d\vec{e}_r = -\vec{e}_\phi d\phi$

Таким образом, тангенциальная составляющая скорости  $\vec{v}_\phi = r \frac{d\vec{e}_r}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{e}_\phi = r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$ ,



где вектор  $\vec{e}_\phi$  перпендикулярен  $\vec{e}_r$  и направлен в сторону приращения  $\vec{e}_r$ .

Таким образом

$$\vec{V} = \dot{r} e_r + r \dot{\varphi} e_\varphi. \quad \vec{V}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2);$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m [\vec{r}, \vec{V}] = m [\vec{r}, \dot{r} e_r] + m [\vec{r}, r \dot{\varphi} e_\varphi] = m r \dot{\varphi} [\vec{r}, e_\varphi].$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m r^2 \dot{\varphi} e_z.$$

0

$e_z$  - орт, перпендикулярный плоскости, содержащей траекторию.

# ДВИЖЕНИЕ АЛЬФА – ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ

Заряд ядра равен  $+Ze$ , масса альфа – частицы  $m$ , заряд альфа – частицы  $2e$  кулоновская энергия их взаимодействия

$$U = \frac{2ze^2}{r}.$$

Законы сохранения энергии и момента импульса, в полярных координатах:

$$E = \frac{2ze^2}{r} + \frac{m}{2}(r^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \text{const};$$

$$M_{\text{И}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const};$$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_{\text{И}}}{mr^2};$$

$$r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{M_{\text{И}}}{mr^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi};$$

$$E - \frac{2ze^2}{r} = \frac{m}{2} \left[ \frac{M_{\text{И}}^2}{m^2 r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \frac{M_{\text{И}}^2}{m^2 r^4} \right] = \frac{M_{\text{И}}^2}{2mr^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{M_{\text{И}}^2}{2mr^2};$$

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2m}{M_{\text{И}}^2} \left[ E - 2\frac{ze^2}{r} - \frac{M_{\text{И}}^2}{2mr^2} \right] = \frac{2mE}{M_{\text{И}}^2} - \frac{2m \cdot 2ze^2}{M_{\text{И}}^2 r} - \frac{1}{r^2};$$

Введем новую переменную  $\rho = \frac{1}{r}$ ;  $r = \frac{1}{\rho}$ ;

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = -r^2 \frac{d\rho}{d\varphi};$$

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{r^4} \cdot r^4 \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2;$$

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{M_{\text{и}}^2} - \frac{2m \cdot 2ze^2}{M_{\text{и}}^2 r} - \frac{1}{r^2}; \quad \rightarrow \quad \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{M_{\text{и}}^2} - \frac{2m \cdot 2ze^2}{M_{\text{и}}^2 r} - \frac{1}{r^2};$$

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{M_{\text{и}}^2} - \frac{2m \cdot 2ze^2}{M_{\text{и}}^2} \rho - \rho^2;$$

Продифференцируем еще раз  
по  $\phi$

$$2 \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{4mZe^2}{M_{\text{и}}^2} \frac{d\rho}{d\varphi} - 2\rho \frac{d\rho}{d\varphi};$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} \left[ \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -2 \frac{mZe^2}{M_{\text{и}}^2} - \rho \right];$$

$$1) \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = 0; \quad \rho = \text{const.}$$

$$2) \quad \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -2\frac{mZe^2}{M^2} - \rho; \quad \leftarrow \text{неоднородное уравнение}$$

$$\rho = c = -2\frac{mZe^2}{M^2}; \quad \leftarrow \text{частное решение неоднородного уравнения = решению 1)}$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0; \quad \leftarrow \text{Общее решение однородного уравнения} \quad \rho = B \cos \varphi + \sin \varphi;$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$\rho = c + A \cos \varphi + B \sin \varphi; \quad c = -2\frac{mZe^2}{M^2};$$

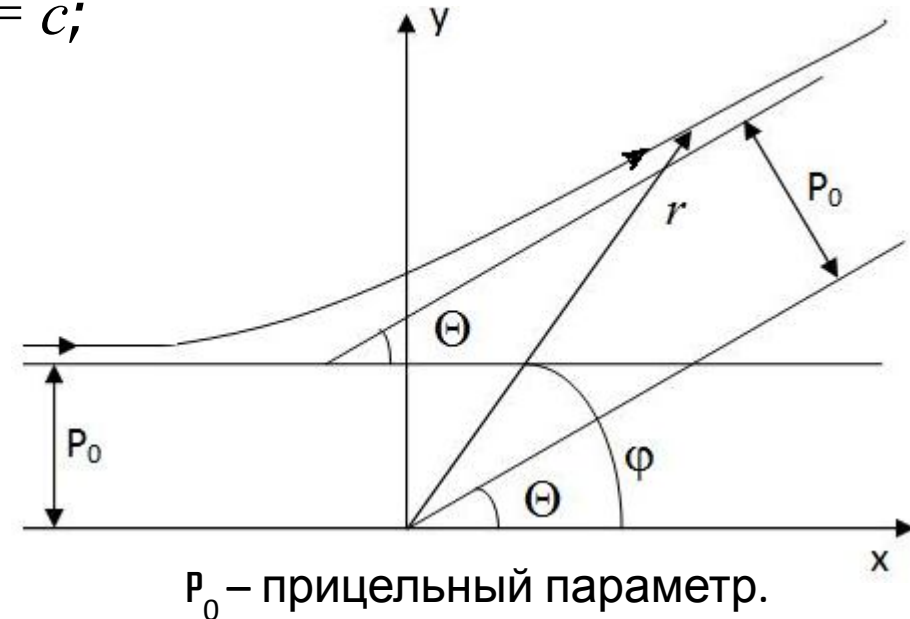
В аналитической механике показывается что траектория является

При  $\varphi \rightarrow \pi$  гиперболой.  $r \rightarrow \infty$  и  $\rho = 0$ ;  $0 = c + A \cos \pi + B \sin \pi; \quad \leftarrow A = c;$

$$\rho = c(1 + \cos \varphi) + B \sin \varphi; \quad (P55)$$

$$B = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \left( \frac{1}{r \sin \varphi} - c \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right);$$

$$B = \frac{1}{p_0} - c \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{p_0} - c \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{p_0} - 0 = \frac{1}{p_0}.$$



Угол рассеяния равен  $\Theta$ . При  $r \rightarrow \infty$  возможны два случая:  $\phi \rightarrow \pi$  и  $\phi \rightarrow \Theta$ . Исключим  $\phi \rightarrow \pi$ , тогда из (P55) найдем угол рассеяния  $\Theta$ .

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho = \lim_{r \rightarrow \infty} c(1 + \cos \phi) + B \sin \phi \Big|_{\phi \neq \pi} = c(1 + \cos \theta) + \frac{1}{p_0} \sin \theta = 0;$$

$\Theta = \pi$ , удовлетворяет этому уравнению, но оно нас не интересует, тогда для  $\Theta \neq 0$  получаем

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{1}{cp_0}; \quad \text{ctg} \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{cp_0}.$$

$$c = -\frac{2mZe^2}{M_{\text{И}}^2}; \quad \text{ctg} \frac{\theta}{2} = -\frac{M_{\text{И}}^2}{2mZe^2 p_0};$$

Из чертежа видно, что при  $\phi \rightarrow \pi$

$$M = m \left| \left[ \overset{\boxtimes}{r}, \overset{\boxtimes}{V} \right] \right| = m \underset{p_0}{\overset{\boxtimes}{k}} \cdot \underset{p_0}{\overset{\boxtimes}{\sin \phi}} \underset{p_0}{\overset{\boxtimes}{V}} = p_0 m V = \text{const};$$

$$\text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{p_0^2 m^2 V^2}{2mZe^2 p_0} = \frac{p_0 m V^2}{2Ze^2} = \frac{\left( \frac{mV^2}{2} \right)}{\left( \frac{Ze^2}{p_0} \right)} = \frac{W_k}{W_{\Pi}(p_0)}.$$

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\left( \frac{Ze^2}{p_0} \right)}{\left( \frac{mV^2}{2} \right)} = \frac{W_{\Pi}(p_0)}{W_k}.$$

$$p_0 \text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2Ze^2}{mV^2} \cdot \frac{\theta}{2};$$

Результат качественно такой же как для модели Томсона, однако, отличие состоит в том, что при прицельном параметре стремящемся к нулю,  $\Theta \rightarrow \pi$ . То есть мы наблюдаем рассеяние альфа-частиц назад на единственном ядре, в то время как в модели Томсона такие процессы исключены даже при многократном рассеянии!

# ЭФФЕКТИВНОЕ СЕЧЕНИЕ

## РАССЕЯНИЯ

Представим себе сферу, в центре которой расположена рассеивающая фольга  $F$ .

Пусть на этот листок в единицу времени падает  $N_0$  альфа-частиц.

Воспользуемся тем, что в единицу времени падает  $N_0$  альфа-частиц. Рассмотрим элемент площади сферического кольца имеет стороны  $Rd\theta$  и  $Rd\varphi$ , поэтому

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi; \quad \rightarrow \quad d\Omega^{(2)} = \frac{dS}{R^2} = \sin\theta d\theta d\varphi;$$

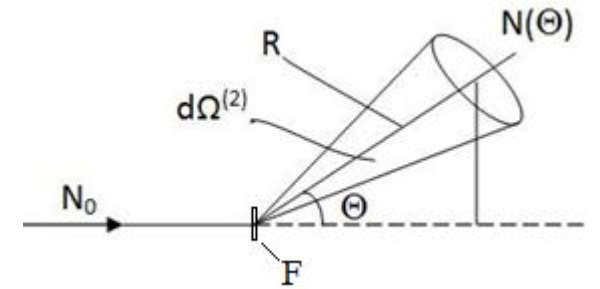
Телесный угол, соответствующий всему сферическому кольцу получится интегрированием по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ .

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta;$$

Положим, что до рассеяния  $\alpha$ -частицы летят параллельным пучком. Обозначим площадь поперечного сечения пучка  $S$ .  $n$  – число атомов в единице объема фольги,  $d$  – толщина фольги. Количество атомов рассеивающей фольги на пути пучка будет

$$N_p = n \cdot S \cdot d.$$

Если  $\alpha$ -частицы распределены равномерно по сечению пучка и число их очень велико (что имеет место на самом деле), то доля  $\alpha$ -частиц, пролетающих вблизи одного из ядер по траектории с прицельным параметром от  $\rho_0$  до  $\rho_0 + d\rho_0$  (и, следовательно, отклоняющихся на углы от  $\Theta$  до  $\Theta + d\Theta$ ), будет равно отношению площади покрытой кольцами к полной площади сечения пучка.



Переобозначим  $p_0 \rightarrow p$ .

$$\frac{dN_{\Theta}}{N} = \frac{\overbrace{n \cdot S \cdot a}^{\substack{\text{число колец или} \\ \text{число атомов}}} \cdot \overbrace{2\pi r dr}^{\substack{\text{площадь} \\ \text{кольца}}}}{S} = 2\pi n a r dr;$$

$dN_{\Theta}$  - поток частиц, рассеиваемых в пределах  $\Theta \div \Theta + d\Theta$ .

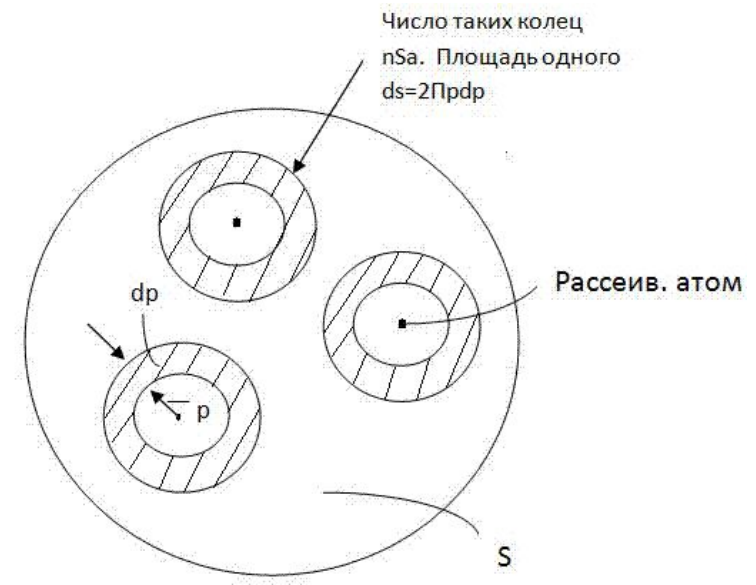
$N$  - полный поток частиц в пучке сечением  $S$ .

$$p \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{2Ze^2}{mV^2}; \quad dp = -\frac{2Ze^2}{mV^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \frac{d\Theta}{2};$$

$$\frac{dN_{\Theta}}{N} = 2\pi n a \cdot \frac{2Ze^2}{mV^2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{2Ze^2}{mV^2} \cdot \frac{(-1)}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \frac{d\Theta}{2};$$

Физически, «-» обусл  $\downarrow \Theta$  при  $\uparrow p_0$ , поэтому далее его не пишем.

$$\frac{dN_{\Theta}}{N} = 2\pi n a \left( \frac{2Ze^2}{mV^2} \right)^2 \frac{\operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} \frac{d\Theta}{2};$$





$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2}}{\sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin \frac{\Theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2}} = \frac{2 \cos \frac{\Theta}{2} \cdot \sin \frac{\Theta}{2}}{2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} = \frac{\sin \Theta}{2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}};$$

$$\frac{dN_{\Theta}}{N} = 2\pi n\alpha \left( \frac{2Ze^2}{mV^2} \right)^2 \frac{\sin \Theta}{2 \sin^4 \frac{\Theta}{2}} \frac{d\Theta}{2} = n\alpha \left( \frac{2Ze^2}{mV^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \Theta d\Theta}{4 \sin^4 \frac{\Theta}{2}};$$

$2\pi \sin \Theta d\Theta$  есть телесный угол  $d\Omega$ , в пределах которого заключены направления, соответствующие углам рассеяния от  $\Theta$  до  $\Theta+d\Theta$ .

$$\frac{dN_{\Theta}}{N} = n\alpha \left( \frac{2Ze^2}{mV^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{4 \sin^4 \frac{\Theta}{2}};$$

Формула

Резерфорда

Блестяще подтвердились все предсказания Резерфорда - зависимость дифференциального сечения от: угла рассеяния; толщины фольги, энергии альфа-частицы. Справедливость резерфордовской теории означает, что альфа-частицы с энергиями до **1 МэВ не проникают в область положительного заряда**. Оценка расстояния, на которое приближается альфа-частица к ядру может быть произведена из условия:

$$W_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} v^2}{2} = \frac{2ze^2}{r_{\min}}; r_{\min} = \frac{2ze^2}{W_{\alpha}}; W_{\alpha} = 1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}; \frac{2 \cdot 50 \cdot (5 \cdot 10^{-10})^2}{1.6 \cdot 10^{-6}} = \frac{100 \cdot 25 \cdot 10^{-20}}{1.6 \cdot 10^{-6}} = 1500 \cdot 10^{-14} = 1.5 \cdot 10^{-11}$$

$$W_\alpha = \frac{m_\alpha v^2}{2} = \frac{2ze^2}{r_{\min}}; \quad r_{\min} = \frac{2ze^2}{W_\alpha}; \quad W_\alpha = 1\text{MeV} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{erg};$$

$$\alpha \in \text{U} \quad 4.8 \cdot 10^{-10} \text{e};$$

$$Z_{\text{золота}} = 79;$$

$$r_{\min} = \frac{2 \cdot 80 \cdot (4.8 \cdot 10^{-10})^2}{4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-6}} = \frac{160 \cdot 23 \cdot 10^{-20}}{6.4 \cdot 10^{-6}} = 575 \cdot 10^{-14} = 5.75 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Это верхняя граница радиуса ядра при использовании альфа - частиц определенной энергии.

Справедливость этой теории также означает **справедливость закона Кулона** для заряженных частиц на расстояниях порядка  $10^{-12}$  см. Однако, при увеличении энергии альфа частиц до величин порядка 10 МэВ и более формула Резерфорда **перестает быть справедливой**. Это означает, с одной стороны, что предположения, лежащие в основе ее вывода становятся неправильными. Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что размеры ядра не превышают  $10^{-12}$  см. Сравнивая с размерами атома  $\sim 10^{-8}$  см, получаем следующую наглядную картинку: если увеличить ядро до размера в 1 см, то электроны будут находиться от него на расстоянии  $10^4 \text{ см} = 100 \text{ м}$ . Таким образом, атом представляет собой **практически «пустое» пространство** (заполненное ЭМП).

Радиус ядра, измеренный современными методами  $\approx 7,3 \cdot 10^{-13}$  см.

## Проблемы модели

Результаты опытов по рассеянию альфа – частиц свидетельствуют в пользу ядерной модели атома  $r_{\min} \ll r_{\text{атома}} = 10^{-8}$

Однако, эта модель, предложенная Резерфордом, оказалась в противоречии с законами классической механики и электродинамики. Согласно механике и электростатике, система неподвижных зарядов не может находиться в устойчивом состоянии. По этой причине Резерфорду пришлось отказаться от статической модели и предположить, что электроны движутся вокруг ядра по эллиптическим или круговым орбитам. Однако, такое движение является ускоренным а значит, электроны при таком движении должны излучать электромагнитные волны мощностью:

$$I = \frac{2e^2 a^2}{3c^3};$$

Ускорение «а» находится из условия равномерного движения по окружности:

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}; \quad a = \frac{V^2}{r} = \frac{e^2}{mr^2};$$
$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{e^4}{m^2 r^4} = \frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 c^3 r^4} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-10})^6}{3 \cdot (10^{-27})^2 \cdot (3 \cdot 10^{10})^3 \cdot (10^{-8})^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = 3 \cdot 10^{10} \quad / .$$

Учитывая, что энергия электрона в атоме  $W_k \sim 10$  эВ., время существования такого образования  $\sim 10^{-9}$ с, а если учесть

возрастание ускорения при приближении электрона к ядру  $\sim 10^{-16}$ с. Предсказания ЭМ-теории всегда подтверждались

экспериментально, однако, атомы не «схлопываются». Это противоречие может означать только: **законы физики,**

**которые справедливы в макроскопическом мире, уже не имеют силы в микроскопическом мире атома.**

# ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ КРУГОВЫХ

## ОРБИТ

Первым оценил ядерную гипотезу устройства атома Нильс Бор. Он предположил, что размеры атома определяются квантами. До этого как в теории Планка, так и в работах Эйнштейна кванты всегда ассоциировались с энергией. **Бор же проквантовал механический момент.** В науке мало случаев, чтобы вновь созданная теория могла бы получить определенное число (в нашем случае – постоянную Ридберга) только из известных величин, не привлекая на помощь никакой дополнительной постоянной. Планк сумел определить постоянную Стефана – Больцмана и постоянную в законе смещения Вина, а Бор получил, исходя из постулата Планка, условие для стационарных орбит, согласно которому осуществляются только те состояния гармонического осциллятора, энергия которых равна  $nh\nu$ ,...

Введем обозначения:

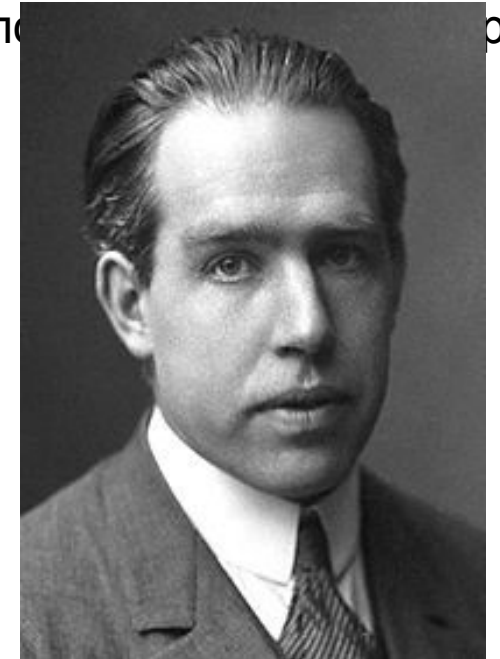
$q$  - координата осциллятора;  $p$  – импульс.

Полная энергия осциллятора равна сумме потенциальной и кинетической энергии:

$$E_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2};$$

$$F = -kx; \quad ma = -kx; \quad \ddot{m}x + kx = 0; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}; \quad k = m\omega^2.$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2};$$



**Нильс Хёнрик Давид Бор**

(*Niels Henrik David Bohr* [1885](#), — [1962](#),  
— [датский физик-теоретик](#),

один из создателей современной физики.

Лауреат [Нобелевской премии по физике \(1922\)](#)

«за заслуги в исследовании строения атомов и испускаемого ими излучения».

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = n\hbar\omega;$$

$$\frac{p^2}{2mn\hbar\omega} + \frac{q^2}{\left(\frac{2n\hbar\omega}{m\omega^2}\right)} = 1;$$



Каноническое уравнение эллипса \*

Координатная плоскость  $q, p$  называется фазовой плоскостью, а кривая на данной плоскости, определяющая  $p$  как функцию  $q$  называется фазовой траекторией. Из \* следует, что фазовой траекторией гармонического осциллятора является эллипс.

Полуоси эллипса равны  $a = \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}; b = \sqrt{2mn\hbar\omega};$

Площадь эллипса

$$S = \pi ab = \oint pdq;$$

$$\oint pdq = \pi \sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}} \sqrt{2mn\hbar\omega} = 2\pi n\hbar.$$

$$\oint pdq = 2\pi n\hbar.$$



# ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ И ОБОБЩЕННЫЕ

## ИМПУЛЬСЫ

Минимальное число независимых величин любой размерности, задание которых необходимо для однозначного определения положения системы, называется **числом ее степеней свободы  $s$** ;

Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат (длин, углов, площадей и так далее), которые определяют положение механической системы в пространстве. В качестве примера можно указать на сферические координаты частицы:  $r, \theta, \phi$ .

Вообще, любые величины  $q_k$ ,  $k=1,2,\dots,s$  задание которых в количестве, равном числу степеней свободы, однозначно определит положение тела в пространстве, носят название **обобщенных координат**. Декартовы координаты представляют частный случай обобщенных координат.

Первые производные по времени от обобщенных координат, то есть величины называются **обобщенными скоростями системы**.

**Закон движения системы** дается  $s$  уравнениями вида  $q_k(t)$  время.

В системах с бесконечным числом степеней свободы (сплошные среды, физические поля), обобщенными координатами являются особые функции пространственных координат и времени, называемые **потенциалами, волновыми функциями** и т. д.

**Обобщенные импульсы** – физические величины, определяемые соотношениями

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{или} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

где  $T$  – **кинетическая энергия системы**, а  $L$  – **функция Лагранжа системы**:  $L=T-P$ , выраженные через обобщенные скорости и обобщенные координаты.

Из \* следует, что от выбора обобщенных координат (а в этом выборе есть большой произвол), мы получаем и разный набор обобщенных импульсов сопряженных обобщенным координатам.

Например, если в  $q_i$  является декартовой координатой

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left[ \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] = mv_i - \text{компонента импульса.}$$

Если же в качестве обобщенной координаты выбран угол  $\varphi_i$ , то сопряженным обобщенным импульсом оказывается момент импульса:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial \left( \frac{J\omega_i^2}{2} \right)}{\partial \omega_i} = J\omega_i = mr_i^2 \cdot \omega_i = mr_i \cdot r_i \omega = r_i \cdot m_i v_i - \text{компонента момента импульса.}$$

Как обобщенные координаты, так и обобщенные импульсы могут иметь самую различную размерность. Однако, размерность их произведения всегда оказывается размерностью действия:

$$[p \cdot q] = \left[ q \cdot \frac{Tt}{q} \right] = [Tt].$$

Бор распространил правило квантования осциллятора на другие физические системы, понимая под  $q$  обобщенную координату, а под  $p$  – обобщенный импульс. Для электрона, движущегося по круговой орбите, естественно взять в качестве обобщенной координаты азимутальный угол  $\varphi$ , тогда обобщенным импульсом будет момент импульса  $M$ .

$$\oint p dq = 2\pi n \hbar \quad \rightarrow \quad \oint M d\varphi = M \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi M = 2\pi n \hbar;$$

$$M = n \hbar.$$

Из всех орбит электрона, возможных с точки зрения классической механики, осуществляются только те, для которых момент импульса равен целому кратному постоянной Планка

# БОРОВСКАЯ ТЕОРИЯ ВОДОРОДОПОДОБНОГО

## АТОМА

Рассмотрим электрон, движущийся в поле атомного ядра с зарядом  $Ze$ . Водородоподобный атом, у которого удалены все электроны кроме одного. Только что было показано, что в таком атоме возможны только те орбиты, для которых момент импульса электрона

$$m_e v r = n \hbar,$$

Число  $n$  называется главным квантовым числом.

Уравнение движения для данной системы – Второй закон Ньютона имеет вид:

$$v = \frac{n \hbar}{m_e r}, \quad m a = m \frac{v^2}{r} = \frac{z e^2}{r^2};$$

$$m \left( \frac{n \hbar}{m_e r} \right)^2 \frac{1}{r} = \frac{z e^2}{r^2};$$

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e z e^2} \cdot n^2; \quad n=1,2,3,\dots \quad (\text{Б24})$$

В атоме возможны только орбиты из дискретной последовательности (Б24). Радиус орбиты для  $n=1$  называется радиусом первой боровской орбиты и равен

$$r_B = r_0 = a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e z e^2} = 0,529 \text{ \AA}.$$



Полная энергия электрона в атоме есть сумма кинетической и потенциальной энергий

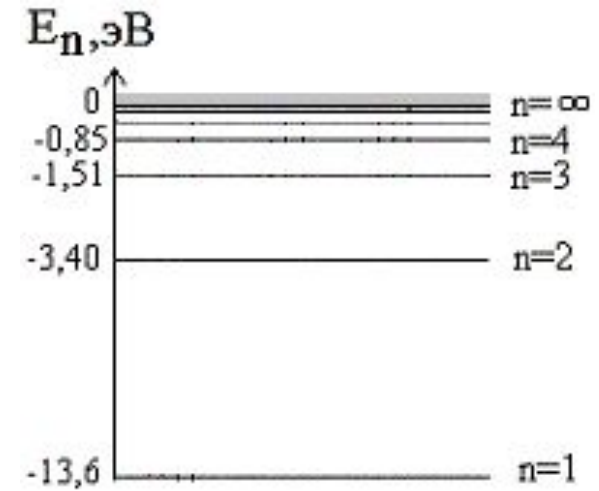
$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{Ze^2}{r};$$

Для электрона равномерно вращающегося вокруг ядра по окружности радиусом  $r$  согласно второму закону Ньютона :

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2}; \quad \longrightarrow \quad \frac{mV^2}{2} = \frac{Ze^2}{2r};$$

$$E = -\frac{Ze^2}{2r}; \quad r_n = \frac{\hbar^2}{m_e z e^2} \cdot n^2;$$

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2};$$



При переходе атома водорода из состояния с энергией  $E_n$  в состояние с энергией  $E_m$  излучается квант света

$$E_n - E_m = \hbar\omega = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right);$$

$$\omega = \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^3} \cdot \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad n > m \quad \longleftarrow \quad \text{Обобщенная формула Бальмера}$$

Полученные выше соотношения для радиусов стационарных орбит, значения энергий стационарных состояний и следующая из них формула для энергий квантов прекрасно согласовались с экспериментом но коренным образом противоречили классической физике. Они были объединены Бором в **ПОСТУЛАТЫ**.

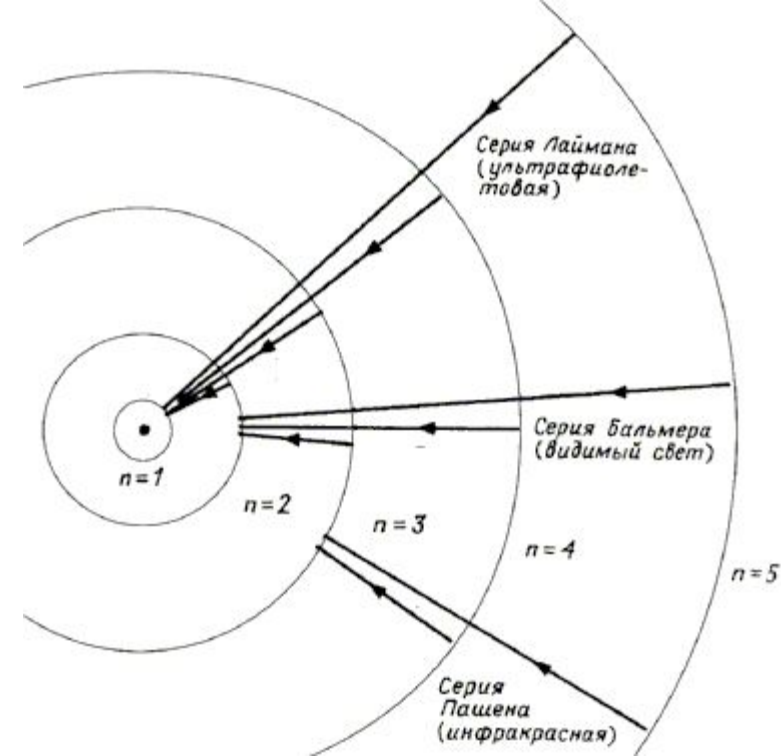
# Постулаты

Бора

1. Из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики 1.1. осуществляются только некоторые дискретные орбиты, удовлетворяющие условию квантования механического момента; 1.2. электрон, находящийся на одной из этих орбит, несмотря на то, что он движется с ускорением, не излучает ЭМВ (орбиты являются стационарными устойчивыми состояниями) 1.3. Энергии этих стационарных состояний образуют дискретный спектр:

2. Излучение испускается или поглощается в виде светового кванта энергии

при переходе электрона из одного стационарного устойчивого состояния в другое. Величина светового кванта равна разности энергий стационарных состояний, между которыми совершается квантовый скачок электрона.



## КОМБИНАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП РИТЦА (установлен эмпирически Вальтером Ритцем в 1908)

Все многообразие спектральных линий какого-либо элемента может быть представлено через комбинации неких величин, получивших название *термы*. Спектроскопическое волновое число каждой спектральной линии можно выразить через разность двух термов:

СЛЕДСТВИЕ: Разность волновых чисел двух спектральных линий одной и той же серии атома дает волновое число спектральной линии какой-то другой спектральной серии того же атома.

Рассмотрим две спектральные линии одной серии:

$$\bar{\nu}_{21} = T_{n_2} - T_{n_1}; \quad \bar{\nu}_{31} = T_{n_3} - T_{n_1} \quad \leftarrow \text{ Два перехода на уровень } n_1$$

$$\bar{\nu}_{31} - \bar{\nu}_{21} = T_{n_3} - T_{n_2} = \bar{\nu}_{32} \quad \leftarrow \text{ Переход на уровень } n_2$$

# Сравнение теории Бора с экспериментом

1. Был получен экспериментальный спектр атомарного водорода, все наблюдающиеся спектральные серии.

$$R_{\omega} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3};$$

2. Было получено выражение для постоянной Ридберга через мировые константы:  
 Постоянная Ридберга по Бору  $R_{\nu} = 109736.807 \text{ см}^{-1}$  Экспериментальное значение  $R_{\nu} = 109677.581 \text{ см}^{-1}$

3. Объяснена природа сплошного спектра, примыкающего к коротковолновой границе серии – он соответствует переходу электронов из локализованных в пределах атома состояний в свободные состояния – не связанные с атомами. Вычислена энергия перехода электрона из основного в свободное состояние:

$$E = \hbar \omega = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2};$$

Теоретическое значение:  $E = 13.527 \text{ эВ}$ .

Экспериментальное значение:  $13.55 \text{ эВ}$ .

4. Была выяснена природа комбинационного принципа Ритца.

# ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ ТЕОРИИ БОРА

## Достоинства

Объяснила [дискретность](#) энергетических состояний [водородоподобных атомов](#).

- Подошла к объяснению внутриатомных процессов с принципиально новых позиций, стала **первой** полуквантовой теорией атома.
- Эвристическое значение теории Бора состоит **предположении о существовании стационарных состояний и скачкообразных переходов между ними**. Эти положения позднее были распространены и на другие [микросистемы](#).
- **Объясняет границу таблицы Менделеева**. Последний атом, способный существовать физически, имеет порядковый номер 137, так как, начиная со 138-го элемента 1s-электрон должен двигаться со сверхсветовой скоростью, что противоречит специальной теории относительности.

## Недостатки

- Не смогла объяснить [интенсивность](#) спектральных линий.
- Справедлива только для водородоподобных атомов и не работает для атомов, следующих за ним в [таблице Менделеева](#).
- Логически противоречива: не является ни классической, ни квантовой. В системе двух уравнений, лежащих в её основе, одно — уравнение движения [электрона](#) — классическое, другое — уравнение квантования орбит — квантовое.

# ОПЫТ ФРАНКА И

## ГЕРЦА

Существование дискретных атомных энергетических уровней было подтверждено экспериментально прямыми опытами выполненными немецкими физиками Джэймсом Франком и Густавом Герцем в 1913-1917 г. г. Схема их установки, зависимость потенциальной энергии электрона от координаты и экспериментальная вольт-амперная характеристика приведены на рисунке слева.

Давление в трубке с парами ртути было порядка 1 мм Hg.

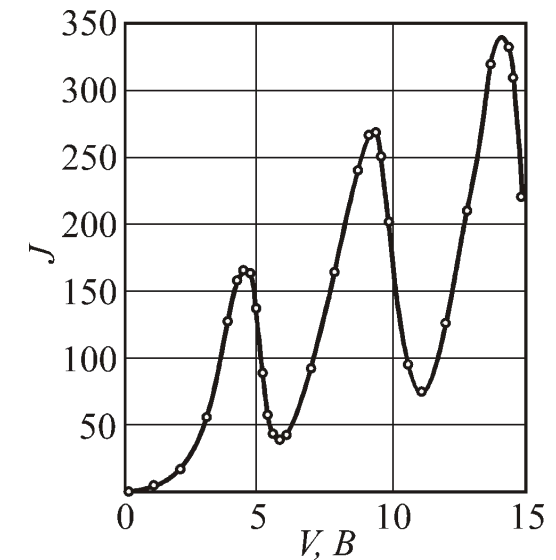
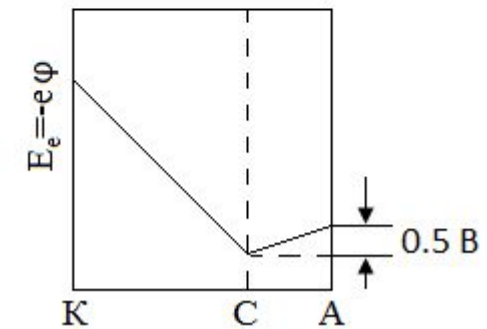
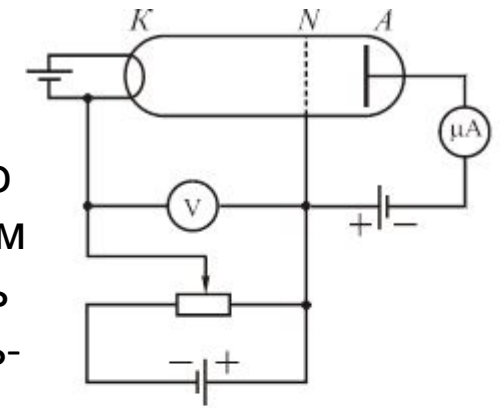
Максимумы тока наблюдались при значениях напряжения 4.9 В, 9.8 В, 14.7 В и т.д.

Ход кривой объясняется дискретностью энергетических уровней ртути, вследствие которой атомы могли воспринимать энергию только порциями:

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1; \quad \Delta E_2 = E_3 - E_1; \quad \Delta E_3 = E_4 - E_1 \dots,$$

где  $E_1, E_2, E_3, \dots$  — энергии первого, второго, третьего и т. д. стационарных состояний.

До тех пор пока энергия электронов недостаточна для возбуждения атома, т.е. меньше величины  $\Delta E_1$ , соударения происходят упруго, и, поскольку масса электрона много меньше массы атома, энергия электрона практически не меняется, ток нарастает с увеличением потенциала. Когда энергия электрона, приобретаемая в промежутке катод-сетка достигает значения  $\Delta E_1$ , соударения становятся неупругими. Электрон передает атому энергию  $\Delta E_1$  и продолжает движение с меньшей скоростью. Их энергии может не хватить для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер 0.5 эВ и они захватываются



Атомы, получившие энергию  $\Delta E_1 = 4.9 \text{ эВ}$ , переходят в возбужденное состояние, из которого они спустя время порядка

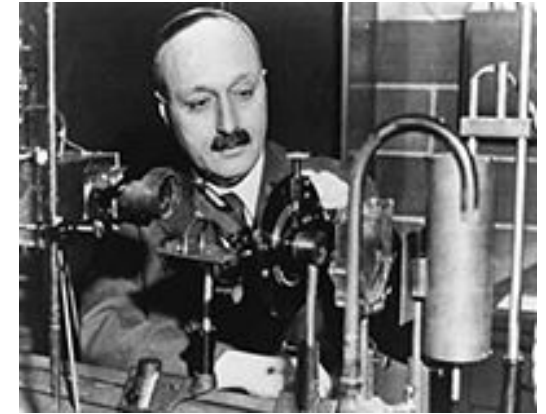
переходят в основное состояние, излучая фотон энергии  $\Delta E_1$ . Свечение возбуждаемых паров ртути

Франк и Герц обнаружили, что для возбуждения линии излучения ртути  $2536 \text{ \AA}$  необходимы электроны с энергией  $4.9 \text{ эВ}$ , а фотон с энергией  $4.9 \text{ эВ}$  имеет длину волны  $2536 \text{ \AA}$ . Если энергия электрона больше  $9.8 \text{ эВ}$ , электрон после первого столкновения может снова набрать энергию  $4.9 \text{ эВ}$  и испытать повторное столкновение. При ускоряющем напряжении  $14.7 \text{ В}$  электрон может испытать трехкратное неупругое столкновение.

Если пары ртути достаточно разрежены, то значительная часть электронов без соударений может в электрическом поле приобрести кинетическую энергию  $6.7 \text{ эВ}$  – второй потенциал возбуждения для ртути. Возможными

становятся спады анодного тока при сумме первого и второго потенциалов и т.д.

Таким образом, в опытах Франка и Герца непосредственно обнаруживается существование дискретных энергетических уровней у атомов.



Густав Людвиг Герц (*Gustav Ludwig Hertz*; [1887-1975](#)), лауреат [Нобелевской премии по физике 1925 г.](#) «за открытие законов соударения электрона с атомом»? (совместно с [Джеймсом Франком](#)). Лауреат [Сталинской премии \(1951\)](#). Племянник знаменитого [Генриха Герца](#)

Джеймс Франк (*James Franck*; [1882](#) - [1964](#)) [Нобелевский лауреат по физике 1925 г.](#) «за открытие законов соударения электрона с атомом» (совместно с [Густавом Людвигом Герцем](#))

к15л090415

# ПРИНЦИП

## СООТВЕТСТВИЯ

Микромир не поддается контролю со стороны наших органов чувств и подчиняется законам квантовой физики.

Макромир контролируется нашими органами чувств и подчиняется законам классической физики.

Макромир «сделан» из частичек микромира но живет по своим законам?! – ПРОТИВОРЕЧИЕ.

Из него можно выйти, если показать, что **законы микромира должны плавно переходить в законы классической физики** для тех пространственных масштабов, для которых справедливость последних подтверждена экспериментально.

ПРИМЕР:  $v \ll c$ ;  $v \sim c$ .

Покажем, что при устремлении кванта действия к нулю квантовые законы  классические.  
Законы классической физики явно справедливы для расстояний

1 см.

$$1 \text{ см} = r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \cdot n^2 = r_B \cdot n^2; \quad n \geq \sqrt{\frac{r_1}{r_B}} \approx \sqrt{10^8} = 10^4;$$

Квантовые законы должны переходить в классические при больших ( $>1000$ ) квантовых числах .

Бор. 1923

г.

**Любая новая теория, претендующая на более глубокое понимание физической реальности и на более широкую область применимости, чем предыдущая, должна включать последнюю как предельный случай!**

# ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ И АТОМ

БОРА

КЛАССИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

ЧАСТОТЫ

Согласно электродинамике, электрон, движущийся по круговой орбите должен излучать ЭМВ с частотой равной частоте его обращения вокруг ядра. Вычислим по классическим правилам частоту обращения на квантовой орбите с главным квантовым числом  $n$ .

$$v = \omega r; \quad \omega = \frac{v}{r} \gg \frac{v_n}{r_n};$$

$$r_n = \frac{\hbar^2}{m_e z e^2} \cdot n^2; \quad M_n = n \hbar; \quad M_n = m v_n r_n; \quad m v_n r_n = n \hbar; \quad v_n = \frac{n \hbar}{m r_n};$$
$$v_n = \frac{n \hbar}{m_e \frac{\hbar^2}{m_e z e^2} \cdot n^2} = \frac{z e^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{n};$$
$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n} = \frac{m_e z^2 e^4}{\hbar^3 n^3}; \quad \boxed{\omega_{\text{кл}} = \frac{m_e z^2 e^4}{\hbar^3 n^3};}$$

БОРОВСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

ЧАСТОТЫ

В действительности таких огромных атомов ( $n \sim 10000$ ,  $r \sim 1$  см) по крайней мере в конденсированных средах нет, постольку поскольку их энергия отличалась бы от энергии свободного электрона на столь малую величину, что практически любое тепловое движение привело бы к ионизации атома. Однако в вакууме с помощью современных лазерных методик существование атомов с размерами порядка 1 мм наблюдалось экспериментально. Какую же частоту должен излучать такой атом в соответствии с теорией Бора?



$$\omega = \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^3} \cdot \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$m = n - p; \quad \omega = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \cdot \left( \frac{1}{(n-p)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{2np - p^2}{n^2 (n-p)^2} \right);$$

Рассмотрим случай  $n \gg 1$ ;  $p \sim 1$ , тогда приближенно можно записать:  $2np - p^2 \approx 2np$ ;  $n^2 (n-p)^2 \approx n^4$ ;

$$P = 1 \quad Z = 1$$



$$\omega_B \approx \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{2np}{n^4} \right) = \frac{m_e e^4}{\hbar^3 n^3} p; \quad = \quad \boxed{\omega_{кл} = \frac{m_e Z^2 e^4}{\hbar^3 n^3};}$$

При  $p=1$ ,  $Z=1$  классическая и боровская частоты совпадают.

Частота, получаемая по классической формуле отличается от квантовой при квантовом числе = 2 почти на 300%, **В ТО ВРЕМЯ КАК ПРИ N=10000 – всего на 0.01 %**

# УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ

ЯДРА

$$m_p = 1836m_e;$$

Вращающийся вокруг ядра электрон притягивает к себе ядро, что заставляет его двигаться, естественно изменяя полную энергию атома.

Рассмотрим замкнутую классическую систему из двух взаимодействующих частиц. Положение частиц в некоторой инерциальной системе отчета характеризуется радиус-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ . Массы частиц  $m$  и  $M$ , соответственно. Силы взаимодействия, вследствие однородности пространства не могут зависеть от  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  только от разности  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , поскольку в выборе центра масс существует произвол.

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\rho);$$

$$M\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}(\rho);$$

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}(\rho) \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right);$$

$$\ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}(\rho);$$

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \text{ - приведенная масса.}$$

Таким образом, **вместо движения двух** частиц, мы можем формально рассматривать движение воображаемой **частицы с приведенной массой в поле той же центральной силы**. Повторяя все рассуждения Бора для этой воображаемой частицы, мы приходим к боровским формулам, в частности для энергии этой частицы, где вместо массы электрона **будет стоять приведенная масса**. Энергия этой частицы есть энергия атома с учетом движения ядра. Из ее определения видно, что в случае тяжелых ядер поправка вносимая при ее введении, окажется очень мала.

Обратим теперь внимание на то, что из всех инерциальных систем отсчета, в которых можно описывать положение наших тел, одна имеет определенное преимущество. Эта система, связанная с центром масс системы тел.

Центр масс определяется из условия

$$\vec{R}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}; \quad \longrightarrow \quad \vec{R}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}; \quad *$$

Вследствие сохранения импульса для замкнутой системы центр масс движется с постоянной скоростью, что становится, очевидно, при дифференцировании \* по времени. Таким образом, система отсчета, связанная с центром масс оказывается инерциальной, а положив  $\vec{R}_c = 0$ , и, из \* получаем

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1;$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2; \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \left( -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 \right) = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1;$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12};$$

Значит, обе частицы **движутся синхронно**, с одной частотой, и расщепления линии не следует ожидать. Каково же будет её смещение?

В модели неподвижного ядра

$$\omega_0 = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

При учёте движения ядра

$$\omega = \frac{\mu_e e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

Учет движения ядра приводит к исчезновению небольшого, но вполне определенного расхождения в теоретическом и экспериментальном значениях постоянной Ридберга.

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\mu}{m_e} = \frac{m_e M}{m_e (m_e + M)} = \frac{M}{m_e + M} = \frac{M + m_e}{M + m_e} - \frac{m_e}{M + m_e} = 1 - \frac{1}{1837} = \alpha$$

$$\alpha = 1 - 0.0005446 = 0.9994554.$$

$$R_{M \text{ теор}} = 109736.807 \text{ }^{-1}; \quad R_{M \text{ эксп}} = 109677.581 \text{ }^{-1}; \quad \alpha R_{M \text{ теор}} = 109677.04 \text{ }^{-1};$$

ОТКРЫТИЕ  
ДЕЙТЕРИЯ

$$\omega_H = \frac{\mu_H e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad \omega_D = \frac{\mu_D e^4}{2\hbar^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_H} = \frac{\omega_H}{\omega_D} = \frac{\mu_H}{\mu_D}; \quad \lambda_D = \lambda_H \frac{\mu_H}{\mu_D} = \lambda_H \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \cdot \frac{m_e + m_p + m_n}{m_e (m_p + m_n)};$$

$$m_p = 1836m_e \approx m_n = 1839m_e = M;$$

$$\lambda_D = \lambda_H \frac{\mu_H}{\mu_D} \approx \lambda_H \frac{M}{m_e + M} \cdot \frac{m_e + 2M}{2M} = \lambda_H \frac{m_e + 2M}{2(m_e + M)} = \lambda_H \left[ \frac{2(m_e + M)}{2(m_e + M)} - \frac{m_e}{2(m_e + M)} \right] = \lambda_H \left( 1 - \frac{1}{2 \cdot 1838} \right);$$

$$\lambda_H = 6563 \overset{\circ}{\text{Å}}; \quad \lambda_D = 6563 \cdot 0.9997 \overset{\circ}{\text{Å}} = 6561 \overset{\circ}{\text{Å}}.$$

Сдвиг линии составляет  $2 \overset{\circ}{\text{Å}}$  – величина небольшая, но вполне разрешаемая серийными приборами.

# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ

## МЕХАНИКИ

Электрон – маленький шарик. Атом – классических законов недостаточно >> модель Бора справедлива только для одноэлектронных атомов.

На пути построения новой, последовательной физики микроявлений большую роль сыграл тот факт, что свет, наряду с волновыми свойствами при определенных условиях проявляет также и корпускулярные. То есть так называемый дуализм света.

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что дуализм не является особенностью только оптических явлений, но имеет универсальное значение. **«В оптике – писал он – в течение столетий пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым, не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?»**

# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ

## МЕХАНИКИ

Электрон – маленький шарик. Атом – классических законов недостаточно >> модель Бора справедлива только для одноэлектронных атомов.

На пути построения новой, последовательной физики микроявлений большую роль сыграл тот факт, что свет, наряду с волновыми свойствами при определенных условиях проявляет также и корпускулярные. То есть так называемый дуализм света.

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что дуализм не является особенностью только оптических явлений, но имеет универсальное значение. **«В оптике – писал он – в течение столетий пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым, не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?»**

Выражение для полной энергии системы приобретает особенно простой вид при его выражении через вектор  $\rho$

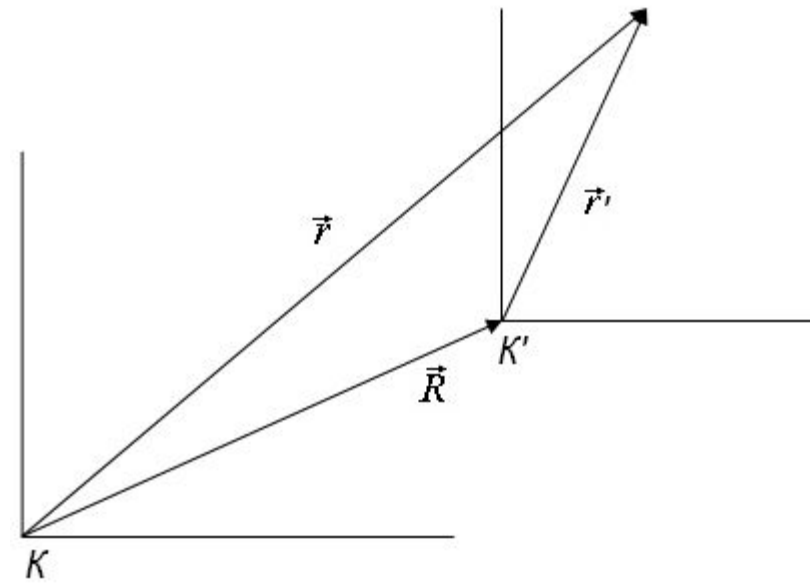
$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \vec{R}_c \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2 + \vec{R}_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R}_c \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \frac{m_2 \vec{r}_1 + m_1 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}; \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \rho; \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \rho; \end{cases}$$

$$E = T_1 + T_2 + U(\rho);$$

$$E = \frac{m_1}{2} \cdot \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\rho}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\rho}^2 + U(\rho) = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\rho}^2 + U(\rho);$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu \dot{\rho}^2}{2} + U(\rho).$$



K

K – лабораторная СО; K' – СО центра масс