

Математика

Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 11

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Основные понятия.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию $y = f(x)$ и её производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Основной задачей теории ДУ является нахождение неизвестных функций, входящих в дифференциальные уравнения.

Например, скорость тела v , движущегося под действием силы F , может быть найдена из второго закона Ньютона, т.е. из ДУ

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

Порядок наивысшей производной, входящей в уравнение, называется порядком ДУ.

Общий вид ДУ n -го порядка:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ИЛИ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Примеры

$$y' + \frac{2}{x}y = \sin x \quad - \text{ДУ 1-го порядка,}$$

$$y''' + yy' = 0 \quad - \text{ДУ 3-го порядка.}$$

Решением ДУ называется любая функция $y = f(x)$, которая при подстановке в ДУ, обращает его в тождество.

График этой функции называется **интегральной кривой**.

Общим решением ДУ $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
называется решение $y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$,
которое содержит столько независимых
произвольных постоянных $c_i, i = 1, 2, \dots, n$,
каков порядок ДУ.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0,$$

называется **общим интегралом ДУ.**

Всякое решение, которое получается из общего при конкретных значениях произвольных постоянных, называется **частным решением ДУ.**

Пример:

Найти решение ДУ $y'' + y = 0$.

Решение:

Функция $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

удовлетворяет уравнению и является общим решением.

Если $c_1 = 2, c_2 = 5,$

$y = 2 \sin x + 5 \cos x$ - частное решение.

2.

ДУ первого порядка.

ДУ первого порядка называется уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = \varphi(x, y).$$

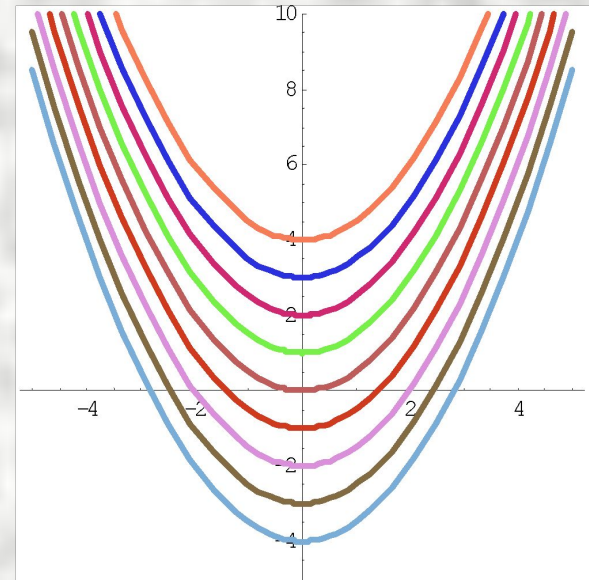
Общее решение: $y = f(x, c).$

На графике это будет однопараметрическое семейство кривых .

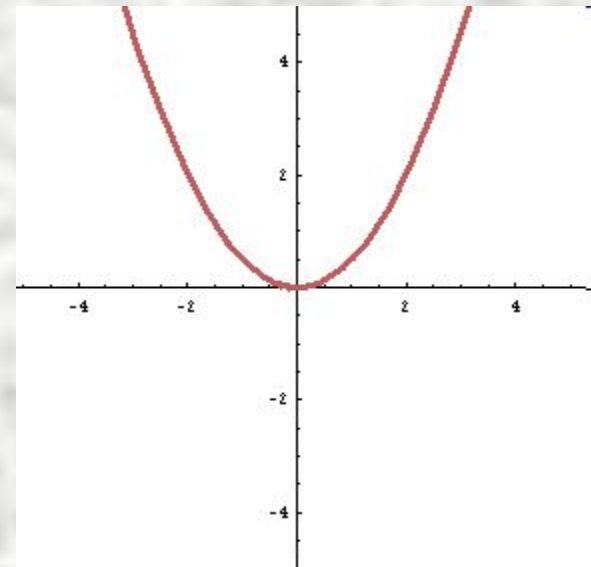
Пример.

$$y' = x$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{- общее}$$



$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{- частное}$$



Задача Коши

Пусть

1) $y' = \varphi(x, y)$ – ДУ 1-го порядка,

2) $y(x_0) = y_0$ – начальное условие.

Найти

решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию.

Геометрический смысл:

Найти интегральную кривую (частное решение), проходящую через заданную точку (x_0, y_0) .

Теорема Коши (теорема существования и единственности решения ДУ)

Т

Если

1) $y' = \varphi(x, y)$

2) $\varphi(x, y), \varphi'_y(x, y)$ непрерывны в области, содержащей точку (x_0, y_0) ,

то

существует единственное решение $y = f(x)$

этого уравнения, удовлетворяющее начальному

условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы Коши.

- Через заданную точку (x_0, y_0) проходит только *одна* интегральная кривая уравнения $y' = \varphi(x, y)$.
- *Особая точка* дифференциального уравнения – точка (x, y) , в которой нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример.

Решить уравнение $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$,

удовлетворяющее условию

$$y(0) = 0.$$

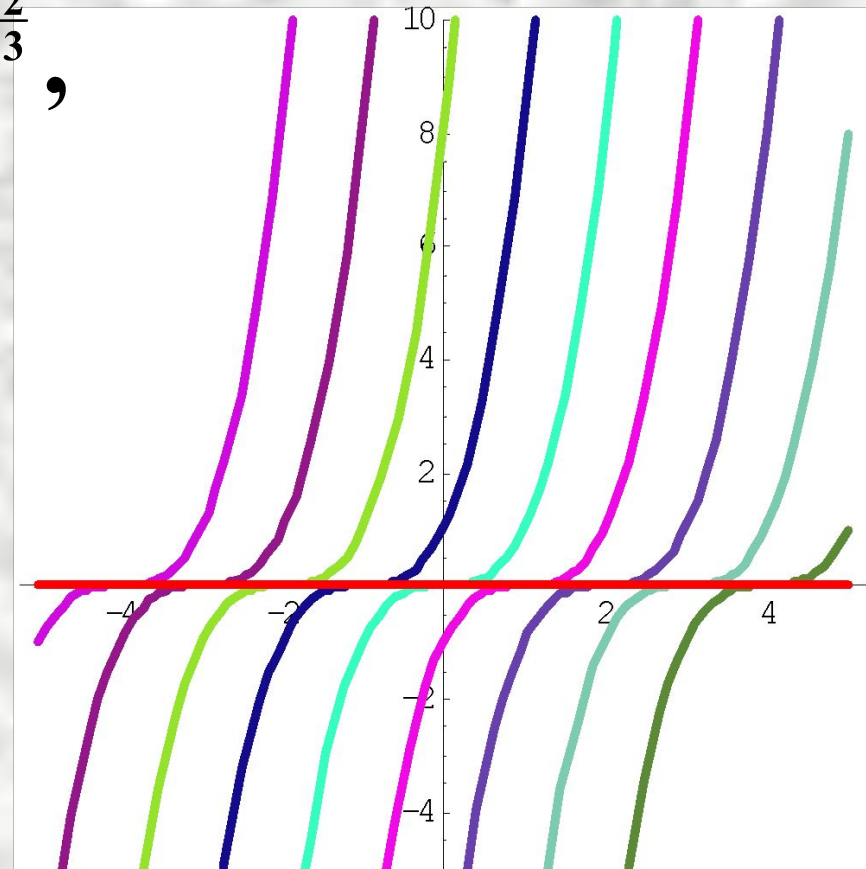
Общее решение:

$$y = (x + C)^3.$$

Найдём C .

$$0 = (0 + C)^3 \Rightarrow C = 0.$$

Частное решение: $y = x^3$.



Типы ДУ первого порядка.

I. ДУ с разделяющимися переменными.

ДУ вида $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$

называется ДУ с разделяющимися переменными.

Разделив обе части уравнения на $P_2(x)Q_1(y)$,
получим уравнение с разделёнными
переменными:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C.$$

Пример 1.

Найти общее решение ДУ $y' = x \cdot (y^2 + 1)$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1), \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int x dx$$

$$\arctgy = \frac{x^2}{2} + C - \text{общий интеграл,}$$

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) - \text{общее решение.}$$

Пример 2.

Найти общее решение ДУ $y' = \frac{y}{x}$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + C,$$

или, представив постоянную интегрирования в логарифмической форме $\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|$,

$$\ln |y| = \ln |cx|, \quad y = cx$$

2. Однородные ДУ.

ДУ вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ называются
однородным ДУ первого порядка.

С помощью подстановки $\frac{y}{x} = u$ такие уравнения
приводятся к уравнениям с разделяющимися
переменными.

Пример 1.

$$y' = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right), \quad y(1) = 1, \quad y - ?$$

Решение.

Дифференциальное уравнение— однородное.

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux$$

$$y' = u' \cdot x + u \quad \longrightarrow \quad u' \cdot x + u = u (\ln u + 1)$$

$$u' \cdot x = u \ln u, \quad \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x} \quad \longrightarrow \quad \ln |\ln u| = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\ln u = Cx, \quad u = e^{Cx},$$

$$\boxed{y = xe^{Cx}} \quad - \text{общее решение.}$$

$$C : \begin{cases} y(1) = 1 \cdot e^{C \cdot 1}, \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \boxed{C = 0}$$

$$\boxed{y = x} \quad - \text{частное решение.}$$

Пример 2.

$$(x + y)dx + xdy = 0, \quad y - ?$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{y}{x}$$

Дифференциальное уравнение— однородное.

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u' \cdot x + u \quad \rightarrow$$

$$u' \cdot x + u = -1 - u, \quad u' \cdot x = -1 - 2u$$

$$u' \cdot x = -1 - 2u,$$

$$\frac{du}{1+2u} = -\frac{dx}{x},$$

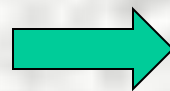
$$\int \frac{du}{1+2u} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2} \ln(1+2u) = -\ln x + \ln C,$$

$$1+2u = \frac{C}{x^2},$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{2x}$$

Переопределим

$$\frac{C}{2} \rightarrow C$$



$$y = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Замечания.

1. ДУ вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right)$$

-однородное, т.к. оно равносильно уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{a_1 + b_1\frac{y}{x}}\right)$$

2. ДУ вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + d}{a_1x + b_1y + d_1}\right)$

в случае $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ приводится к однородному

$$x = u + \alpha$$

с помощью замены:

$$y = v + \beta$$

Числа α, β находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + d = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + d_1 = 0 \end{cases}$$

Уравнение становится однородным относительно функции $v(u)$. (Это новая функция, а u – новый аргумент.)

Если $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$

замена $u = a_1 x + b_1 y$

приводит исходное ДУ к уравнению с разделяющимися переменными.

3. Линейные ДУ первого порядка.

ДУ вида $y' + P(x)y = Q(x)$, содержащее y и y' в первой степени, называется **линейным ДУ первого порядка**.

Решение ищем в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

Функцию v будем считать произвольной, u найдём из уравнения.

Если $y = uv$, то $y' = uv' + vu'$, $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

Уравнение принимает вид: $u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + Puv = Q$,

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q \quad (*)$$

v - произвольна, выберем её так, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0, \quad \text{тогда} \quad \frac{dv}{v} = -Pdx,$$

$$\ln |v| = -\int Pdx + \ln c_1, \quad v = c_1 e^{-\int Pdx}.$$

Положим $c_1 = 1, \Rightarrow v = e^{-\int P dx}$.

Подставим найденное v в ДУ (*)

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + c$$

В итоге общее решение имеет вид:

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + c \right].$$

Пример.
$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3, \quad y = ?$$

Решение.

$$y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3 \quad (*),$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|v| = 2 \ln|x+1|, \quad v = (x+1)^2$$

Найдём u , подставив $v = (x+1)^2$ в уравнение (*)

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3, \quad \frac{du}{dx} = (x+1)$$

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + c.$$

Общее решение:
$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2.$$

4. Уравнение Бернулли.

ДУ вида $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ при $n \neq 0; 1$
называется уравнением **Бернулли**.

При $n = 1$ или $n = 0$ - это линейное уравнение, или уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение Бернулли также решается с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$

Пример:
$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3, \quad y^{-?}$$

Решение.

Разделим ДУ на y^3

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3.$$

Замена $\boxed{z = y^{-n+1} = y^{-2}} \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3 \quad - \text{линейное.}$$

Замена $\boxed{z = uv} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - 2xuv = -2x^3,$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3 \quad (*)$$

$$v: \quad \frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \quad \frac{dv}{v} = 2x dx,$$

$$\ln|v| = x^2, \quad v = e^{x^2}.$$

Найдём u , подставив $v = e^{x^2}$ в уравнение (*)

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3, \quad du = -2e^{-x^2} x^3 dx,$$

$$u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx = \text{(по частям)} = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c,$$

$$z = uv = x^2 + 1 + ce^{x^2}, \quad y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}.$$