Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 3

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Лекция 3

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел функции в точке

Определение (по Коши):

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке x_0, если она определена в некоторой проколотой окрестности этой точки и если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел функции в точке

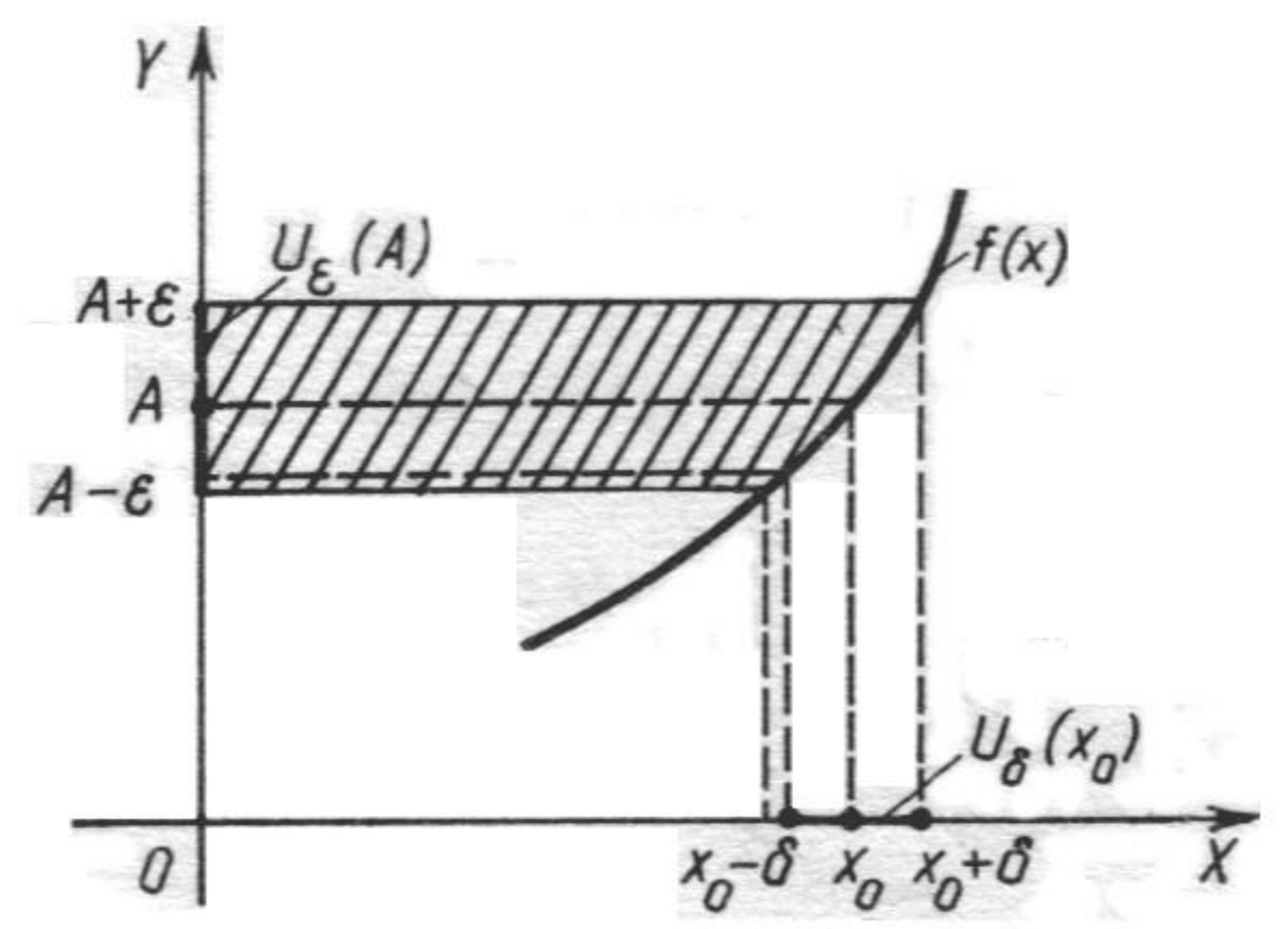
Определение (по Гейне):

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке x_0, если она определена в некоторой проколотой окрестности этой точки и если для любой числовой последовательности (x_n), $x_n \neq x_0$, сходящейся к x_0, соответствующая числовая последовательность $\left(f(x_n)\right)$ значений функции сходится к числу A при $n \to \infty$.

Определения предела по Коши и по Гейне **эквивалентны.**

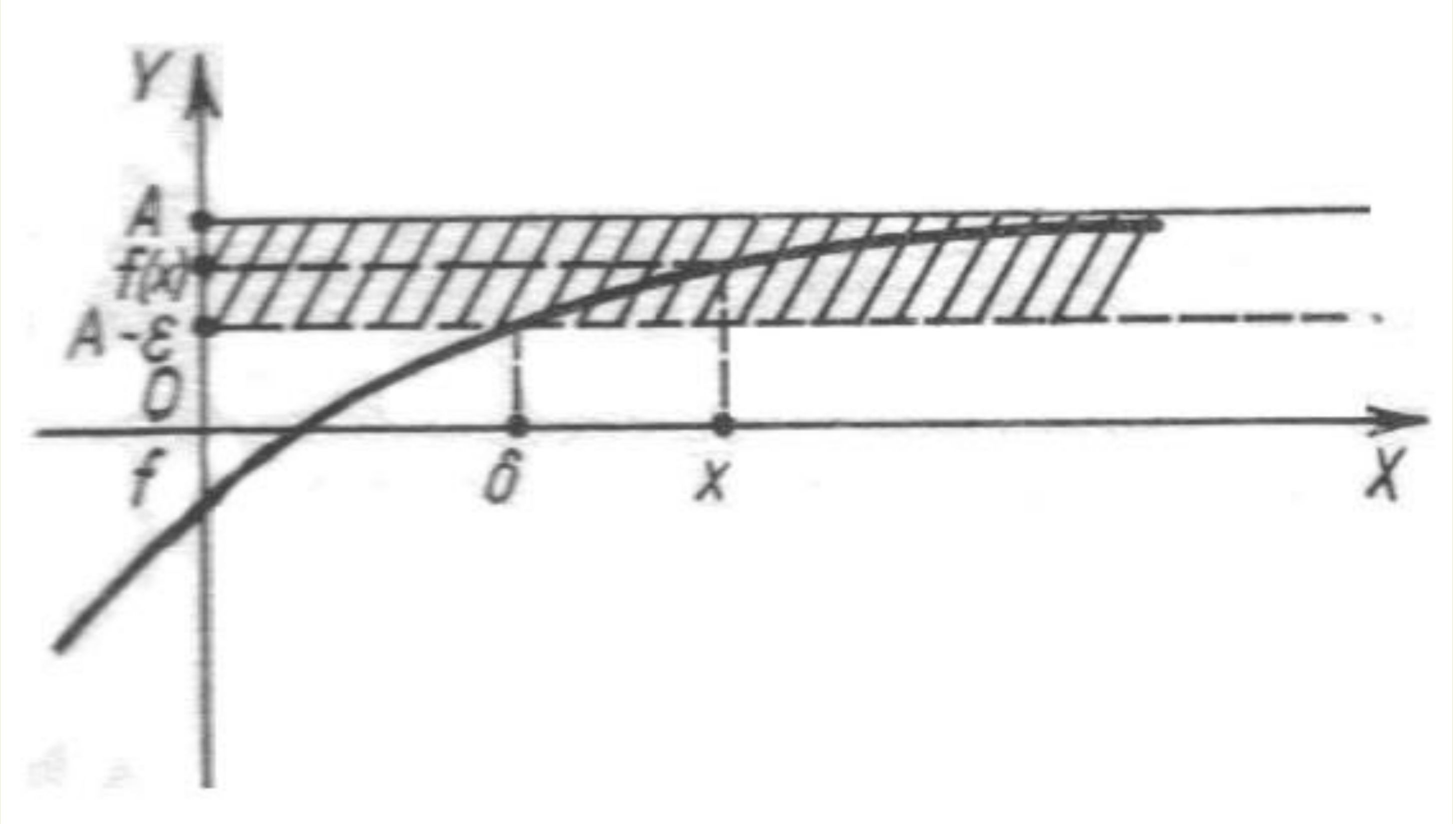
Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел функции в точке: Геометрическая интерпретация



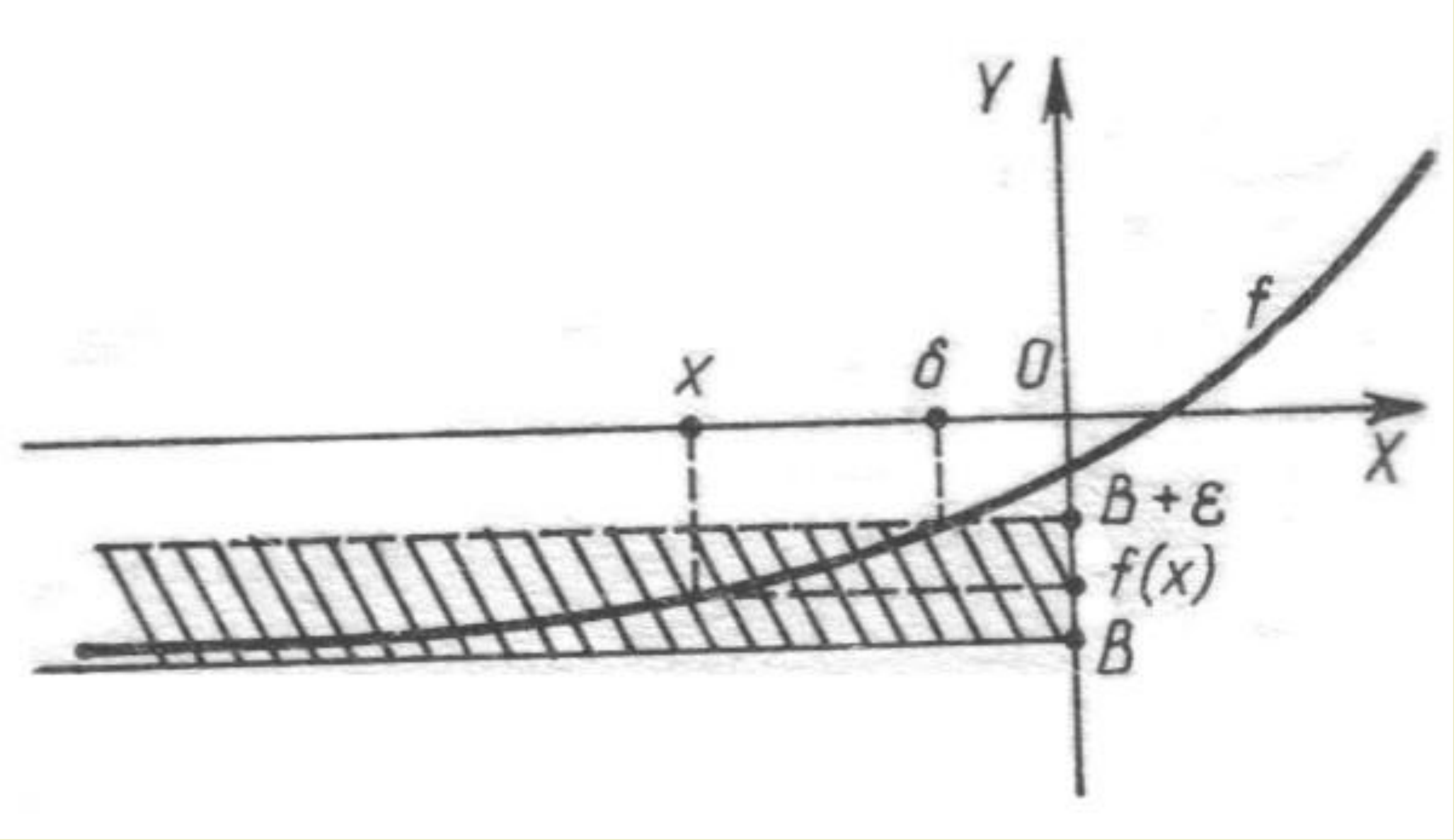
Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел функции на бесконечности



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел функции на бесконечности



Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Односторонний предел функции в точке

Определения:

Левая полуокрестность точки $\boldsymbol{x_0}$ – это произвольный интервал (a, x_0), где $a < x_0$.

Правая полуокрестность точки $\boldsymbol{x_0}$ – это произвольный интервал (x_0, b), где $x_0 < b$.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Односторонний предел функции в точке

Определение:

Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0 **слева**, если она определена в левой полуокрестности этой точки и если для любой числовой последовательности (x_n), $x_n < x_0$, сходящейся к x_0, соответствующая числовая последовательность $\big(f(x_n)\big)$ значений функции сходится к числу A при $n \to \infty$.

Запись:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

Предел функции в точке

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Односторонний предел функции в точке

Определение:

Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0 **справа**, если она определена в правой полуокрестности этой точки и если для любой числовой последовательности (x_n), $x_n > x_0$, сходящейся к x_0, соответствующая числовая последовательность $\left(f(x_n)\right)$ значений функции сходится к числу A при $n \to \infty$.

Запись:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Предел функции в точке

Замечание:

При нахождении предела функции $f(x)$ в точке x_0 сама точка x_0 из рассмотрения исключается, а функция $f(x)$ считается определённой в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства функций, имеющих предел в точке

1. Единственность предела

Если функция имеет предел в точке, то он единственный.

2. Ограниченность функции

Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

3. Сохранение знака функции в окрестности предела

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, то существует проколотая окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ имеет знак, совпадающий со знаком числа A.

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства функций, имеющих предел в точке

4. Предел «зажатой» функции

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$

и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x),$$

то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

Свойства функций, имеющих предел в точке

5. Арифметические операции над пределами

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,$ то:

1) $$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$$

2) $$\lim_{x\to x_0}\big(c\cdot(x)\big)=c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=c\cdot A,\quad c=\text{const}$$

3) $$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$$

4) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B},\quad B\neq 0$$

Автор: И. В. Дайняк, к.т.н., доцент
Кафедра высшей математики БГУИР

math.mmts-it.org