Какая наука может быть более благородна, более восхитительна, более полезна для человечества, чем математика? Франклин

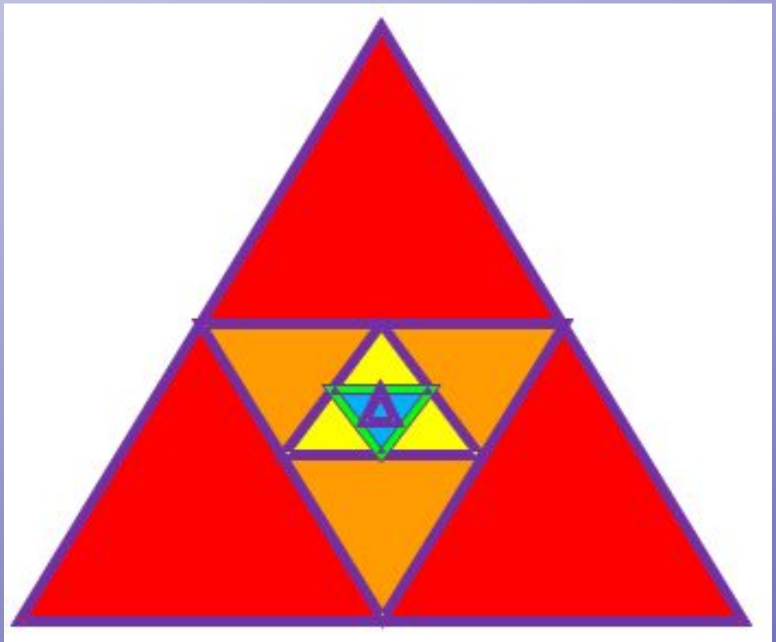
Мыслить последовательно, судить доказательно, опровергать неправильные выводы должен уметь всякий: физик и поэт, тракторист и химик. Э.Кольман

В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления. В.П.Ермаков

Легче найти квадратуру круга, чем перехитрить математика. Огастес де Морган

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

10 класс



I. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Вопросы

1. Определение арифметической прогрессии.

2. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии.

последовательность, каждый член которой, начиная со

3. Формула суммы первых *n* членов арифметической прогрессии .

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

4. Определение геометрической прогрессии.

5. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии.

последовательность отличных от нуля чисел, каждый

6. Формула суммы первых *n* членов геометрической прогрессии .

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

II. Арифметическая прогрессия.
Задания

1. Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 7 - 4n$
   Найдите a_{10}. (-33)

2. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$.
   Найдите a_4 . (4)

3. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$.
   Найдите a_{17}. (-35)

4. В арифметической прогрессии $a_3 = 7$ и $a_5 = 1$.
   Найдите S_{17}. (-187)

II. Геометрическая прогрессия.
Задания

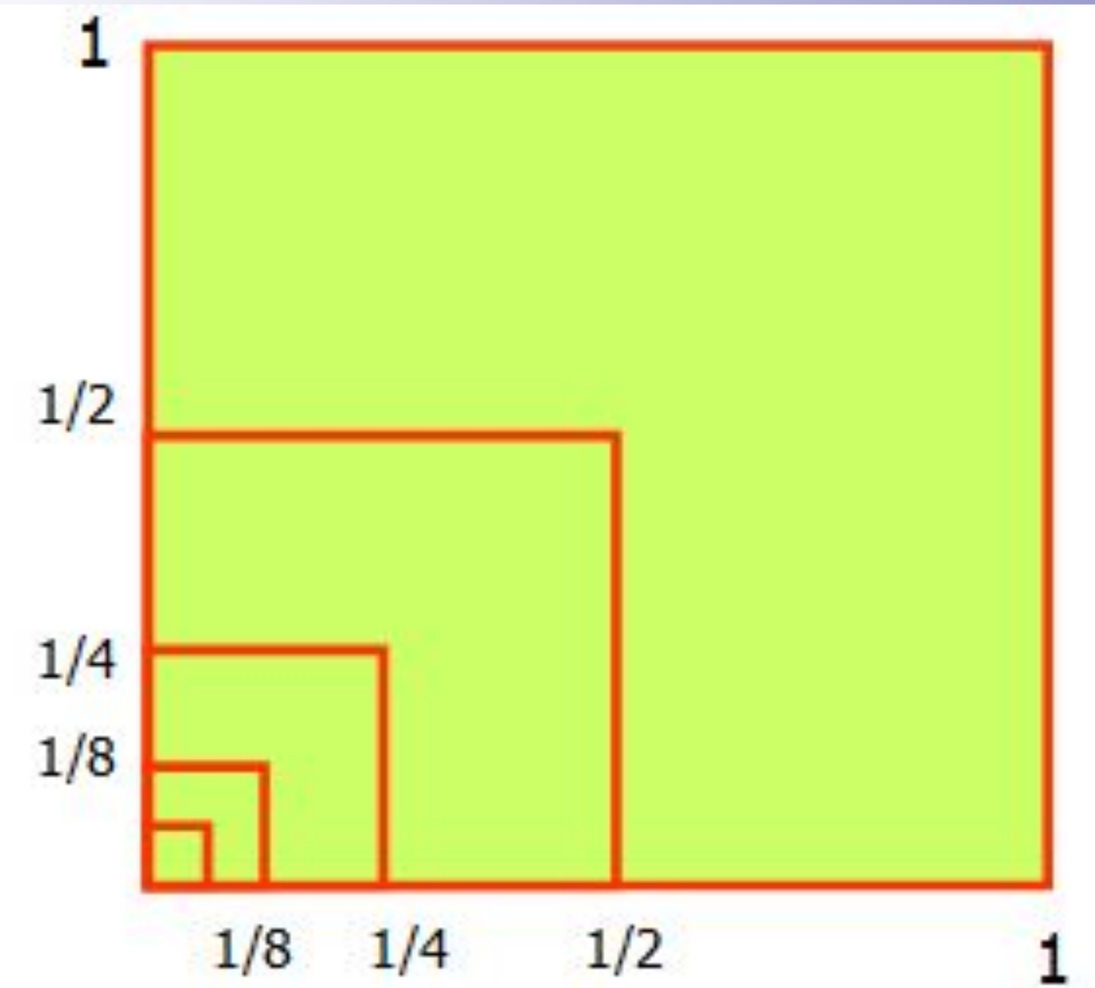
5. Для геометрической прогрессии $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; ...$ найдите пятый член $\left(\frac{2}{81}\right)$

6. Для геометрической прогрессии $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; ...$ найдите n-й член. $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

7. В геометрической прогрессии $b_3 = 8$ и $b_5 = 2$. Найдите b_4. (4)

8. В геометрической прогрессии $b_3 = 8$ и $b_5 = 2$. Найдите b_1 и q. $\left(\frac{1}{2} u 32\right)$

9. В геометрической прогрессии $b_3 = 8$ и $b_5 = 2$. Найдите S_5. (62)



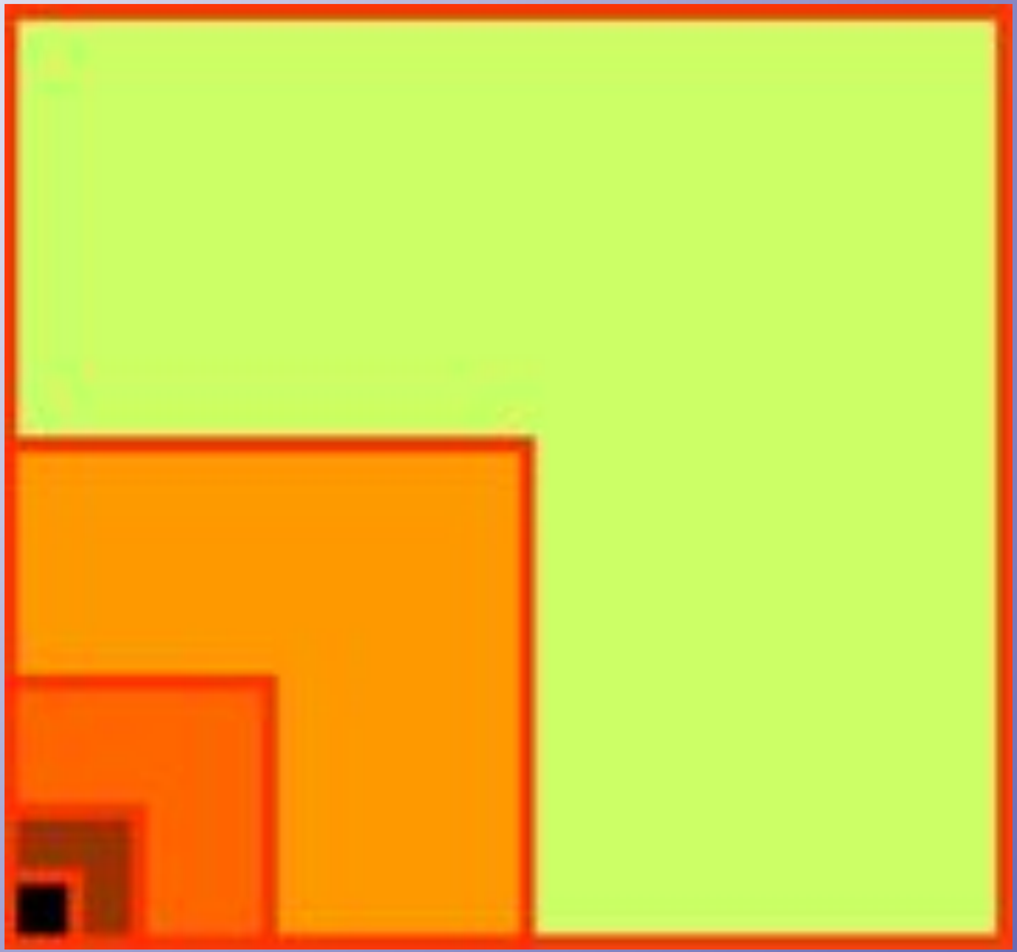
$$n = 15,\quad \frac{1}{2^{n\,1}} = \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384};$$

$$n = 20,\quad \frac{1}{2^{n\,1}} = \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524288};$$

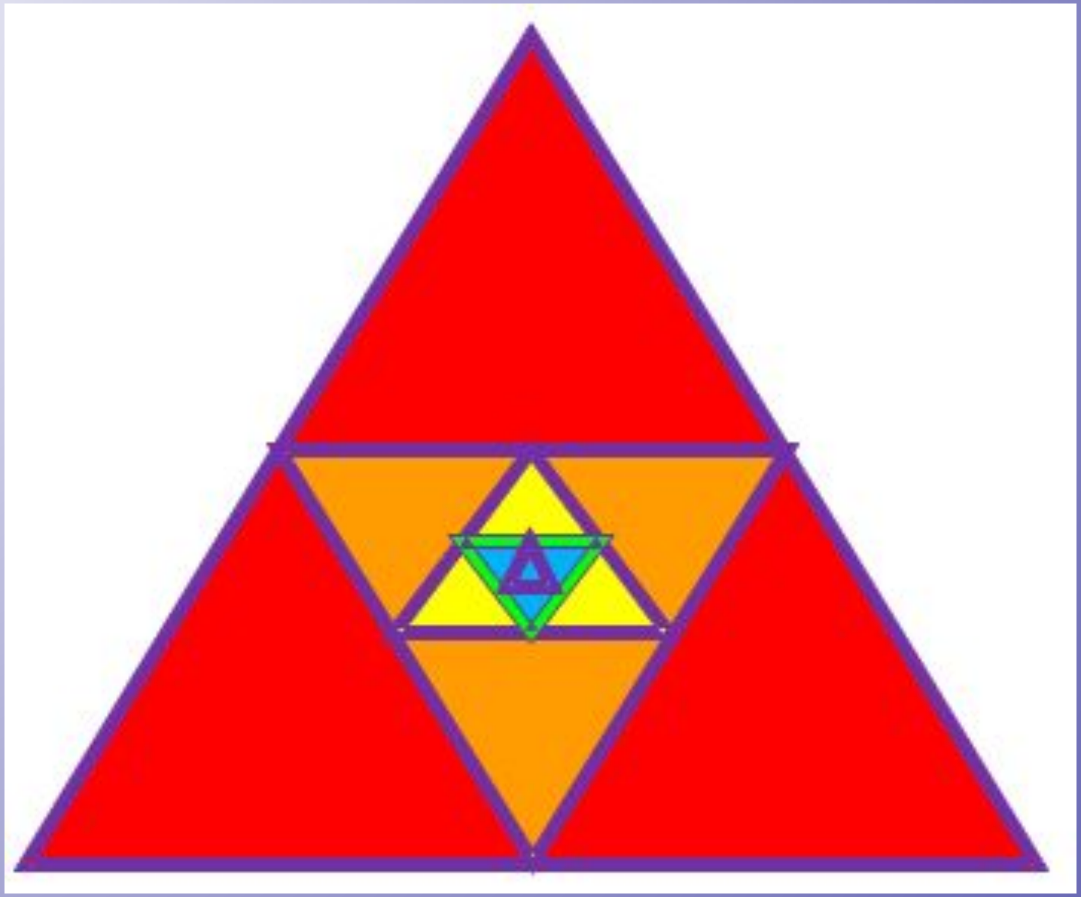
$$n = 21,\quad \frac{1}{2^{n\,1}} = \frac{1}{2^{20}} = \frac{1}{1048576}.$$

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \ldots; \frac{1}{2^{n-1}}; \ldots\,.$$

$$q = \frac{1}{2} < 1$$



$$1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4^2};\ \frac{1}{4^3};\ \ldots;\ \frac{1}{4^{n-1}};\ \ldots \qquad q = \frac{1}{4} < 1$$



$$1;\frac{1}{2};\frac{1}{2^2};\frac{1}{2^3};\dots;\frac{1}{2^{n-1}};\dots \qquad q=\frac{1}{2}<1$$

$$n\to\infty \qquad \frac{1}{2^n}\to 0$$

$q = -\frac{1}{3}$; $1; \ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \ -\frac{1}{3^3}; ...; \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}; ...$ $b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}$

определение:

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль её знаменателя меньше единицы.

$$|q| = 1$$

Задача №1

Является ли последовательность бесконечно убывающей геометрической прогрессией, если она заданна формулой:

$$а)\, b_n = \frac{10}{7^n} \qquad б)\, b_n = (-4)^{n+2}$$

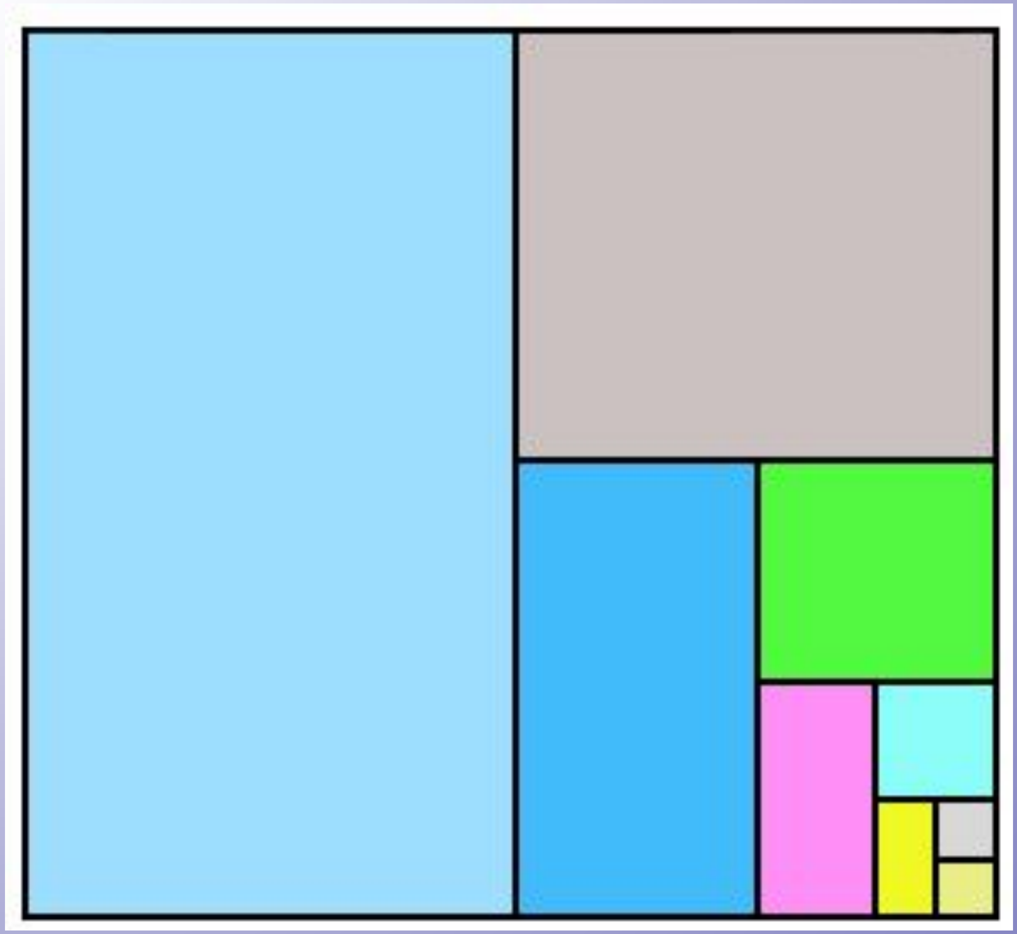
Решение: а)

$$b_1 = \frac{10}{7} \qquad b_2 = \frac{10}{49} \qquad q = \frac{10}{49} : \frac{10}{7} = \frac{1}{7} \qquad \left|\frac{1}{7}\right| < 1$$

данная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей.

б) $b_n=(-4)^{n+2};\ b_1=(-4)^3=-64;\ b_2=(-4)^4=128;\ q=128:(-64)=-2;\ /-2/>1, \Rightarrow$

данная последовательность не является бесконечно убывающей геометрической прогрессией.



$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

$$S_n=\frac{1}{2}\bullet\frac{1-(0,5)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

$$n\to\infty;\ \frac{1}{2^n}\to 0 \qquad (1-\frac{1}{2^n})\to 1 \qquad S_n\to 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1 \qquad \lim_{n\to\infty}S_n=1$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии есть предел последовательности $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Например, для прогрессии $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots, где\, b_1 = 1, q = -\frac{1}{3}$

имеем $S_1 = 1, S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \ldots,$ $S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0, то \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}.$

Сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

можно находить по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$

Вопросы

- С какой последовательностью сегодня познакомились?
- Дайте определение бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
- Как доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей?
- Назовите формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

- Известный польский математик Гуго Штейнгаус шутливо утверждает, что существует закон, который формулируется так: математик сделает это лучше. А именно, если поручить двум людям, один из которых математик, выполнение любой незнакомой им работы, то результат всегда будет следующим: математик сделает ее лучше.

Гуго Штейнгаус
14.01.1887-25.02.1972