

Обзор методов расчета турбулентных течений

Лекция 7

Характеристики турбулентности

- 1. Турбулентность можно рассматривать как совокупность вихрей различного размера, от колмогоровского масштаба (самые мелкие вихри) до когерентных структур (самые крупные вихри с масштабом, соизмеримым с геометрией, например, толщина пограничного слоя или ширина канала).

2. Каждый вихрь характеризуется размером и временем жизни.

3. Процесс передачи энергии от крупных вихрей к мелким играет фундаментальную роль и называется *каскадный перенос энергии*.

4. Все переменные в турбулентном потоке можно разделить на осредненную и пульсационные составляющие.

$$u = u_{\text{ср}} + u'$$

5. Турбулентные пульсации как случайные величины рассматриваются в рамках статистической теории турбулентности.

Турбулентные вихри

- Турбулентность – это совокупность турбулентных вихрей различного размера.

1. Начиная с некоторого малого размера вихри диссипируют в тепло под воздействием вязкости. Характерный минимальный размер вихрей определяется колмогоровским масштабом

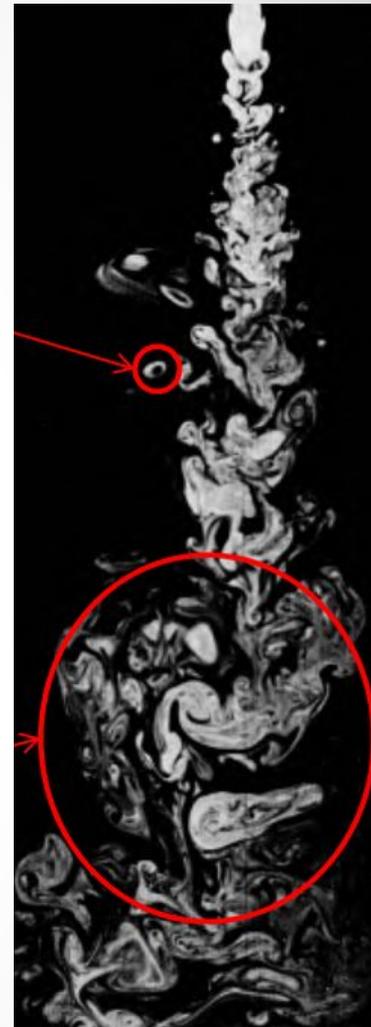
$$\eta_k = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$$

ε – местная скорость диссипации на единицу массы

ν – кинематическая вязкость, $\text{м}^2 \cdot \text{с}$.

$k = \frac{\overline{u'^2}}{2}$ – кинетическая энергия турбулентного течения, $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$

$\varepsilon = \nu \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j}$ – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии (имеет размерность энергии, отнесенной к единице массы и единице времени), $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$

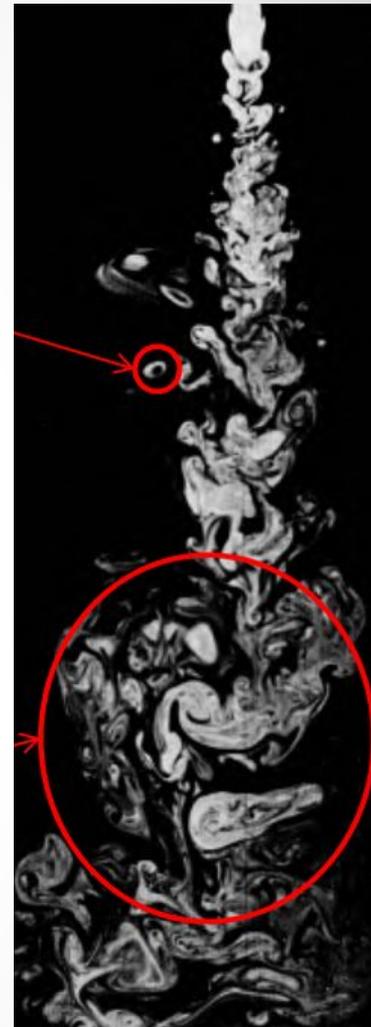


Турбулентные вихри

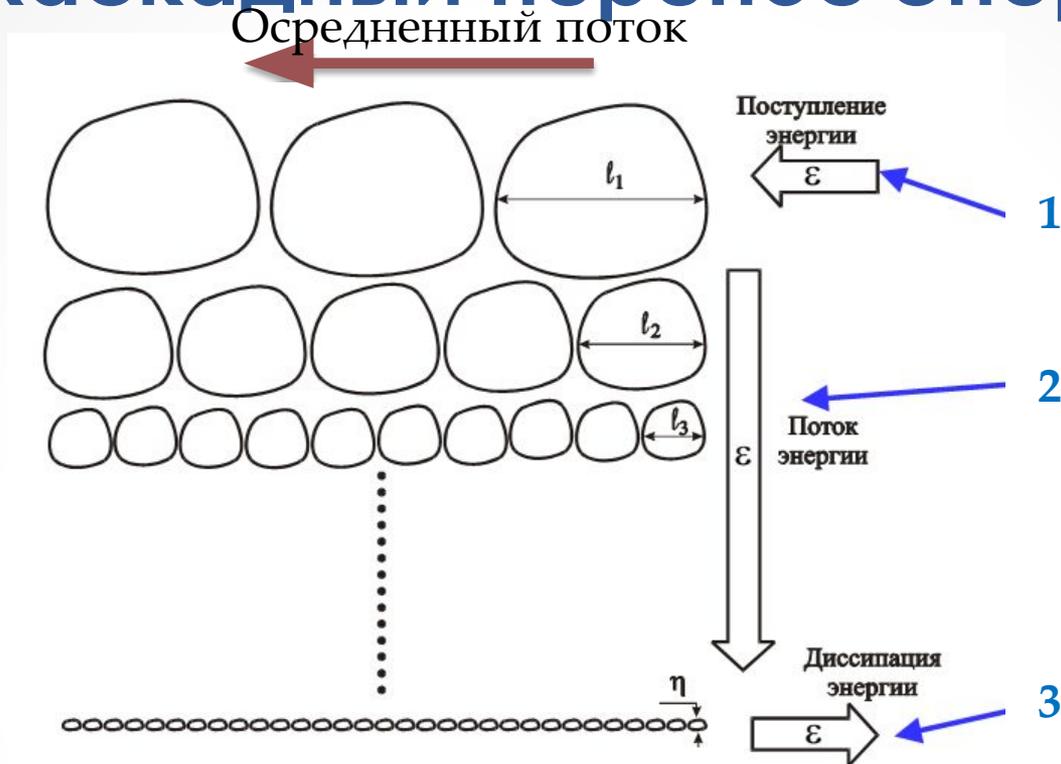
- 2. Максимальный размер турбулентных вихрей ***Turbulence Length Scale*** l (когерентных структур), существующих в потоке, имеет порядок характерного линейного масштаба течения L :

$l = 0.07L$ – для каналов круглого сечения

$l = 0.4\delta$ – для пограничного слоя



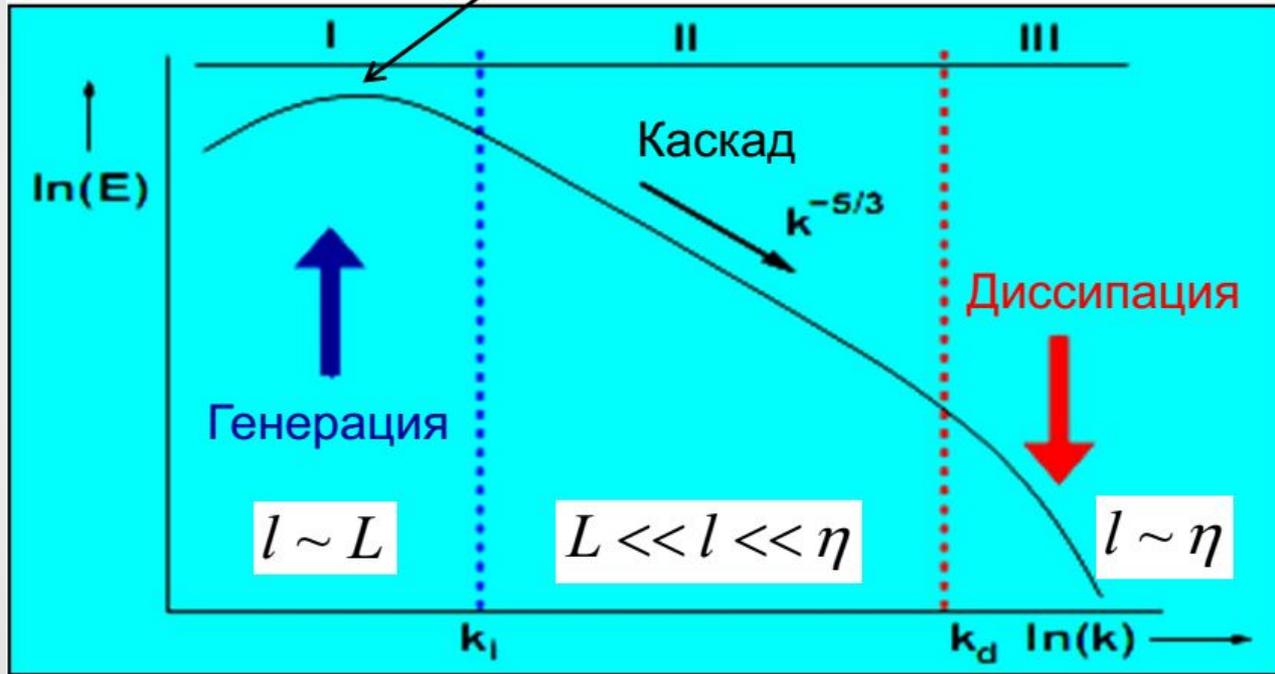
Каскадный перенос энергии



1. Энергия поступает от осредненного потока к наиболее крупным вихрям.
2. Последовательно передается всё более мелким вихрям (каскадный перенос)
3. Самые мелкие (колмогоровские) вихри диссипируют и передают энергию тепловому движению.

Области энергетического спектра

Наиболее энергонесущие вихри



$$\eta = 1/k_D = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$$

η - масштаб Колмогорова

ε - скорость диссипации энергии

L - характерный размер задачи

l - характерный размер вихря

E - поток энергии

k - кинетическая энергия

Генерационный интервал

Инерционная область

Диссипативный интервал

Физическая картина турбулентности образно выражена в следующем четверостишии, написанном английским физиком Л. Ричардсоном в 1922 г.:

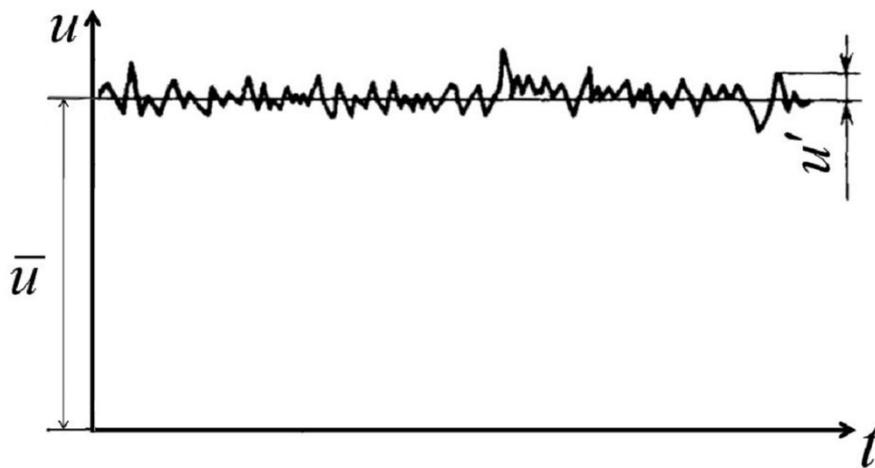
Big whirls make little whirls
Which feed on their velocity,
Little whirls have smaller ones
And so on into viscosity.

В поток бурлящий бросив взгляд,
Вихрь увидишь там каскад:
Меньшой у большего энергию берет,
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

Статистическая теория турбулентности

- В рамках статистической теории турбулентности мгновенное поле течения делится на осредненное и пульсационное

$$u = \bar{u} + u'$$



Таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осреднёнными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

Определение осредненного движения зависит от выбранного способа осреднения. Чаще всего производят осреднение по времени и пространству (Условия осреднения Рейнольдса).

Осреднение по Рейнольдсу

• Можно использовать различные способы осреднения параметров течения. Например, с использованием математического ожидания и функции плотности распределения вероятности. Для течений, в которых средняя величина не меняется во времени, можно использовать осреднение по времени:

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(x, y, z, t) dt$$

где Δt - период времени, существенно превышающий временной масштаб турбулентности τ .

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}$$

Период осреднения должен быть много больше максимального времени турбулентных пульсаций.

Обзор методов расчета турбулентных течений

1. Прямое численное моделирование (метод DNS)

Нестационарные уравнения динамики вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса) описывают движение в турбулентном течении вплоть до минимальных масштабов турбулентности. Однако при численном решении этих уравнений для того, чтобы учесть все масштабы, может потребоваться настолько мелкая сетка, что даже современные компьютерные мощности не позволят решить такую задачу.

То же относится и к выбору шага численного интегрирования по времени, так как характерное время мелкомасштабной турбулентности очень мало. С другой стороны, именно мелкомасштабная турбулентность играет важнейшую роль при описании турбулентных течений. Поэтому прямое численное моделирование (*Direct Numeric Simulation, DNS*) турбулентных течений применяется для инженерных расчетов достаточно редко.



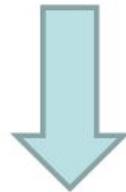
Прямое численное моделирование (метод DNS)

Решение уравнений Навье-Стокса на сетке с шагами (включая шаг по времени) достаточно малыми для точного разрешения всех турбулентных вихрей



Шаг сетки должен быть порядка колмогоровского масштаба

$$\eta_k = (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$$



Вычислительные затраты пропорциональны количеству узлов в каждом направлении и количеству шагов по времени

Затраты $\sim \eta_k^{-4} \sim v^{-3} \sim Re^3$

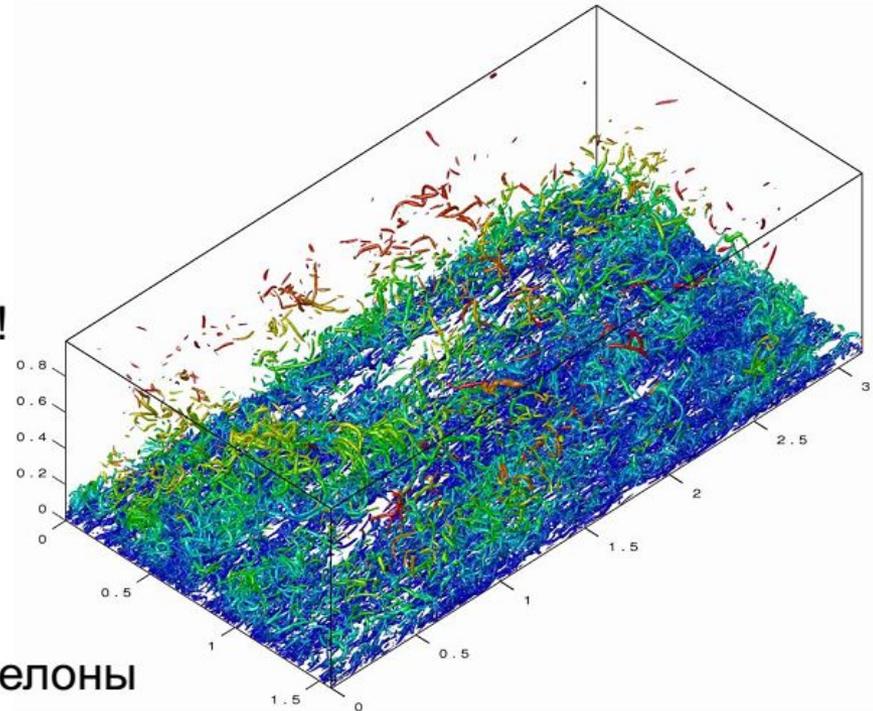


Сегодня DNS применим только при весьма ограниченных числах Рейнольдса

Пример расчета с использованием метода DNS

Установившееся течение в плоском канале (Hoyas, Jimenez, 2005)

- $Re = U_{max} H / \nu = 10^5$
- Расчетная область
 - $4\pi H \times H \times 1.5\pi H$
- Расчетная сетка
 - $6144 \times 633 \times 4608 \approx 18$ миллиардов !!!
- Шаг сетки
 - $1\eta - 1.8\eta$ ($\eta = (v^3 / \varepsilon)^{1/4}$)
- Вычислительные затраты
 - 4 месяца на 2048 процессорах
 - ✓ суперкомпьютерный центр Барселоны
- Объем «сырых» данных
 - 25 Тб



Обзор методов расчета турбулентных течений

2. Моделирование крупных вихрей (LES)

Более простой моделью является моделирование крупных вихрей (*Large Eddy Simulation, LES*). В этом подходе крупные вихри рассчитываются явно, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба (*Sub-Grid Scale, SGS*) моделируются с использованием правил подсеточного замыкания.

Основной предпосылкой такого подхода является то, что наибольшие вихри, которые находятся под прямым воздействием граничных условий, несут максимум энергии и должны быть рассчитаны.

Этот подход имеют хорошую перспективу.

Метод моделирования крупных вихрей Large Eddy Simulation (LES)

Крупные вихри получают энергию от осредненного потока



Структура крупных вихрей существенно зависит от рассматриваемого течения

Мелкие вихри получают энергию через каскадный перенос



Их структура существенно более универсальна

Моделирование мелких вихрей гораздо более перспективно, чем моделирование крупных

Процедура фильтрации в модели LES

- Процедура фильтрации позволяет отделить «крупные» вихри от «мелких»
- Применение процедуры фильтрации к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению так называемых отфильтрованных уравнений
- Отфильтрованные уравнения замыкаются при помощи «подсеточной» модели турбулентности

Моделируются вихри,
размер которых меньше
размера фильтра Δ



Размер фильтра Δ в
явном виде входит в
модель

Практическая реализация метода LES

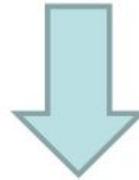
Зачастую на практике не пользуются явными фильтрами, а роль фильтра играет размер ячейки сетки (например $\Delta = \sqrt[3]{V}$)



- Подсеточная модель содержит в явном виде размер ячейки сетки
- Вихри, которые меньше размера ячейки сетки естественным образом отфильтровываются
- Для точного разрешения вихрей, ненамного превосходящих размер ячейки, необходимо использование современных низкодиссипативных схем

Свойства метода LES

- При использовании достаточно мелких сеток и хороших схем обеспечивает очень высокую точность
- Требует решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса на подробных сетках

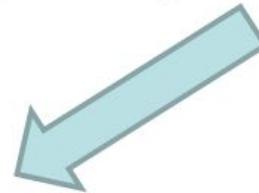


Использование LES сопряжено со значительными затратами

При приближении к стенке
характерный размер вихрей
уменьшается



Возрастают
требования к сетке



Вычислительные затраты особенно
существенны в окрестности стенки

Обзор методов расчета турбулентных течений

3. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS)

В настоящее время наиболее распространенным способом моделирования турбулентности является использование осреднения Рейнольдса, когда вместо уравнений для мгновенных значений параметров используются уравнения для неких осредненных величин. Эти уравнения называются *уравнениями Рейнольдса*.

Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS)

- Использование процедуры осреднения по Рейнольдсу

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

- Применение осреднения по Рейнольдсу к уравнениям Навье-Стокса приводит к получению уравнений Рейнольдса, которые не замкнуты
- Замыкание уравнений Рейнольдса (определение турбулентных напряжений $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u'_i u'_j}$) производится с помощью полуэмпирических моделей турбулентности

В RANS все турбулентные вихри моделируются

Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- Линейная связь между тензором Рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
 - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости
- Достоинства
 - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.
 - Недостатки
 - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

Полуэмпирические модели турбулентности

- Модели, использующие гипотезу Буссинеска (линейные модели, EVM). Обычно классифицируются по количеству дифференциальных уравнений переноса
 - Алгебраические модели
 - Модели с одним уравнением
 - ✓ модель Спаларта-Аллмареса SA
 - ✓ модель Секундова v_t -92
 - Модели с двумя уравнениями
 - ✓ Модели типа k - ε
 - ✓ Модели типа k - ω
 - Модель Ментера SST
 -
- Модели рейнольдсовых напряжений (нелинейные модели)
 - Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
 - Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM)
 - Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM)
 - ✓ Нелинейные модели (NLM)

Достоинства метода RANS

Позволят использовать упрощенные уравнения

- двумерные
- так и стационарные уравнения



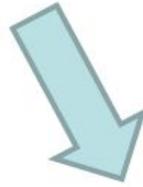
RANS гораздо более экономичен,
чем LES и, тем более, DNS



Является наиболее широко
применяемым методом при
практических расчетах
турбулентных течений

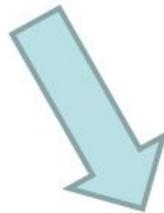
Недостатки метода RANS

Не существует «универсальной модели турбулентности», каждая модель имеет свою «область применимости»



Даже при тщательном выборе модели невозможно гарантировать высокую точность расчета

Накоплен огромный опыт применения моделей турбулентности



Лучшие модели турбулентности обеспечивают достаточно высокую точность расчета некоторых классов течений, в частности, пограничных слоев

Обзор методов расчета турбулентных течений

4. Гибридные методы расчета (RANS-LES)

При приближении к стенке размер характерных вихревых структур уменьшается пропорционально расстоянию до стенки. Пропорционально должен уменьшаться шаг сетки. Для точного воспроизведения профиля скорости в пограничном слое при существенных числах Рейнольдса это ведет к гигантским вычислительным затратам.

Единственный выход - использовать *LES* только в части области. В остальной части расчетной области использовать более экономичные методы *RANS* (*URANS*).

Гибридные методы расчета

Создание метода объединяющего преимущества RANS и LES

RANS

Высокая точность расчета
пристенных течений при
скромных требованиях к сетке

LES

Высокая точность расчета
отрывных течений



Гибридные методы

Компромисс:

Позволяют получать достаточно точные результаты для сложных (в первую очередь отрывных) течений при приемлемых затратах

Проблемы гибридных методов расчета

Серая область

- Какие уравнения решаются на границе RANS и LES областей?

В RANS подобласти используются уравнения Рейнольдса полученные осреднением по времени. В LES области используются отфильтрованные уравнения, полученные осреднением по пространству (фильтрация).

- Хорошо ли разрешаются крупные вихри около границы областей RANS-LES?

В RANS области все турбулентные пульсации моделируются эмпирическими зависимостями. В LES области большая часть пульсаций разрешается точно. В окрестности границы происходит взаимное влияние областей.

В LES области разрешенные турбулентные пульсации подавляются за счет соседства со стационарной RANS областью. Конвективный перенос приводит к «сносу» RANS решения в LES область и наоборот. В окрестности границы областей возникает проблемная область, называемая «серая область» (grey area).



Проблемы гибридных методов расчета

Обеспечение «хорошего» решения в серой области - это основная проблема гибридных методов.

Из-за разнообразия течений не существует универсального решения.

Проблема «серой области» может быть решена разными способами, например:

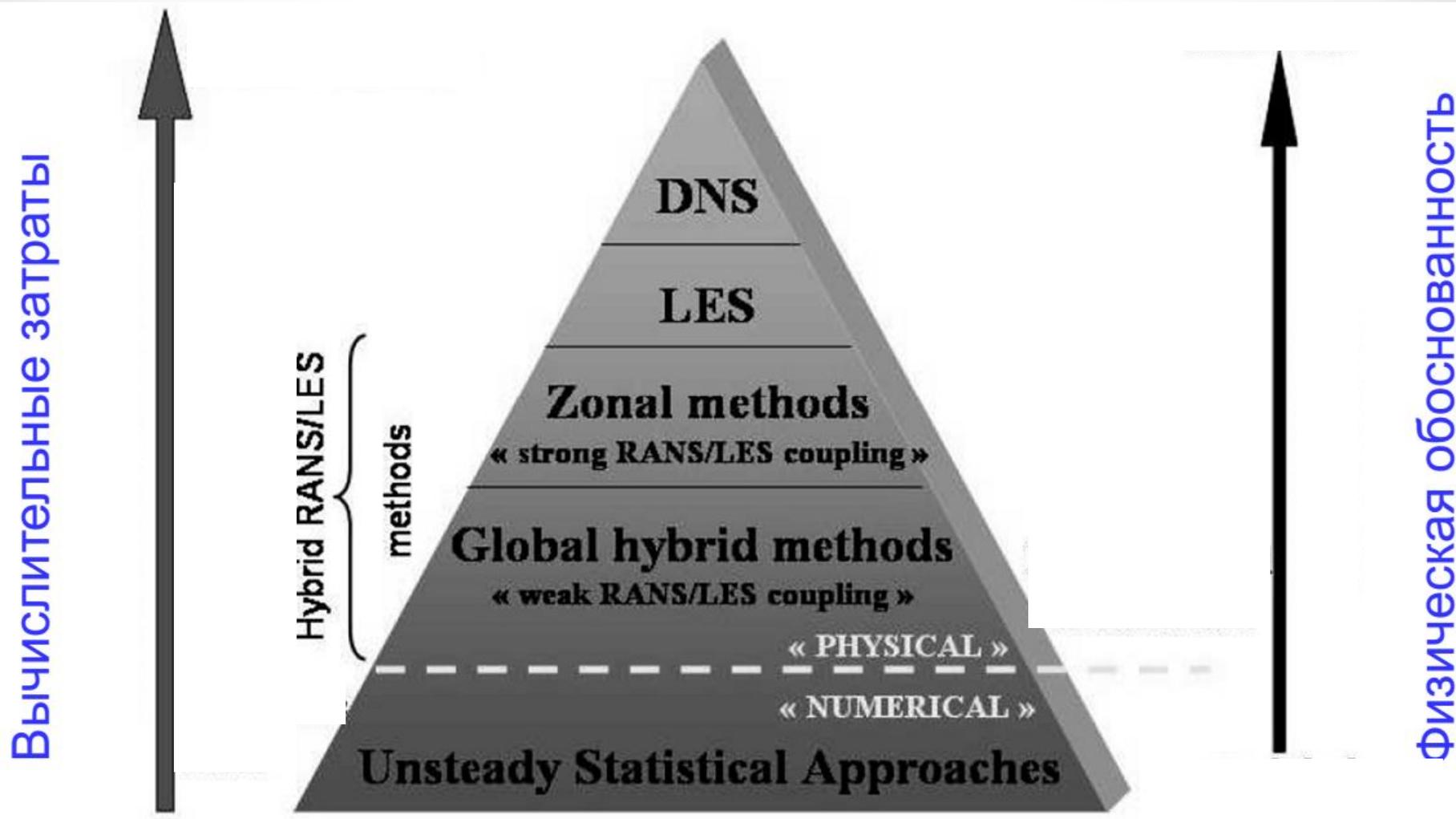
1. Поместить границу в малочувствительную область (DES) – окрестность внешней границы пограничного слоя, в которой градиенты скорости сравнительно малы.

2. Использование естественной неустойчивости низкодиссипативных схем на больших градиентах (WMLES, IDDES) – «серая область» расположена внутри пограничного слоя.

3. Введение искусственных пульсаций на границе *RANS-LES* областей – необходимо создать такие же пульсации, как в «истинной» турбулентности.



Сравнение различных методов расчета турбулентных течений



Вычислительные ресурсы и перспективы практического применения различных методов моделирования турбулентных течений

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Готовность
2D Steady RANS	10^5	$10^{3.5}$	1980
3D Steady RANS	10^7	10^3	1985
3D Unsteady RANS	10^7	$10^{3.5}$	1995
DES (гибридный метод)	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

Выводы

- Существует множество методов расчета турбулентных течений. Обычно чем точнее метод, тем больше вычислительных ресурсов требуется для его использования
- В прямом численном моделировании (DNS) разрешаются все турбулентные масштабы, поэтому применять его возможно только при низких числах Рейнольдса
- Метод моделирования крупных вихрей (LES) тоже достаточно точен, но затраты пока неприемлемы для решения прикладных задач
- В настоящее время активно развиваются гибридные методы – поиск компромисса между точностью и экономичностью
- На практике чаще всего используется метод решения уравнений Рейнольдса
- Уравнения Рейнольдса замыкаются при помощи полуэмпирических моделей турбулентности
- Обычно используется гипотеза Буссинеска – линейная связь между напряжениями Рейнольдса и тензором скоростей деформаций

**Полуэмпирические модели
турбулентности
ANSYS CFX**

Проблемы моделирования

- Предложены сотни полуэмпирических моделей турбулентности
 - Универсальная RANS модель так и не создана
 - ✓ Это означает наличие кризиса в полуэмпирической теории турбулентности
- Параметры многих турбулентных течений определяется относительно крупными (с размерами порядка макро-масштаба течения) устойчивыми когерентными вихревыми структурами, зависящими от конкретной геометрии течения и граничных условий
 - Эти структуры имеют мало общего с универсальными хаотичными вихрями, населяющими тонкие сдвиговые слои, для которых строятся и на которых калибруются полуэмпирические модели



Невозможно создать универсальную полуэмпирическую модель турбулентности

Проблемы моделирования

- Для описания турбулентности необходимо два масштаба
 - Энергия турбулентности
 - Диссипация турбулентности

1. Кинетическая энергия диссипации k

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad u'_i = u_i - \bar{u}_i$$

2. Средняя скорость диссипации ε – характеризует среднее количество энергии, переходящей в тепло в единице массы жидкости за единицу времени:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2}$$

где u'_i - пульсационная составляющая скорости

u_i - актуальная скорость

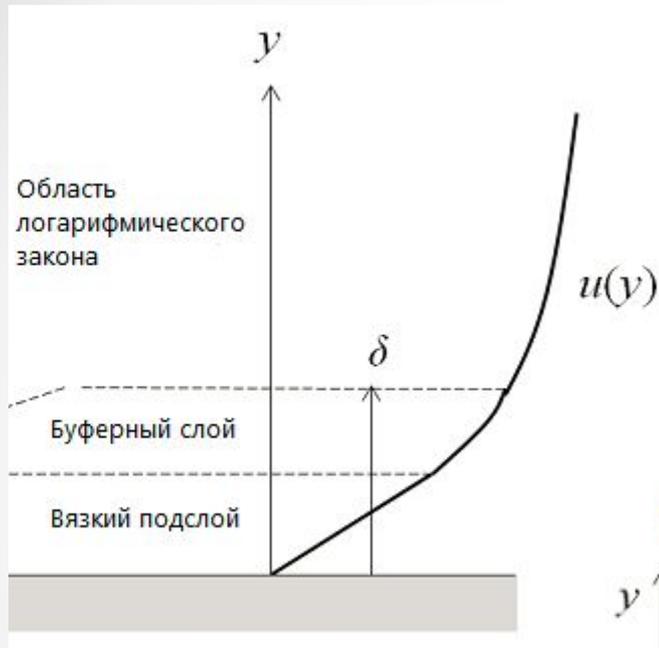
\bar{u}_i - осредненная скорость



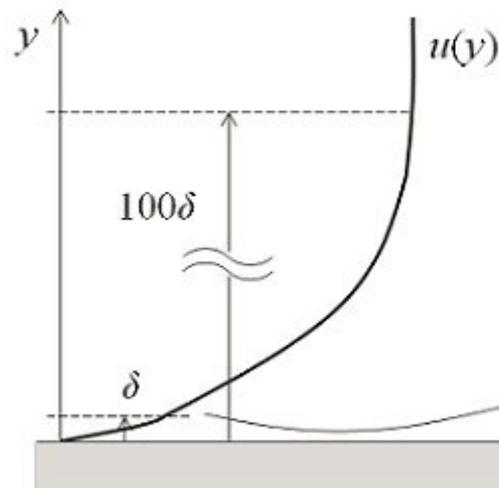


- Модели с одним дифференциальным уравнением требуют привлечения дополнительного масштаба
 - Например, расстояние до стенки
- Два уравнения дают два независимых масштаба турбулентности
 - Нет необходимости привлекать дополнительные соображения
 - ✓ Модель менее ориентирована на определенные типы течений
- Наиболее часто используются два типа моделей
 - $k-\varepsilon$
 - $k-\omega$
- Модели более чем с двумя уравнениями используются очень редко
 - Нет необходимости в привлечении третьего масштаба

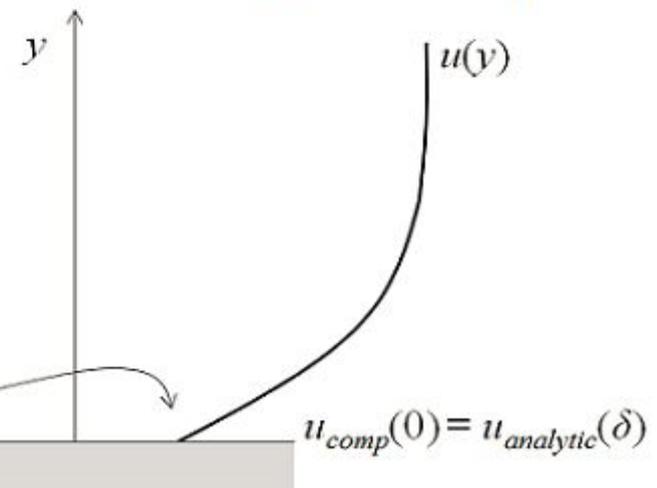
Истинная и модельная профили скорости



Истинная картина течения



Профиль скорости, рассчитанный с помощью пристеночных функций



к-ε модель

Модель турбулентности из 2 уравнений очень широко используются, т. к. является компромиссом между численными затратами и точностью вычислений. Скорость турбулентных пульсаций и масштаб длины вихря находятся с использованием отдельных уравнений переноса (отсюда термин 'модель двух уравнений').

k - кинетическая энергия турбулентности, определяется как дисперсия изменений скорости, $\text{м}^2/\text{с}^2$.

ε – скорость изменения кинетической энергии, $\text{м}^2/\text{с}^3$.

В модель введены пристенные функции, т.е. для этих моделей в уравнения вводятся дополнительные функции, отвечающие за влияние стенок на турбулентность.

k-ε модель

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \text{grad}k \cdot \bar{\vec{v}} = P_k + \text{div} \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_k} \right) \text{grad}k \right) - \varepsilon - f_k,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{grad}\varepsilon \cdot \bar{\vec{v}} = C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k + \text{div} \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad}\varepsilon \right) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - f_\varepsilon,$$

генерация

турб. диффузия

диссипация

$$\mathbf{v}_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Введены четыре пристенные функции – f_k , f_2 , f_ε и f_μ , зависящие от k и ε .

$$f_k = 2\nu \left(\text{grad}\sqrt{k} \cdot \text{grad}\sqrt{k} \right),$$

$$\text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}.$$

$$f_\varepsilon = -2\nu\nu_t \left(\text{grad}(\text{grad}\bar{\vec{v}}) \cdots \text{grad}(\text{grad}\bar{\vec{v}}) \right),$$

$$C_\mu = 0,09$$

$$C_1^\mu = 1,44$$

$$C_2 = 1,92$$

$$\sigma_k = 1$$

$$\sigma_\varepsilon = 1,3$$

$$f_\mu = e^{-\frac{3,4}{(1+0,02\text{Re}_t)^2}},$$

$$f_2 = 1 - 0,3e^{-\text{Re}_t^2}.$$

к-ε модель

К достоинствам к-ε -моделей относится высокая точность при расчете свободных сдвиговых течений.

Они достаточно универсальны и не требуют задания каких-либо дополнительных параметров.

Тем не менее, трудности, связанные с их применением в пристенных областях, заставляют исследователей изобретать все новые и новые модели.

Однако до настоящего времени никаких предпочтений среди моделей, базирующихся на концепции осреднения по Рейнольдсу, по существу, не наблюдается, поскольку не существует «универсальной» модели турбулентности.

Особенности:

Буферный слой не моделируется, для расчета скорости у стенки используются пристеночные функции. Благодаря быстрой сходимости и относительно низким требованиям к объему памяти к-ε модель очень популярна при решении промышленных задач. Она не очень точна при моделировании течений с положительным градиентом давления, струйных течений и течений в области с сильно искривленной геометрией. Модель хорошо подходит для решения задач внешнего обтекания тел сложной геометрической формы. Например, к-ε модель можно использовать для моделирования потока вблизи плохо обтекаемого тела

k- ω модель

Модель турбулентности - 'модель двух уравнений'.

Модель позволила существенно улучшить описание пристенных течений в рамках рассматриваемого класса моделей турбулентности благодаря использованию вместо уравнения для скорости диссипации ε уравнения для параметра ω .

k - кинетическая энергия турбулентности, определяется как дисперсия изменений скорости, $\text{м}^2/\text{с}^2$.

ω – удельная скорость диссипации турбулентной энергии, $1/\text{с}^3$.

$$\omega = \varepsilon / C_{\mu} k$$

Является более точной и надежной, в отличие от пред. модели, менее требовательна к качеству сетки при низкорейнольдсовой турбулентности.

k- ω модель

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* \omega k$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2$$

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta^* = 0.09, \sigma_k = 0.5, \sigma_\omega = 0.5, \beta = 0.075$$

$$\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t$$

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

k- ω модель

k- ω модель похожа на k- ϵ , только здесь решается уравнение для удельной скорости диссипации кинетической энергии ω .

В данной модели также используются пристеночные функции, поэтому требования к ресурсам памяти здесь те же, что и при использовании k- ϵ модели. Сходимость при использовании данной модели чуть медленнее и существенно зависит от начального приближения. Зачастую решение, полученное с помощью k- ϵ модели, используется в качестве хорошего начального приближения для расчета по k- ω модели.

Использование k- ω модели дает хорошие результаты в тех задачах, где k- ϵ модель недостаточно точна, например, при моделировании внутренних течений, течений по сильно искривленным каналам, отрывных и струйных течений. Хорошим примером применения k- ω модели является задача о течении жидкости через колено трубопровода.

Shear Stress Transport (SST)

Модель сдвиговых напряжений, модель Ментера

Включает в себя об два типа моделей ($k - \epsilon$ вдали от стенок, $k - \omega$ вблизи к стенкам), а также рассчитывает перенос напряжений сдвига турбулентности для определения турбулентной вязкости.

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* \omega k$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \rho \frac{\gamma}{\mu_T} P_k - \rho \beta \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega}$$

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{a_1 \omega} \right]}$$

$$F_2 = \tanh \left(\Phi_2^2 \right)$$

$$\Phi_2 = \max \left[2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right]$$

S – величина скорости деформации
 α^* - коэффициент уменьшения турбулентной вязкости
 y - расстояние до соседней поверхности (ширина канала)

$$\sigma_{k,1} = 1.176, \sigma_{\omega,1} = 2.0, \sigma_{k,2} = 1.0, \sigma_{\omega,2} = 1.168$$

$$a_1 = 0.31, \beta_{i,1} = 0.075, \beta_{i,2} = 0.0828$$

Shear Stress Transport (SST)

$$F_1 = \tanh(\text{arg}_1^4), \text{arg}_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega} \right), \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}d^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20}), D_{k\omega} = \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} (\nabla k) \bullet (\nabla \omega).$$

Shear Stress Transport (SST)

SST-модель представляет собой комбинацию k - ϵ , и k - ω моделей турбулентности: для расчета течения в свободном потоке используются уравнения k - ϵ модели, а в области вблизи стенок — уравнения k - ω модели. Пристеночные функции не используются.

Данная модель, пожалуй, дает наиболее точные результаты при расчете течений вблизи твердых стенок. Уравнения SST-модели не всегда быстро сходятся, поэтому часто для получения хорошего начального приближения используются решения, полученные с помощью k - ϵ - или k - ω модели.

В тестовом примере задачи об обтекании крылового профиля используется SST-модель турбулентности, полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Reynolds Stress Model (RSM) модель

Модель Рейнольдсовых напряжений имеет англоязычную аббревиатуру RSM (Reynolds Stress Model) и является одной из самых сложных моделей турбулентности предлагаемых CFX. Эта модель не использует предположение о изотропности турбулентной вязкости, а для замыкания уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, решает уравнения переноса для Рейнольдсовых напряжений совместно с уравнением для скорости турбулентной диссипации ϵ .

Так как модель RSM описывает эффекты кривизны, закрученности, вращения, резкого изменения напряжений между слоями более строго, чем одно- и двух- параметрические модели турбулентности, то она имеет больший потенциал для более точного расчета сложных потоков. Однако RSM модель все-таки имеет некоторые упрощения, которые были приняты для составления уравнений переноса Рейнольдсовых напряжений, что было необходимо для замыкания системы уравнений Навье-Стокса.

Использование этой модели турбулентности рекомендуется в случаях, когда анизотропность турбулентного потока оказывает доминирующее влияние на характер турбулентного течения (циклоны, сильно закрученные потоки в камерах сгорания, вращающиеся области, вторичные течения в каналах, вызванные большими нормальными напряжениями).

Основные проблемы, возникающие при использовании моделей рейнольдсовых напряжений

1. Сложность системы дифференциальных уравнений (не менее 7 уравнений для турбулентности), требующих для решения больших вычислительных ресурсов.

2. Эта система уравнений кроме громоздкости отличается сильной нелинейностью, что приводит к необходимости использовать различные ухищрения для улучшения устойчивости и сходимости. К таковым относятся специальные схемы, векторные прогонки и использование сложных алгоритмов демпфирования. При решении столь нелинейной системы уравнений возникают численные проблемы, для решения которых приходится пользоваться специальными приемами.

3. Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения. Необходимо проверять и выбраковывать результаты «дефектных» расчетов. Очевидно, что такой инструмент неприменим для «инженерного» использования.

4. Возникают проблемы с постановкой граничных условий на свободных границах для напряжений.

5. При расчете задач теплопередачи необходимо решать еще 3 дополнительных уравнения для корреляций скорости и температуры, что еще больше усложняет систему.

Reynolds Stress Model (RSM) модель

Reynolds Stress Model - LRR-IP

SSG Reynolds Stress Model - SSG

QI Reynolds Stress Model - LRR-IQ

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \tau_{ij} \right). \end{cases}$$

$$\tau_{ij}^T = \rho \overline{u_i' u_j'}$$

индексы $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ определяют направления декартовой системы координат x_i ; u_i, u_j — составляющие скорости; ρ — плотность жидкости; μ — коэффициент молекулярной вязкости; p — давление; t — время.

Система является незамкнутой из-за неизвестной связи между тензором рейнольдсовых напряжений τ_{ij} и осредненными параметрами гидродинамического потока ($\overline{u_i' u_j'}$ — осреднение пульсаций компонент скорости). Замыкание системы определяющих уравнений и моделирование турбулентности является одной из наиболее сложных задач вычислительной гидродинамики.

Reynolds Stress Model (RSM) модель

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = k \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right), \quad a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij},$$

где k — кинетическая энергия турбулентности;

a_{ij} — компоненты тензора анизотропии;

δ_{ij} — символ Кронекера.

Тензор анизотропии является линейной комбинацией шести тензорных групп:

$$a_{ij} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_2 T_{2,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij} + \beta_9 T_{9,ij},$$

где β — коэффициенты.

Тензорные группы T_{ij} обладают свойством симметрии и зависят только от компонент тензора скоростей деформации S_{ij} и вихревого тензора Ω_{ij} :

$$S_{ij} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

τ — турбулентный масштаб времени, k/ε .

Тензорные группы T_{ij}

$$T_1 = S$$

$$T_2 = S^2 - \frac{1}{3} \{S^2\}I$$

$$T_3 = \Omega^2 - \frac{1}{3} \{\Omega^2\}I$$

$$T_4 = S\Omega - \Omega S$$

$$T_5 = S^2\Omega - \Omega S^2$$

$$T_6 = S\Omega^2 + \Omega^2 S - \frac{2}{3} \{S\Omega^2\}I$$

$$T_7 = S^2\Omega^2 + \Omega^2 S^2 - \frac{2}{3} \{S^2\Omega^2\}I$$

$$T_8 = S\Omega S^2 - S^2\Omega S$$

$$T_9 = \Omega S\Omega^2 - \Omega^2 S\Omega$$

$$T_{10} = \Omega S^2\Omega^2 - \Omega^2 S^2\Omega$$

Reynolds Stress Model (RSM) модель

При описании турбулентности моделями семейства RSM для вычисления тензора τ_{ij} решаются уравнения переноса для каждой из его компонент, получающиеся из исходных уравнений Навье–Стокса с помощью операции осреднения:

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = - \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i u'_j}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u'_j p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u'_i p}}{\partial x_j} \right) \right] - \left[\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right] + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) -$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Слагаемые в правой части отвечают, соответственно, за турбулентную диффузию, генерацию энергии за счет градиента средней скорости, корреляцию пульсаций давления со скоростями деформации и вязкую диссипацию.

$$- 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k},$$

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = k \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right), \quad a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij},$$

где k — кинетическая энергия турбулентности;

a_{ij} — компоненты тензора анизотропии;

δ_{ij} — символ Кронекера.