



«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Дискретное преобразование  
Фурье. Введение*

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)

# ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (1)

**Цель:** изучить дискретное преобразование Фурье (ДПФ) **периодических последовательностей** и последовательностей **конечной длины** и овладеть программными средствами его вычисления в MATLAB с использованием алгоритмов БПФ.

**ДПФ:** пара взаимно однозначных преобразований – **прямое дискретное преобразование Фурье** (прямое ДПФ) и **обратное дискретное преобразование Фурье** (обратное ДПФ).

Англоязычная терминология:

- 1) **direct Fourier transform (DFT)** – прямое ДПФ;
- 2) **inverse discrete Fourier transform (IDFT)** – обратное ДПФ.



# ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (2)

## Прямое ДПФ

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

## Обратное ДПФ

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$x(n)$  – исходный сигнал (исходная последовательность)

$X(k)$  – результат вычисления ДПФ;  $N$  – длина последовательности

$n$  – дискретное нормированное время (номер отсчета);  $n = nT/T$

$T$  – период дискретизации;  $k$  – дискретная нормированная частота;

$k = k\Delta\omega/\Delta\omega$  – период дискретизации (разрешение) по частоте

те

# ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (3)

$$\Delta\omega = \omega_d / N = \hat{\omega} / NT$$

$x(n)$  – конечная последовательность (содержит  $N$  отсчетов), т.е. периодическая последовательность во временной области длины  $N$   
 $X(k)$  – конечное ДПФ, т.е. периодическая последовательность в частотной области с периодом  $N$

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \text{ – поворачивающий множитель}$$

$$X(k) W_N^{-nk} \text{ – дискретная гармоника } k$$

$$f = k f_d / N \text{ – значения абсолютных частот дискретных гармоник}$$



# ДПФ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ДПФ  $X(k)$  представляет собой ее **спектр** с точностью до постоянного множителя  $(1/N)$ .

Модуль ДПФ – **амплитудный спектр периодической последовательности**.

Аргумент ДПФ – **фазовый спектр периодической последовательности**.

**Амплитудный спектр вещественной периодической последовательности**

Амплитудный спектр равен модулю ДПФ  $|X(k)|$  с точностью до постоянного множителя:

$$\begin{cases} 1/N, & k = 0; \\ 2/N, & k \neq 0. \end{cases}$$

# ДПФ КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ДПФ  $X(k)$  представляет собой  $N$  дискретных равноотстоящих значений ее **спектральной плотности** на периоде.

Модуль ДПФ – **четная функция частоты**.

Аргумент ДПФ – **нечетная функция частоты**.

**Точное выделение гармоник**

$$\Delta f = f_{\text{д}} / N$$

$$f_i = q \Delta f, q = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

$$P_i = \frac{NT}{T_i} = \frac{Nf_i}{f_{\text{д}}} \in Z$$

Иначе возникает **эффект растекания спектра (spectrum leakage)**.

# ЭФФЕКТ РАСТЕКАНИЯ СПЕКТРА

Эффект растекания спектра **принципиально неустраним**, однако:

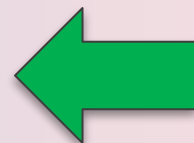
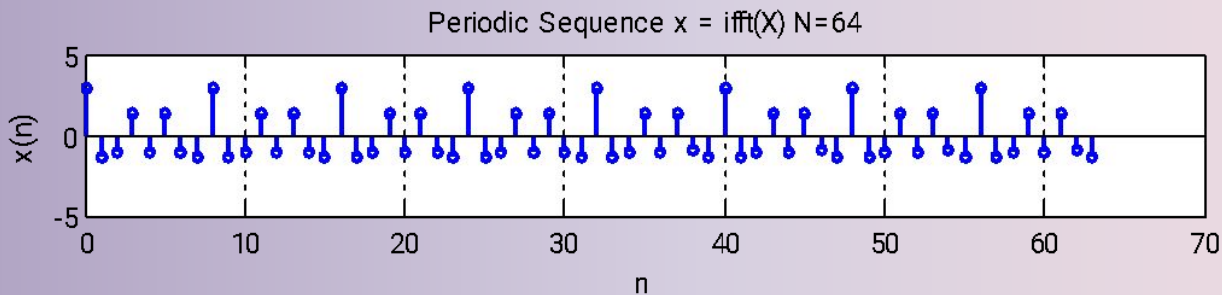
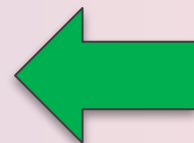
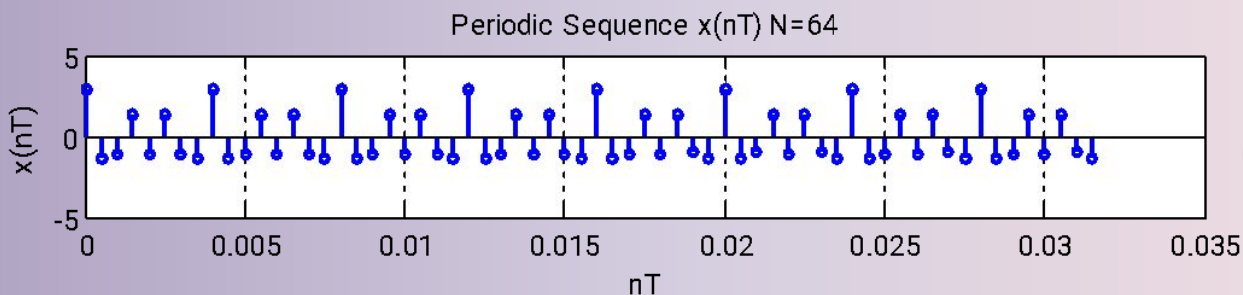
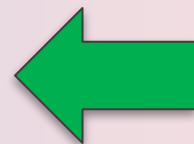
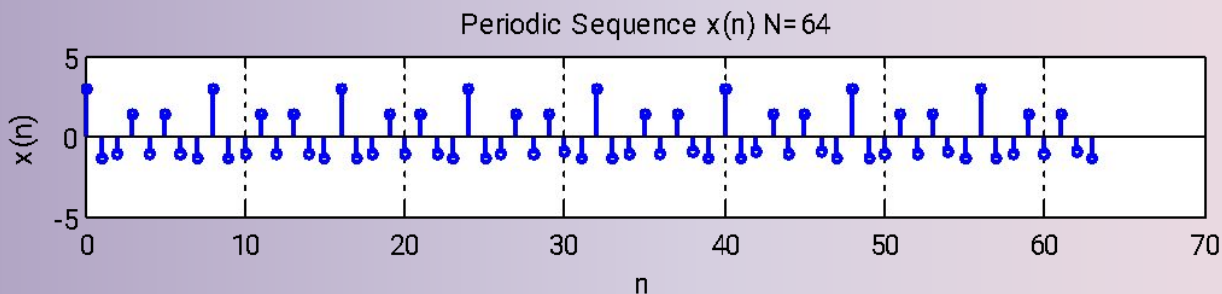
- 1) во многих случаях данным эффектом можно пренебречь;
- 2) могут быть применены **оконные функции** (весовые функции) путем умножения оконной функции на сигнал.

При этом на границах анализируемого фрагмента **значения становятся близкими к нулю**, и при периодическом продолжении **уменьшается величина разрыва**, что позволяет частично справиться с эффектом растекания спектра.

Необходимо **искать компромисс**:

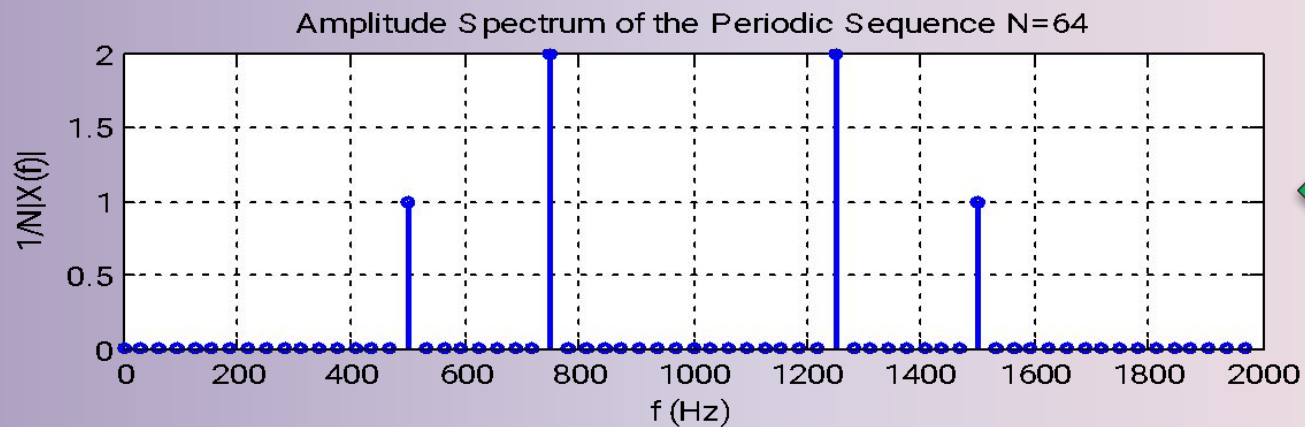
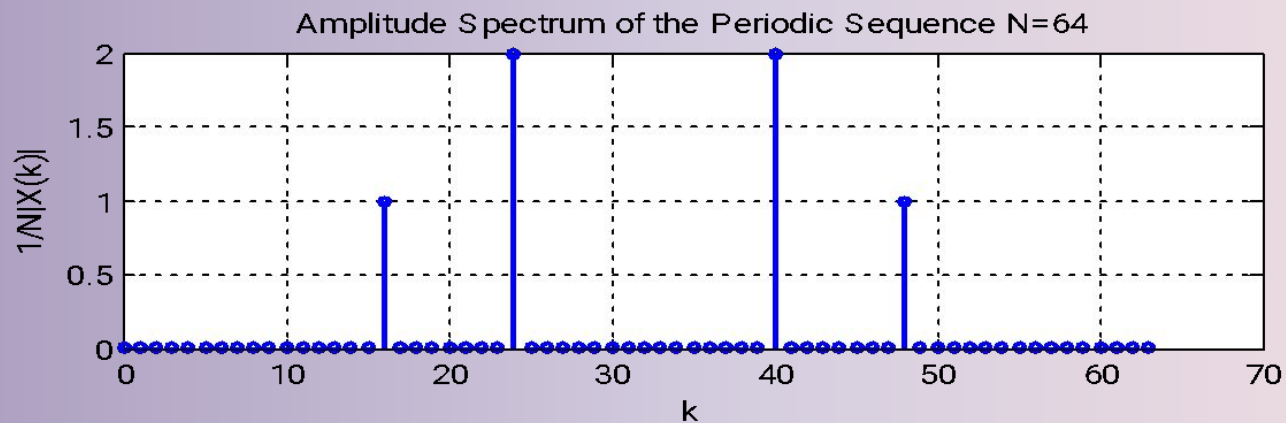
- 1) **Уменьшение** эффекта растекания спектра (**уменьшается** количество побочных составляющих в спектре);
- 2) **Ухудшение** разрешения по частоте.

## ПРИМЕР (1)



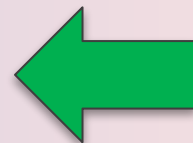
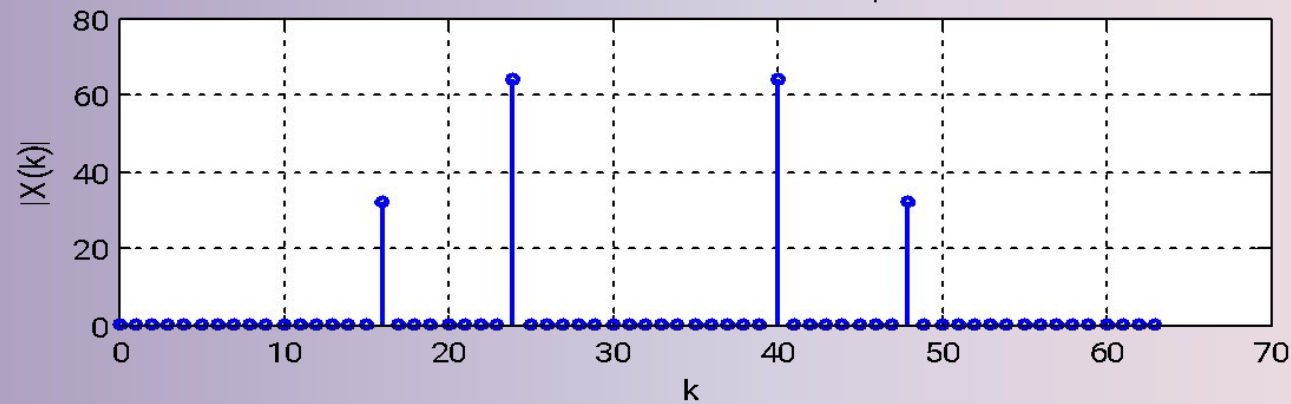


## ПРИМЕР (2)

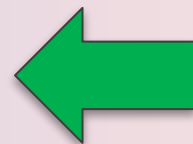
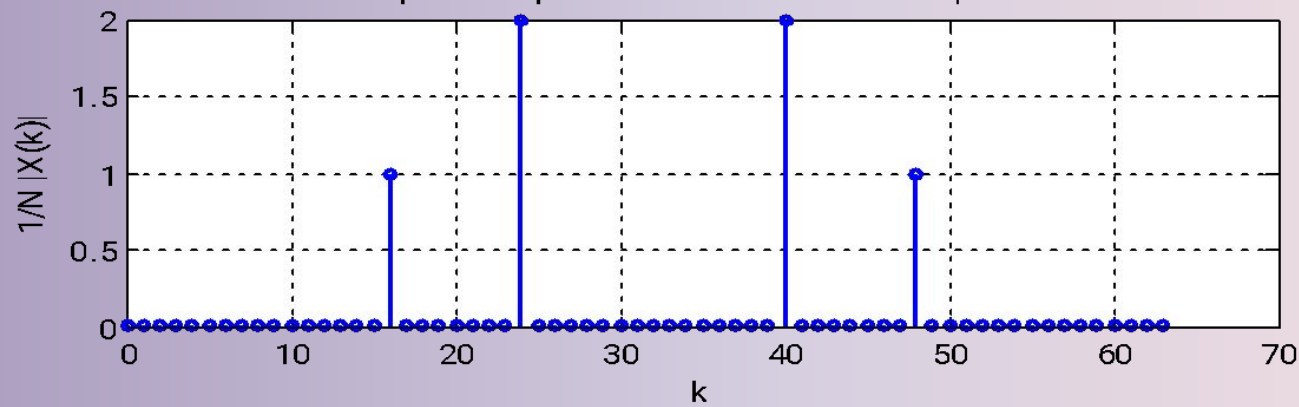


## ПРИМЕР (3)

DFT Modulus of the Finite Sequence



Amplitude Spectrum of the Periodic Sequence





«Методы и алгоритмы  
цифровой обработки сигналов  
на базе MATLAB»

*Дискретное преобразование  
Фурье. Введение*

Клионский Д.М. – к.т.н., доцент кафедры  
математического обеспечения и применения ЭВМ (МОЭВМ)