Тема 2. Динамические характеристики линейных систем

Юркевич В.Д.

Понятие «Система»

Система = ?

Понятие «Система» имеет различное содержание в зависимости от предметной области

Примеры систем:

- **Технические системы (двигатель, химический реактор, автомобиль, самолет, телефон, компьютер)**
- **Живые системы (клетка, бактерия, организм)**
- **Природные системы (солнечная система, галактика)**
- **Социальные системы (семья, общество, государство, коллектив)**
- **Информационные системы (базы данных, Интернет)**

Юркевич В.Д.

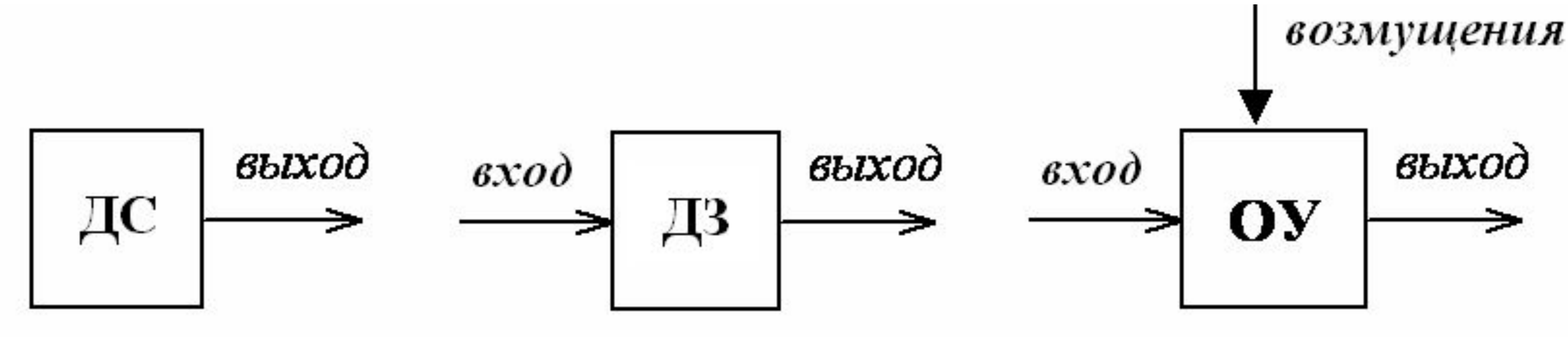
Понятие «Динамическая система»

Система - совокупность элементов, объединенных общим режимом функционирования.

В дисциплинах по автоматике и управлению в технических системах базовым является понятие – «динамическая система».

Динамическая система - система, процессы в которой изменяются во времени.

Динамическая система - динамическое звено

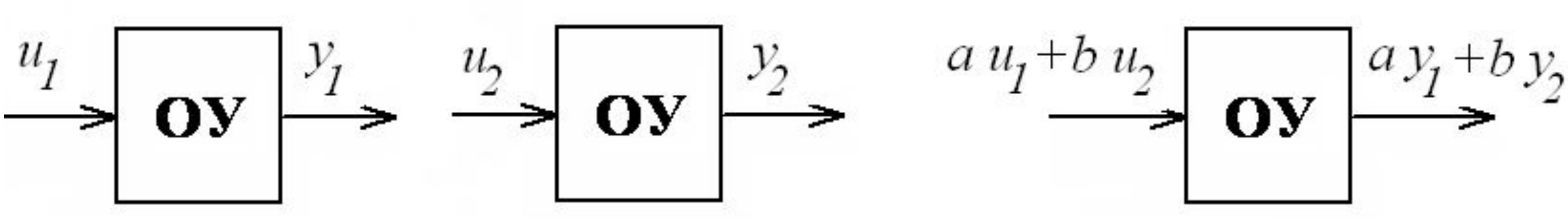


- ДС – динамическая система
- ДЗ –динамическое звено
- ОУ – объект управления
- Вход = Управляющее воздействие = Управление
- Внешние воздействия:
  - Управляющие воздействия (вход, управление)
  - Возмущающие воздействия (возмущение)

Юркевич В.Д.

Динамическая характеристика

- ***Динамическая характеристика*** - любое соотношение, заданное аналитически, таблицей или графиком, которое позволяет описать поведение динамической системы (объекта управления) во времени
- ***Линейная динамическая система (линейный объект управления*** - справедлив принцип суперпозиции



Динамические характеристики линейных систем (объектов управления)

- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Этапы построения математической модели ОУ

- Построить описательную модель объекта управления
- Выделить следующие группы переменных:
  - Управляющие воздействия (управление, вход)
  - Выходные переменные (выход)
  - Возмущающие воздействия (возмущение)
  - Вектор состояния

- Записать основные физические законы, описывающие процессы в ОУ
- Записать уравнения, связывающие все переменные между собой

Динамические характеристики линейных систем

- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Дифференциальные уравнения

- ***Переход от одного дифференциального уравнения высокого порядка к системе уравнений первого порядка (к форме Коши)***
- ***Матричная форма записи системы дифференциальных уравнений***
- ***Переход от системы дифференциальных уравнений к структурной схеме***

Переход к системе дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\varphi(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \ldots, x^{(1)}, x) = 0$$

$$x^{(n)} = \tilde{\varphi}(x^{(n-1)}, \ldots, x^{(1)}, x)$$

$$\dot{X} = f(X)$$

$$X \in R^n, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Система дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{X} = f(X)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

Автономная динамическая система

Динамическая система называется автономной, если ее модель задана системой однородных дифференциальных уравнений в которых отсутствуют управляющие и возмущающие воздействия

$$\dot{X} = f(X)$$

Условие равновесия динамической системы

Рассмотрим автономную динамическую систему, модель которой задана системой однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = f(X)$$

$$\dot{X} = f(X) \rightarrow \boxed{\dot{X} = 0} \rightarrow f(X) = 0$$

X_0 **называется точкой равновесия динамической системы, если** $f(X_0) = 0$

Уравнение в отклонениях от точки равновесия динамич.системы (линеаризация)

$$\dot{X} = f(X) \rightarrow f(X_0) = 0 \rightarrow X_0 = const$$

$$X = X_0 + Z \rightarrow \dot{X} = \dot{X}_0 + \dot{Z} \rightarrow \dot{X} = \dot{Z}$$

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \rightarrow \frac{d}{dt}(X_0 + Z) = f(X_0 + Z)$$

$$\frac{d}{dt}Z = f(X_0) + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=X_0} \right) Z + \cdots$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{X=X_0} \rightarrow \boxed{\dot{Z} = AZ}$$

Неавтономная динамическая система

Динамическая система называется неавтономной, если ее модель задана системой неоднородных дифференциальных уравнений в которых присутствуют управляющие или возмущающие воздействия

Уравнение состояния: $\dot{X} = F(X, u, f)$

Уравнение выхода: $y = \phi(X, u, f)$

Условие равновесия динамической системы

$$\dot{X} = F(X, u, f) \qquad X = X_0 = const \qquad \dot{X} = 0$$

$$y = \phi(X, u, f) \qquad u = u_0 = const \qquad F(X_0, u_0, f_0) = 0$$

$$f = f_0 = const \qquad y_0 = \phi(X_0, u_0, f_0)$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ u_0 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

$$X = X_0 + \Delta X$$

$$u = u_0 + \Delta u$$

$$f = f_0 + \Delta f$$

Юркевич В.Д.

Уравнение вектора состояния в отклонениях от состояния равновесия

$$\dot{X} = \dot{X}_0 + \Delta\dot{X} = \Delta\dot{X}$$

$$\Delta\dot{X} = F(X_0 + \Delta X, u_0 + \Delta u, f_0 + \Delta f)$$

$$\Delta\dot{X} = F(X_0, u_0, f_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial X}\right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial f}\right]_{\bar{X}} \Delta f + \cdots$$

$$\Delta\dot{X} = \left[\frac{\partial F}{\partial X}\right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial f}\right]_{\bar{X}} \Delta f$$

Уравнение выхода в отклонениях от состояния равновесия

$$y = \phi(X, u, f)$$

$$y_0 = \phi(X_0, u_0, f_0)$$

$$\begin{aligned}
\Delta y &= y - y_0 \\
&= \phi(X, u, f) - \phi(X_0, u_0, f_0) \\
&= \phi(X_0, u_0, f_0) + \left[\frac{\partial \phi}{\partial X}\right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}\right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial \phi}{\partial f}\right]_{\bar{X}} \Delta f \\
&\qquad + \cdots - \phi(X_0, u_0, f_0)
\end{aligned}$$

$$\Delta y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial X}\right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}\right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial \phi}{\partial f}\right]_{\bar{X}} \Delta f$$

Линейная модель ОУ в отклонениях от состояния равновесия

$$\Delta\dot{X} = \left[\frac{\partial F}{\partial X}\right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial F}{\partial u}\right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial F}{\partial f}\right]_{\bar{X}} \Delta f$$

$$\Delta y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial X}\right]_{\bar{X}} \Delta X + \left[\frac{\partial \phi}{\partial u}\right]_{\bar{X}} \Delta u + \left[\frac{\partial \phi}{\partial f}\right]_{\bar{X}} \Delta f$$

$$\dot{X} = AX + Bu + f_1$$

$$y = CX + Du + f_2$$

Линейная модель объекта управления

$$\dot{X} = AX + Bu + f_1, \;\; X(t=0) = X^0$$

$$y = CX + f_2$$

$$X \in R^n, u \in R^1, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times 1}, C \in R^{1\times n}$$

- ***Вектор состояния –*** X
- ***Начальные условия -*** $X(t=0) = X^0$
- ***Выход -*** y
- ***Вход -*** u
- ***Возмущения -*** $f_1, \; f_2$

Юркевич В.Д.

Линейная модель объекта управления в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ \vdots \\ f_{1,n-1} \\ f_{1n} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + f_2$$

Юркевич В.Д.

Динамические характеристики линейных систем

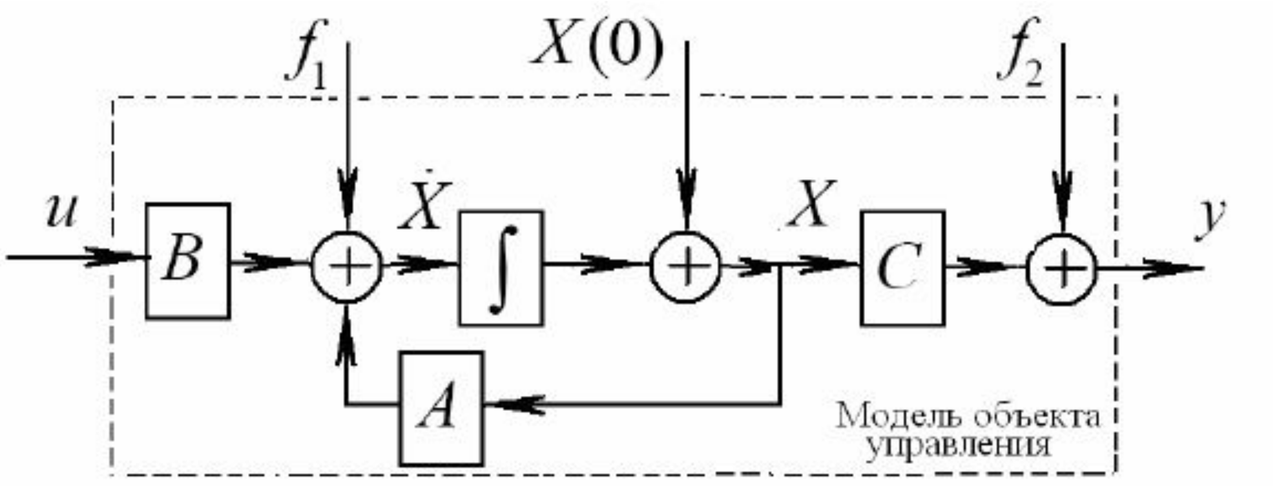
- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Структурная схема модели ОУ

$$\dot{X} = AX + Bu + f_1, \quad X(t=0) = X^0$$

$$\int_0^t \dot{X}(\tau)d\tau = X(t) - X(0) = \int_0^t \left[AX(\tau) + Bu(\tau) + f_1(\tau)\right]d\tau$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left[AX(\tau) + Bu(\tau) + f_1(\tau)\right]d\tau$$

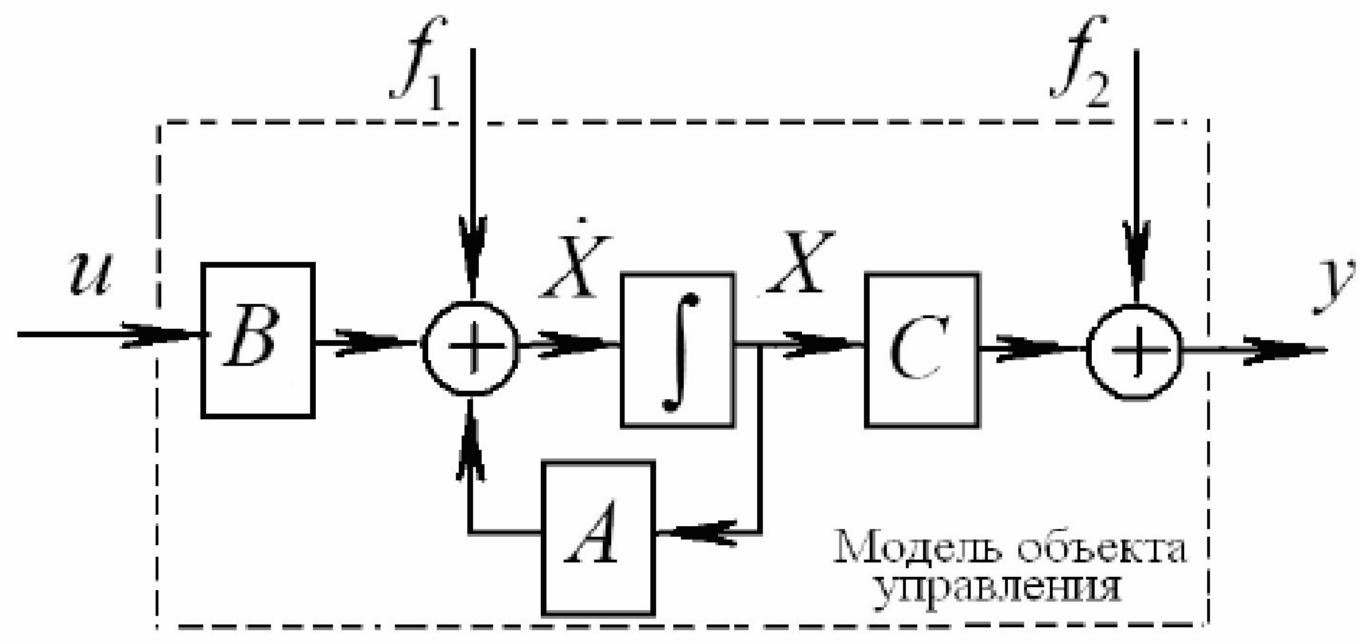


$$y = CX + f_2$$

Юркевич В.Д.

Структурная схема модели ОУ при нулевых начальных условиях

При $X(0) = 0$



Пример перехода от системы дифф. уравнений к структурной схеме

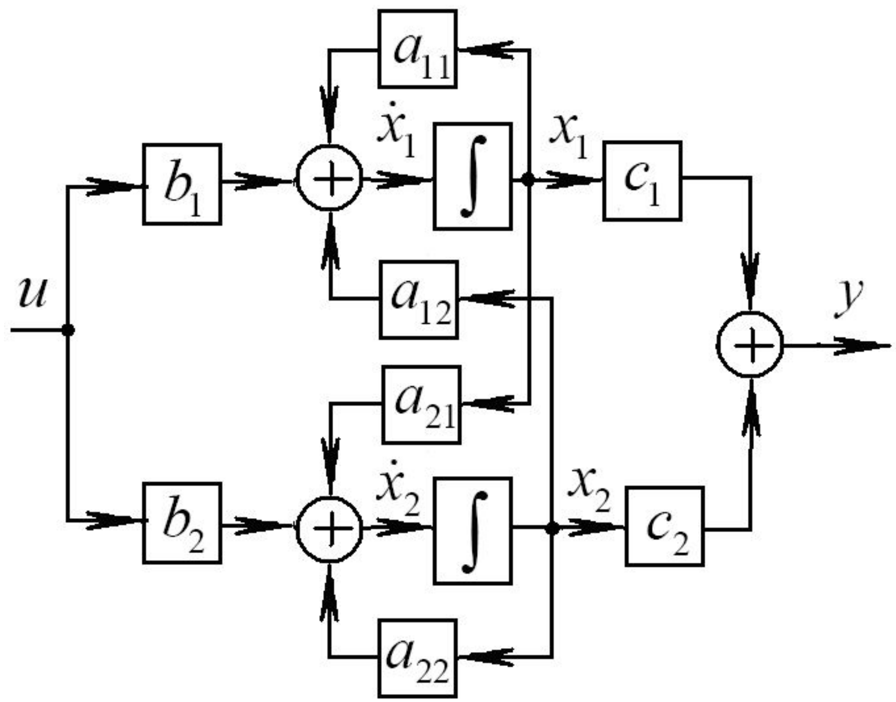
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2$$



Юркевич В.Д.

Динамические характеристики линейных систем

- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Преобразование Лапласа

$$f(t) \Rightarrow F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\frac{df(t)}{dt} \Rightarrow L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

$$f^{(2)}(t) \Rightarrow L\left\{f^{(2)}(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)$$

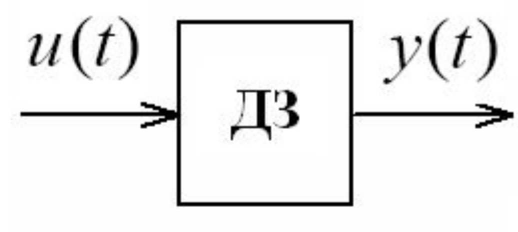
$$f^{(n)}(t) \Rightarrow$$

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

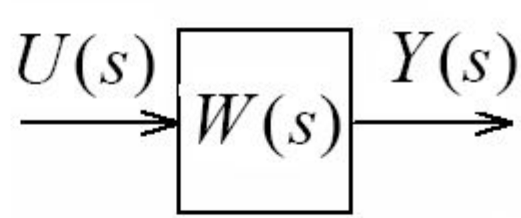
$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Передаточная функция

$$u(t) \Rightarrow U(s) = \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt$$



$$y(t) \Rightarrow Y(s) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt$$



$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Определение 1: Передаточной функцией динамического звена называется отношение изображения по Лапласу выходного сигнала к изображению по Лапласу входного сигнала, полученные <u>при нулевых начальных условиях</u>.

Пример (1)

$$y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t)$$

$$L\left\{y^{(2)}(t)\right\}+L\left\{a_1y^{(1)}(t)\right\}+L\left\{a_0y(t)\right\}$$

$$=L\left\{b_1u^{(1)}(t)\right\}+L\left\{b_0u(t)\right\}$$

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-y^{(1)}(0)\right]+a_1\left[sY(s)-y(0)\right]+a_0Y(s)$$

$$=b_1\left[sU(s)-u(0)\right]+b_0U(s)$$

$$\left[s^2+a_1s+a_0\right]Y(s)$$

$$=\left[b_1s+b_0\right]U(s)+\left[s+a_1\right]y(0)+y^{(1)}(0)+b_1u(0)$$

Пример (2)

$$y(0)=0,\ \ y^{(1)}(0)=0,\ u(0)=0$$

$$\left[s^2+a_1s+a_0\right]Y(s)=\left[b_1s+b_0\right]U(s)$$

$$Y(s)=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}U(s)$$

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

Юркевич В.Д.

Операторный способ определения передаточной функции

Оператор дифференцирования: $p = d\,/\,dt$

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

Операторная форма записи дифференциального уравнения: $p^2 y(t) + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_1 p u(t) + b_0 u(t)$

$$[p^2 + a_1 p + a_0]y(t) = [b_1 p + b_0]u(t)$$

Собственный оператор ДЗ: $A(p) = p^2 + a_1 p + a_0$

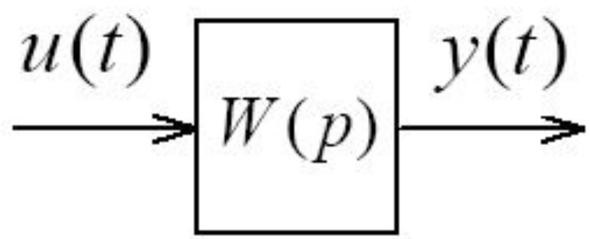
Оператор входа ДЗ: $B(p) = b_1 p + b_0$

$$y(t) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0} u(t) \;\Rightarrow\; W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$$

Операторный способ определения передаточной функции

Определение 2: Передаточной функцией динамического звена называется отношение оператор входа $B(p)$ динамического звена к собственному оператору $A(p)$ данного звена.

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$



Динамические характеристики линейных систем

- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Частотные характеристики

$$W(s) \Rightarrow s = j\omega \Rightarrow W(j\omega)$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$W(j\omega)$ - частотная передаточная функция

$P(\omega)$ - вещественная частотная функция (ВЧФ)

график $P(\omega)$ - вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$Q(\omega)$ - мнимая частотная функция (МЧФ)

график $Q(\omega)$ - мнимая частотная характеристика (МЧХ)

Юркевич В.Д.

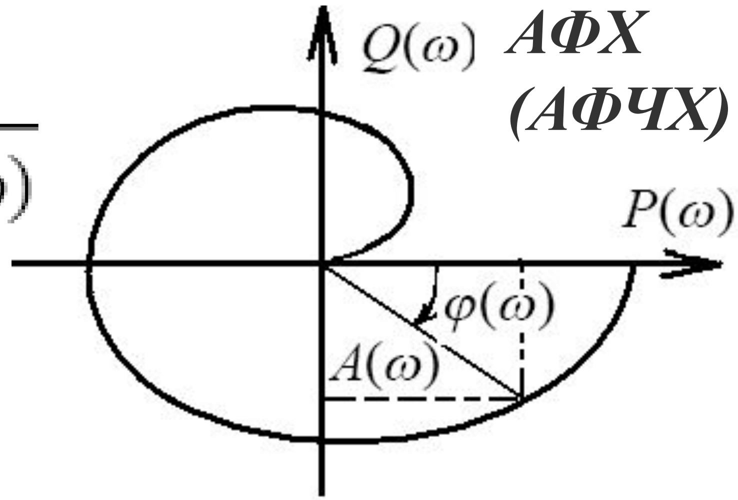
Частотные характеристики

$$W(j\omega)=\left|W(j\omega)\right|e^{j\arg W(j\omega)}$$

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

АФХ (АФЧХ)



$A(\omega)$ - амплитудная частотная функция (АЧФ)

график $A(\omega)$ - амплитудная частотная характеристика (АЧХ)

$\varphi(\omega)$ - фазовая частотная функция (ФЧФ)

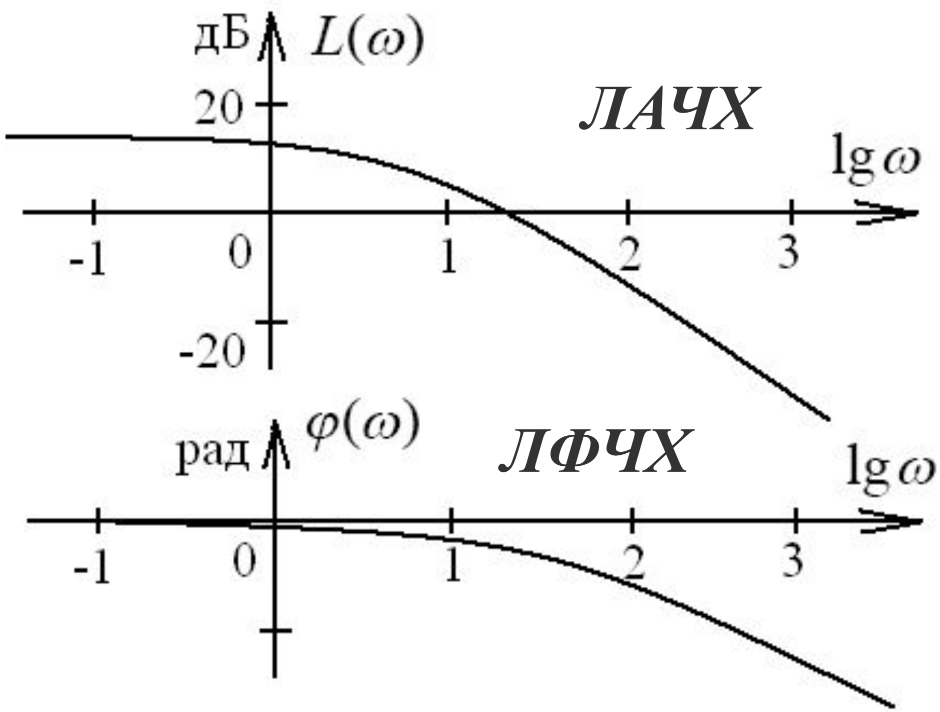
график $\varphi(\omega)$ - фазовая частотная характеристика (ФЧХ)

Логарифмические частотные характеристики

ЛАЧХ: $L(\omega) = 20\lg\left|W(j\omega)\right| = 20\lg A(\omega)$

ЛФЧХ: $\varphi(\omega)$

Логарифмические частотные характеристики имеют логарифмический масштаб изменения частоты по оси абсцисс

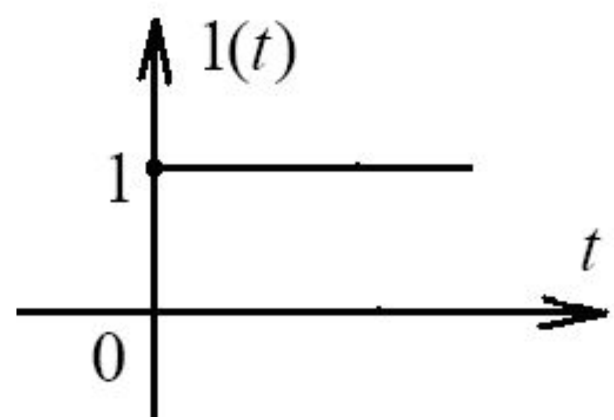


Динамические характеристики линейных систем

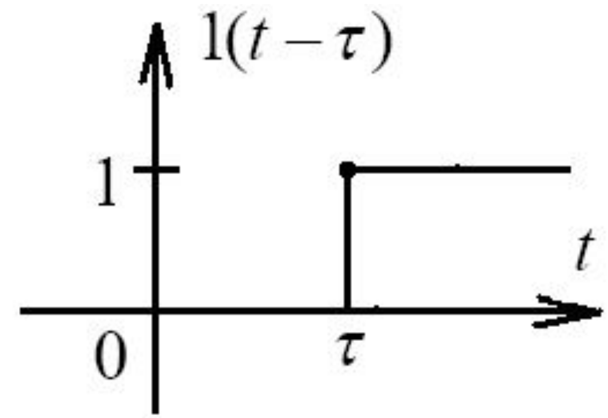
- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Единичное ступенчатое воздействие (функция Хэвисайда)

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$$



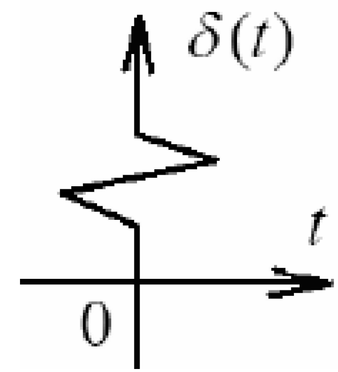
$$1(t-\tau)=\begin{cases}0, & t<\tau\\ 1, & t\ge \tau\end{cases}$$

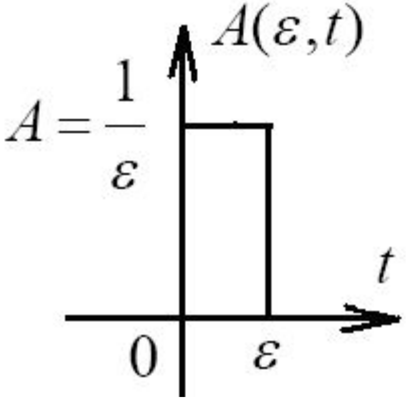


Единичное импульсное воздействие (функция Дирака)

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

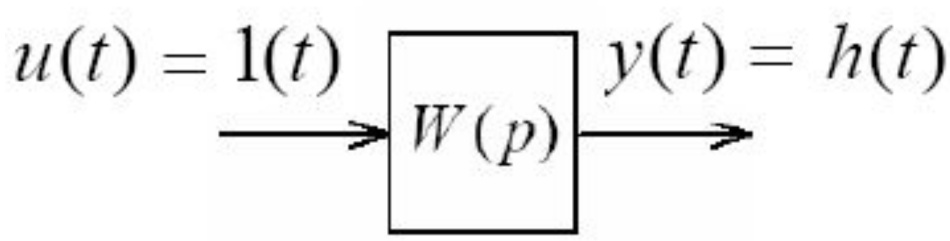




$$\varepsilon\to 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}A(\varepsilon,t)\to\delta(t)$$

Переходная функция звена (ПФ)



Определение: Переходной функцией динамического звена называется реакция его выхода на единичное ступенчатое воздействие на входе <u>при нулевых начальных условиях.</u>

График переходной функции называется *переходной характеристикой* динамического звена.

Юркевич В.Д.

Импульсная переходная функция звена (ИПФ) – весовая функция

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow y(t) = w(t)$$

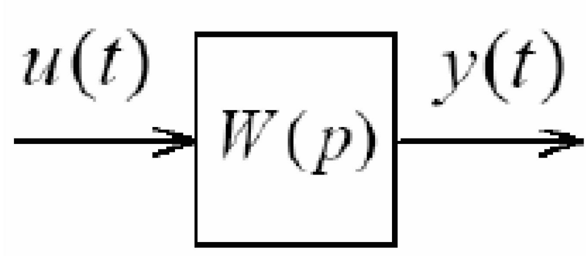
Определение: Импульсной переходной функцией динамического звена называется реакция его выхода на единичное импульсное воздействие на входе <u>при нулевых начальных условиях.</u>

График импульсной переходной функции называется *импульсной переходной характеристикой* динамического звена.

Динамические характеристики линейных систем

- ***Дифференциальные уравнения***
- ***Структурные схемы***
- ***Передаточные функции***
- ***Частотные характеристики***
- ***Временные характеристики***
- ***Модальные характеристики***

Модальные характеристики звена



$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Нули передаточной функции – корни полинома $B(p)$

Полюса передаточной функции – корни полинома $A(p)$

$A(p)$ - характеристический полином звена

$A(p) = 0$ - характеристическое уравнение звена

Общий вид передаточной функция линейной системы

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad X \in R^n$$

$$y = CX$$

$$pX = AX + Bu \;\Rightarrow\; (pI_n - A)X = Bu \;\Rightarrow$$

$$X = (pI_n - A)^{-1} Bu \;\Rightarrow y = C(pI_n - A)^{-1} Bu$$

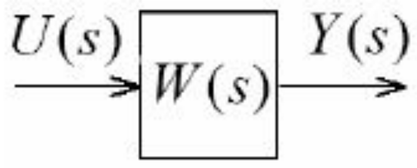
$$W(p) = C(pI_n - A)^{-1} B$$

$$W(p) = \frac{1}{\det(pI_n - A)} \cdot C \cdot adj(pI_n - A)^T \cdot B$$

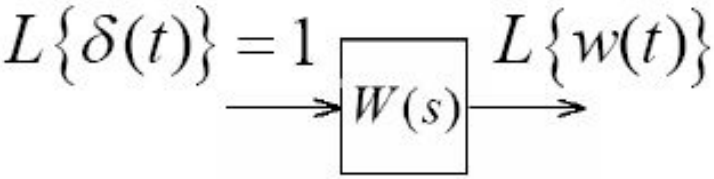
$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \;\Rightarrow\; A(p) = \det(pI_n - A)$$

Юркевич В.Д.

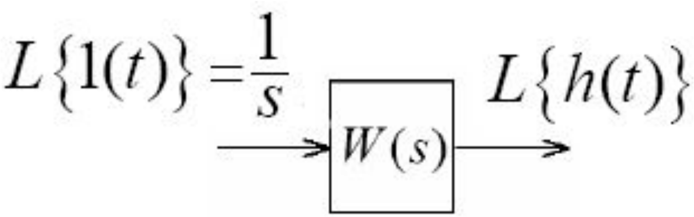
Взаимосвязь временных характеристик с передаточной функцией



$$\Rightarrow \quad Y(s) = W(s)U(s)$$



$$\Rightarrow \quad L\{w(t)\} = W(s)$$



$$\Rightarrow \quad L\{h(t)\} = W(s)\frac{1}{s}$$

$$W(s) = L\{w(t)\} = sL\{h(t)\} = sL\left\{\frac{d}{dt}h(t)\right\} \quad \Rightarrow$$

$$w(t) = \frac{d}{dt}h(t) \qquad h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau, \quad h(0) = 0$$

Юркевич В.Д.

Тема 3.
Типовые динамические звенья