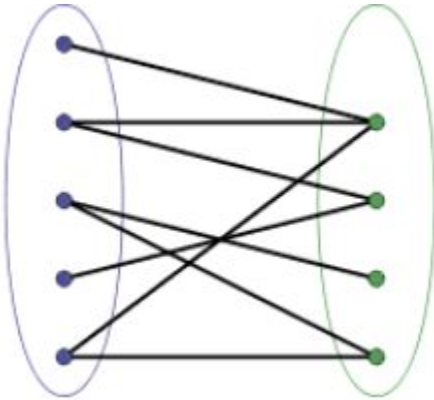
Задачи группировки в пары с учётом взаимных предпочтений

Фомина Ирина Александровна
доцент кафедры ИАНИ ИИТММ

ЗАДАЧА ПОИСКА ПАРОСОЧЕТАНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ В ДВУДОЛЬНОМ ГРАФЕ

Рассматривается неориентированный двудольный граф $G = (V, E)$, где $V = V1 \cup V2$, и $V1 \cap V2 = \emptyset$, E – множество рёбер, соединяющих вершины графа и никакое ребро не соединяет две вершины из одной доли.



Двудольные графы возникают при моделировании отношений между двумя различными классами объектов. Например, граф футболистов и клубов, ребро соединяет соответствующего игрока и клуб, если игрок играл в этом клубе. **Паросочетанием** в двудольном графе называется подмножество ребер $M \subseteq E$ такое, что никакие два ребра не имеют общих концов. Мощностью паросочетания назовём количество рёбер в нём. Наибольшим (или **максимальным**) паросочетанием назовём паросочетание, мощность которого максимальна среди всех возможных паросочетаний в данном графе. Если в паросочетании участвуют все вершины, то такое паросочетание называется **совершенным**.

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ

- При решении практических задачах вершины двудольного графа рассматриваются как некоторые объекты – люди или организации, например: пользователи и сервера, к которым они обращаются, абитуриенты и места в ВУЗах, куда они поступают, соискатели и работодатели.
- Д. Гейлом и Л. Шепли в 1962 г. была предложена теория обобщенных паросочетаний, где рассматриваются предпочтения участников относительно друг друга, а также существует возможность не соглашаться на предписанное распределение. Д. Гейл и Л. Шепли ввели понятие устойчивого обобщенного паросочетания, то есть такого распределения от которого участники не захотят отказаться. Ими было доказано, что такое паросочетание всегда существует, а также предложили алгоритм его построения.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задача 1: «выпускники – место распределения».

Распределение выпускников-медиков по клиникам. Имеется множество кандидатов и множество клиник, каждая клиника принимает определенное число выпускников, нужно найти устойчивое распределение кандидатов-медиков по клиникам.

Важно, что учитываются предпочтения клиник и выпускников по отношению друг к другу, кроме того, выпускники не обязаны поступать в какую-то клинику, если не хотят в ней работать, аналогично, клиника не обязана принимать медика, если не рассматривает его в качестве возможного работника, даже если остались свободные места. В теории обобщенных паросочетаний эта модель называется «один ко многим».

Задача 2: «соискатели – работодатели».

Работодатели определяют минимальные предпочтения относительно возраста, образования, квалификации кандидатов, дополнительных навыков. Кроме того, используются дополнительные методы оценки: психологические и личностные тесты, определяющие, насколько хорошо кандидаты могут выполнять рабочие задания.

Соискатели вакансий учитывают такие факторы, как предлагаемая заработная плата, возможность карьерного роста, наличие социального пакета, график работы, территориальное расположение места работы и прочее.

Необходимо составить устойчивые паросочетания между множествами работодателей и соискателей с учетом критериев предпочтения относительно друг друга.

Общая постановка задачи

В общем случае рассматриваются задачи группировки в пары элементов двух множеств так, чтобы каждую пару образовывали один элемент первого множества и один элемент второго множества. Считаются заданными взаимные предпочтения элементов одного множества на совокупности элементов другого множества.

Задача заключается в следующем: требуется сформировать пары таким образом, чтобы наилучшим образом удовлетворить предпочтения участников.

Классической интерпретацией этой задачи является задача о «женихах и невестах».

В зависимости от личных симпатий, каждая женщина ранжирует мужчин в порядке убывания своих предпочтений, а каждый мужчина ранжирует женщин. Предпочтения участников друг относительно друга являются строгими линейными порядками.

Задача о марьяже (стабильных браках)

Пусть имеется множество A= {a_1, ..., a_n} из n мужчин и множество B = {b_1, ..., b_n} из n женщин. Пусть запись $A \times B$ обозначает множество всех возможных упорядоченных пар в форме (a_i, b_j), где $a_i \in A$ и $b_j \in B$. Каждый мужчина $a_i \in A$ формирует оценки всех женщин. Говорим, что a_i предпочитает b_x женщине b_y, если a_i присваивает b_x более высокую оценку, чем b_y. Будем называть упорядоченную систему оценок a_i его ***списком предпочтений***. «Ничьи» в оценках запрещены. Аналогичным образом каждая женщина $b_j \in B$ назначает оценки всем мужчинам.

Паросочетанием S называется множество упорядоченных пар. Каждая из этих пар принадлежит декартову произведению $A \times B$, и обладает тем свойством, что каждый элемент A и каждый элемент B встречается не более чем в одной паре в S.

Идеальным паросочетанием S' называется паросочетание, при котором каждый элемент A и каждый элемент B встречается ровно в одной паре из S'.

Математическая модель

$\sum$ = <A, B, La, Lb>, где

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – совокупность элементов множества A

$B= \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – совокупность элементов множества B

$La = \{\langle_1, \langle_2, \ldots , \langle_m\}$ – система предпочтений элементов множества A

$L_b = \{l^1, l^2, \ldots, l^n\}$ – система предпочтений элементов множества B

Отношения l_i и l^j являются строгими линейными порядками.

Линейным порядком называется бинарное отношение P заданное на некотором множестве X и обладающее свойствами:

- связности, т.е. $\forall x, y \in X,$ если $x \neq y,$ то или xPy или yPx;
- транзитивности, т.е. $\forall x, y, z \in X,$ если $xPy, yPz,$ то xPz;
- асимметричности, т.е.$\forall x, y \in X,$ если $xPy,$ то $yP^c x$

Таким образом, для $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и несовпадающих элементов b_x, b_y из B имеет место одно из соотношений:

$b_x \langle_i b_y$ – означает, что b_y для a_i предпочтительнее, чем b_x

$b_y \langle_i b_x$ – означает, что b_x для a_i предпочтительнее, чем b_y

Аналогично, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и несовпадающих элементов a_x, a_y из A имеет место одно из соотношений:

$a_x \langle^j a_y$ – означает, что a_y для b_j предпочтительнее, чем a_x

$a_y \langle^j a_x$ – означает, что a_x для b_i предпочтительнее, чем a_y

Решениями задачи $\sum$ называются наборы пар S = $\{(a_{i_1}, b_{j_1}), (a_{i_2}, b_{j_2}) \ldots, (a_{i_n}, b_{j_n})\}$ такие, что каждый элемент множества A и каждый элемент множества B входят точно в одну пару из S.

Определение. *Решение S называется устойчивым по Гейлу-Шепли, если не существует не образующих в S пару элементов a_x и b_y таких что, исходя из имеющихся предпочтений этих элементов, им лучше образовать пару (a_x, b_y), чем участвовать в парах списка S.*

Рассмотрим следующую ситуацию: в S присутствуют две пары (a, b) и (a', b'), обладающие таким свойством, что a предпочитает b' женщине b, а b' предпочитает а мужчине a'. В таком случае ничто не помешает a и b' создать новую пару (a, b'). Но такая пара (a, b') является неустойчивой по отношению к S, так как пара (a, b') не принадлежит S, но каждый из участников a и b' предпочитает другого своему текущему партнеру в S. Алгоритм, предложенный Гейлом и Шепли, гарантирует отсутствие таких пар.

В основе алгоритма заложен принцип ***коалиционной устойчивости***. Он заключается в ***некомпроментируемости*** полученного решения: решение должно быть таким, чтобы не существовало другого решения, в котором никому из участников не хуже, а хотя бы одному лучше.

Алгоритм решения задачи

Режим А:

В первом туре все мужчины (a – элементы) делают предложение наиболее предпочтительной для него женщине (b – элементу).

1. Если женщина (b – элемент) получила несколько предложений, то из всех поступивших предложений выбирает наилучшее, а все остальные отвергает . Результатом первого тура является перечень сохраняемых предложений и перечень a – элементов, чьи предложения были отвергнуты.
2. Во втором туре мужчины (a – элементы), чьи предложения были отвергнуты, делают новые предложения следующей женщине (b – элементу) из своего списка предпочтений.
3. Если женщине пришло предложение лучше предыдущего, то она отвергает предложение прежнего претендента и выбирает наилучшее из поступивших предложений.
4. Шаги 1-4 повторяются до тех пор, пока на некотором k-ом туре не окажется пустым множество отвергнутых предложений.
5. Совокупность всех сохраняемых на момент завершения k-ого тура предложений образует матрицу, являющуюся решением задачи.

Действия алгоритма Гейла-Шепли в режиме В отличаются от режима А лишь в том, что a и b меняются между собой местами; в этом режиме предложения делают b_j, а a_i осуществляют свой выбор в случаях наличия нескольких предложений.

Доказательство устойчивости решения

Теорема Гейл и Шепли. Во всяком двудольном графе G = (V1; V2; E), для всяких предпочтений $\{\leq_v\}_{v \in V_1 \cup V_2}$ существует устойчивое паросочетание.

1. Алгоритм завершается за конечное число шагов.

На первом шаге каждый юноша делает предложение первой девушке в своём списке, а каждая девушка заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из числа сделавших ей предложение. На каждом следующем шаге каждый не помолвленный юноша делает предложение следующей девушке в своём списке — неважно, помолвлена она или нет. Если девушка получает предложение от более предпочтительного жениха, чем её текущий жених, то она расторгает текущую помолвку и заключает помолвку с наиболее предпочтительным женихом из тех, кто сделал ей предложение. Постепенно заключаются помолвки, всё более предпочтительные для невест, и всё менее предпочтительные для женихов. Ни один юноша не делает предложения одной и той же девушке дважды. Алгоритм завершается, поскольку на каждом шаге хотя бы один юноша делает предложение какой-то девушке, а так как каждый юноша последовательно движется по своему списку предпочтений, общее число шагов ограничено сверху суммой длин этих списков.

2. Полученное паросочетание M является устойчивым.

Для всякой не сложившейся пары $(v1;\ v2) \in E \setminus M$ нужно рассмотреть следующие случаи:

- если v1 никогда не делал предложения v2, это значит, что к моменту завершения алгоритма у него была более предпочтительная невеста, чем v2, и, женившись на ней, менять её на v2 он не захочет.
- если v1 делал предложение v2, но получил отказ, это значит, что уже к этому моменту у v2 был более предпочтительный жених, которого она могла сменить только на ещё более предпочтительного. Наконец, если v1 делал предложение v2, получил согласие, а потом был брошен ею, то и в этом случае у v2 есть более предпочтительный жених.

Таким образом, после завершения алгоритма не будет неустойчивых пар.

Время работы алгоритма — $O(n^2)$.

Анализ полученного решения

Определение. Устойчивое по Гейлу-Шепли решение $S = \{(a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}) \ldots, (a_{i_n}, b_{i_n})\}$ задачи группировки в пары назовём **А-наилучшим**, если для другого устойчивого решения $S_A = \{(a_{i_1}, b_{j_1}), (a_{i_2}, b_{j_2}) \ldots, (a_{i_n}, b_{j_n})\}$ при любом $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место либо $i_k = j_k$ (т.е. b_{i_k} и b_{j_k} – один и тот же элемент), либо $b_{j_k} <_k b_{i_k}$.

Определение. Устойчивое по Гейлу-Шепли решение $S = \{(a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}) \ldots, (a_{i_n}, b_{i_n})\}$ задачи группировки в пары назовём **А-наихудшим**, если для другого устойчивого решения $S' = \{(a_{i_1}, b_{j_1}), (a_{i_2}, b_{j_2}) \ldots, (a_{i_n}, b_{j_n})\}$ при любом $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место либо $i_k = j_k$ (т.е. b_{i_k} и b_{j_k} – один и тот же элемент), либо $b_{i_k} <_k b_{j_k}$.

Аналогичным образом определяются понятия **В**-наилучшего и **В**-наихудшего решений.

Лемма (свойство полученного решения для А элементов):

Из всех возможных решений алгоритмом Гейла-Шепли будет найдено решение, наилучшее для мужчин (каждый мужчина получает в жены женщину, наилучшую из всех возможных при условии корректности решения).

Лемма (свойство полученного решения для В элементов):

Из всех возможных решений алгоритмом Гейла-Шепли будет найдено решение, наихудшее для женщин.

Вывод

- Решение S_A задачи группировки в пары, конструируемое алгоритмом Гейла-Шепли в режиме А, является одновременно **А-наилучшим и В-наихудшим.**
- Решение S_B задачи группировки в пары, конструируемое алгоритмом Гейла-Шепли в режиме В, является одновременно **В-наилучшим и А-наихудшим.**

Утверждение:

Задачи группировки в пары элементов двух множеств **имеет единственное устойчивое** по Гейлу-Шепли решение, тогда и только тогда, когда решения S_A и S_B совпадают.

Обобщения задачи

1. Случай группировки с несколькими элементами

Каждый элемент a_i $(i = \overline{1, m})$ множества А (m – число элементов в множестве А) должен сгруппироваться с k_i элементами множества В. Каждый элемент множества В по-прежнему должен образовать пару с одним элементами множества А. В множестве В имеется n элементов, $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$.

Вместо множества мужчин введем множество преподавателей, а вместо множества женщин — множество студентов, подавших заявления на выбор научного руководителя. Причем для каждого руководителя задано ограничение на количество студентов, которыми он может руководить. Каждый преподаватель на основании средней оценки определяет приоритет того или иного студента. В свою очередь каждый студент на основании предложенной тематики и личных симпатий указывает свои предпочтения на множестве преподавателей. Необходимо сформировать списки распределения студентов по научным руководителям наиболее лучшим образов учитывающие предпочтения обеих сторон.

Модификация алгоритма

- ***Режим А:*** в первом туре каждый элемент a_i $(i = \overline{1,m})$ делает предложение k_i элементами множества В, стоящим в системе предпочтений на первых местах. В случае получения отказа в следующих турах предложения делаются очередным в иерархии a_i элементам множества В. Количество предложений в этом случае совпадает с количеством отказов. Механизм принятия и отвержения предложений b –элементами прежний: принимаются предложения тех a –элементов, которые для него являются лучшими.
- ***Режим В:*** по- прежнему каждый элемент множества В делает предложение одному элементу множества А. Каждый элемент a_i делает отказ, если количество поступивших предложений больше k_i. Отвергаются те предложения, которые не входят в совокупность k_i наилучших из числа поступивших на данный момент предложений.

Обобщения задачи

2. Случай неполных списков предпочтений

Задача группировки в пары в случае, когда в рейтингах, составленных как мужчинами, так и женщинами, могут участвовать не все представители противоположного пола.

Считается, что каждый человек вступает в брак только с тем, кто указан в списке его (её) предпочтений, то есть он (она) скорее останется холостым (незамужней), чем заключит брак с тем, кого в этом списке нет.

	b	
	a	a
a	c	c
A	B	C

Таблица 1

B	C	C
A	A	B
C	B	A
a	b	c

Таблица 2

Единственное возможное паросочетание здесь – (*Aa; Bb, Cc*). Однако оно неустойчиво из-за того, что для B более предпочтительным является элемент c. Таким образом, теорема существования устойчивых паросочетаний, справедливая для полных списков предпочтений, не распространяется на случай неполных списков.

Преобразование неполных списков в полные

- Полный список предпочтений можно создать из неполного, добавив нового мужчину (вдовца) и новую женщину (вдову), которые будут представлять худшие варианты друг для друга. Мужчину M поставим на последнее место в списке предпочтений (возможно, неполном) каждой женщины a_k, после чего дополним этот список всеми остальными мужчинами в произвольном порядке.
- Женщину w поставим на последнее место в списке предпочтений (возможно, неполном) каждого мужчины A_k, после чего дополним этот список всеми остальными женщинами в произвольном порядке. Тогда, если в найденном алгоритмом Гейла-Шепли паросочетании некоторая женщина будет замужем за таким фиктивным мужчиной, то это будет означать, что она на самом деле осталась без пары.
- В более общем случае, когда есть n мужчин и m женщин ($n \neq m$) данная задача сводится к описанной выше задаче. Для этого добавим $m-n$ фиктивных мужчин (если $m > n$), которые являются наименее привлекательными с точки зрения каждой из женщин. Аналогично надо добавить $n-m$ фиктивных женщин в случае, если $m<n$.

Выводы:

Теорема существования устойчивых паросочетаний, справедливая для полных списков предпочтений, не распространяется на случай неполных списков.

Теорема 1. *Полная система имеет устойчивое паросочетание с парой (a,b) тогда и только тогда, когда существует устойчивое паросочетание для неполной системы*.

Теорема 2. *Если полная система имеет устойчивое паросочетание с парой (a,b), то эта пара входит во все устойчивые паросочетания для этой системы*.

Таким образом, для того чтобы сделать вывод о существовании устойчивого паросочетания в неполной системе, достаточно получить одно устойчивое паросочетание для полной системы.

Если в нём нет пары *(a,b)*, то в неполной системе нет устойчивых решений. Если решение существует, то, исключив из найденного устойчивого решения полной системы пару *(a,b)*, мы получим устойчивое решение для неполной системы

Модификация алгоритма

Режим А:

1. В первом туре все a – элементы делают предложение наиболее предпочтительным для него b – элементам.
2. Если b – элемент получил несколько предложений, то из всех поступивших предложений выбирает наилучшее, а все остальные отвергает.
3. Если b – элемент получил только одно предложение от a – элемента, который не входит в его систему предпочтений, то его предложение также отвергается.
4. Таким образом, результатом первого тура является перечень сохраняемых предложений и перечень a – элементов, чьи предложения были отвергнуты.
5. Во втором и последующих турах a – элементы, чьи предложения были отвергнуты, делают новые предложения следующему b – элементу из своего списка предпочтений. Если список предпочтений a – элемента исчерпан, то в этом и последующих турах он не участвует.
6. Шаги 1- 3 повторяются до тех пор, пока на некотором k-ом туре не окажется пустым множество отвергнутых предложений.
7. Совокупность всех сохраняемых на момент завершения k-ого тура предложений образует матрицу, являющуюся решением задачи.
8. Алгоритм прекращает работу, когда больше нет мужчин, желающих сделать предложения, то есть каждый «свободный» мужчина сделал предложение всем женщинам, которых он предпочитает одиночеству, и был отвергнут.

Действия алгоритма Гейла-Шепли, функционирующего в режиме В, аналогичны режиму А.

Транспортная задача при наличии индивидуальных предпочтений

Транспортная задача в классическом варианте:

Существует m пунктов производства однородного продукта и n пунктов потребления. Считаются заданными объемы производства для каждого пункта производства и объёмы потребления для каждого пункта потребления, исчисляемые в некоторых единицах (в литрах, штуках, тоннах или других). При этом полагается, что суммарный объём производства равен суммарному объему потребления. Известны транспортные расходы, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта производства в пункт потребления.
Требуется составить такой план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления удовлетворяются полностью за счет полного вывоза продукта, произведенного в каждом из пунктов производства, а суммарные транспортные издержки являются минимальными.

В современных условиях рыночной экономики транспортные затраты, как правило, закладываются в себестоимость продукции. В связи с этим на первый план выдвигаются другие критерии, связанные со значениями некоторых параметров, таких как длина коммуникаций, наличие подъездных дорог, своевременность поставок, качество продукции, платёжеспособностью потребителей и т.д. На основании этих критериев формируются матрица предпочтений производителей на множестве потребителей и матрица предпочтений потребителей на множестве производителей.

Таким образом, задача заключается в нахождении оптимального плана поставок продукции от производителей к потребителям при наилучшем выполнении заданных предпочтений.

Математическая модель задачи

Исходные параметры:

<A, B, La, Lb, V, W>

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – совокупность пунктов производства;

$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ – совокупность пунктов потребления;

$La = \{\langle_1, \langle_2, \ldots, \langle_n\}$ — система предпочтений множества производителей на множестве потребителей;

$Lb = \{\langle^1, \langle^2, \ldots, \langle^m\}$ — система предпочтений множества потребителей относительно множества производителей.

$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, где v_i — объем производства пункта a_i, $i = 1, \ldots, n$;

$W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, где w_j — объем потребления пункта b_j, $j = 1, \ldots, m$;

$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{j=1}^{m} w_j$ – суммарный объем производства равен суммарному объему потребления

Варьируемые параметры:

$X = || x_{ij} ||$ – объём продукции, поставляемый из пункта a_i в пункт b_j.

Ограничения:

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = w_j,\ j = \overline{1,m}$ – потребности каждого потребителя должны быть полностью удовлетворены; (1)

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = v_i,\ i = \overline{1,n}$ – каждый пункт производства реализует весь объем производимого им продукта; (2)

$x_{ij} \geq 0$ – объем распределяемой продукции неотрицателен; (3)

Постановка задачи

Необходимо найти устойчивое решение, удовлетворяющее ограничениям (1) – (3) при наилучшем выполнении заданных предпочтений.

Определение. Решение X называется **устойчивым по ГейлуШепли,** если не существует такого пункта производства a_i и такого пункта потребления b_j, которым исходя из имеющихся предпочтений было бы лучше увеличить поставку x_{ij} на некоторую величину $\delta > 0$ за счёт соответствующего уменьшения поставок из a_i в менее предпочтительные для него пункты потребления и поставок в b_j из менее предпочтительных для него пунктов производства.

Алгоритм решения задачи

1. В режиме «А», тур первый, каждый пункт производства a_i делает предложение на поставку всей производимой им продукции наиболее предпочтительному для a_i пункту потребления.

2. Каждый пункт потребления b_j суммирует объёмы поступивших предложений (G_j – результат суммирования) и определяет соотношение между предложением и потребностью.

3. Если $G_j \leq W_j$ все предложения сохраняются, в противном случае bj должен отвергнуть предложения менее предпочтительных для него производителей. $G_j - W_j$ - суммарный объём отвергнутых предложений.

4. На втором и последующих этапах пункты производства, чьи предложения были отвергнуты на предыдущем этапе, делают предложения следующим в порядке убывания предпочтений элементам b_j. Переход к пункту 2.

5. Процесс завершается, когда множество отвергнутых предложений пунктов потребления оказалось пустым.

Режим «В» реализуется аналогично, но инициатором диалога являются пункты потребления, которые делают заявки наиболее предпочтительным для них пунктам производства.

Задачи простого обмена (Формирование цепочек произвольной длины)

Содержательная постановка задачи

В задаче простого обмена считается определённой совокупность участников. Известно множество предметов, принадлежащих участникам. Каждый участник обладает и может обладать только одним предметом. Для каждого участника указано имеет собственную систему предпочтений на множестве желанных для него предметов. Предпочтения участников задаются с помощью бальных оценок, выставленных им для каждого предмета из заданного множества предметов. Более предпочтительным предметам выставляются более высокие оценки.

Задача заключается в следующем: требуется перераспределить предметы между участниками таким образом, чтобы наилучшим образом удовлетворить их предпочтения

Математическая модель задачи

Исходные параметры:

Задачу группировки с учётом односторонних предпочтений определим совокупностью

$\Omega = < \mathrm{I}, \mathrm{P}, \mathrm{P}_i >$ (1)

$I = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество участников

$P = \{\hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{n}\}$ – множество принадлежащих участникам предметов

$p(i)$ – предмет, принадлежащий i-му участнику;

$P_i \subset P$ – подмножество предметов, на любой из которых i-ый участник может обменять свой предмет $p(i)$.

$A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ – матрица бальных оценок.

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{номер предпочтения } i-\text{го участника к } j-\text{му участнику} \\ 0, & \text{если } i = j \\ -1, & \text{если обмен невозможен} \end{cases}$$

Постановка задачи

- Перераспределение предметов между участниками является решением задачи Ω является, если предмет, получаемый каждым участником i, лежит в множестве $P_i^* = P_i \cup \{p(i)\}$. Участник i считается обменивающимся, если получаемый им предмет отличен от $p(i)$.
- Решением задачи обмена Ω назовём перестановки π элементов $\hat{}_1$, $\hat{}_2, \ldots, \hat{}_n$, такие что $\forall i\ \pi(\hat{i}) \in P_i^*$. Будучи перестановкой, решение распадается на систему циклов $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, называемых циклами обмена. При реализации цикла $C = \{i_1, i_2, \cdots, i_r, i_1\}$ участник i_1 получает предмет $p(i_2)$, участник i_2 получает предмет $p(i_3), \ldots$, участник i_{r-1} получает предмет $p(i_r)$, участник i_r получает предмет $p(i_1)$.
- Решение π задачи Ω назовём не компрометируемым, если не существует коалиции участников $U \subseteq I$, способных перераспределить между собой совокупность изначально принадлежащих им предметов $P(U)$ так, что каждый член коалиции получит предмет, не худший с его точки зрения, а хотя бы один из участников – предмет, лучший, чем в результате реализации решения π (принцип коалиционной устойчивости).

Исходные данные задачи Ω удобно представлять n-вершинным взвешенном ориентированным графом $G(\Omega) =< H, V >$, где H – множество вершин, соответствующих участникам обмена, V – множество дуг. Пара (i, j) является дугой графа ($(i, j) \in V$) тогда и только тогда, когда $\hat{j} \in P_i$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$) .

Циклам графа $G(\Omega)$ соответствуют возможные цепочки обмена. Введём в рассмотрение матрицу оценок $B = ||b_{ij}||_{n \times n}$:

$$b_{ij} = \begin{cases} v(i, j), \text{если дуга } (i, j) \in V \\ \quad 0, \qquad \text{если } i = j \\ -1, \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

где $v(i, j)$ – вес дуги (i, j) – балльная оценка, выставляемая участником i предмету $p(j)$; символ «-1» трактуется как знак запрета. Каждая задача Ω определяется своей матрицей оценок B. В этом случае задачу обмена можно рассматривать как стандартную задачу о назначениях с критерием:

$$\max_{\pi \in H} \sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)} , \qquad (2)$$

где H – совокупность всех допустимых назначений.

Теорема. Решение задачи (2) есть перестановка π^0, максимизирующая число обменивающихся участников в задаче простого обмена, определяемой совокупностью исходных данных (1).

Таким образом, максимизируя $\sum_{i=1}^{n} b_{i\pi(i)}$, строим перестановку, являющуюся решением задачи простого обмена с максимальным числом обменивающихся участников.

Алгоритм решения задачи

Пусть G(Ω) – произвольный непустой граф класса K^*. Для каждой вершины x этого графа через $v(x)$ обозначим максимальный из весов дуг, исходящих из x. Дугу (i, j) назовём красной, если её вес равен $v(i)$. Циклы, состоящие из красных дуг, назовём «красными» циклами. Очевидно, что в каждом графе класса K^* имеется по меньшей мере один красный цикл.

Для графов класса K^* введём операцию изъятия цикла. Результатом изъятия цикла C из графа $G(\Omega)$ назовём максимальный подграф $\Gamma(G(\Omega), C) \in K^*$ этого графа, не содержащий вершин, водящих в цикл C.

1) В исходном графе $G(\Omega) \in K^*$ выделяется любой красный цикл C_1. Это первый цикл, включаемый в конструируемое решение.

2) Если подграф $\Gamma(G(\Omega), C_1)$ пуст, решение состоит из единственного цикла C_1. В противном случае реализуется второй этап, на котором выделяется любой красный цикл C_2. Это второй цикл, включаемый в состав конструируемого решения.

3) Если подграф $\Gamma(G(\Omega), C_1)$ пуст, решение состоит из единственного цикла C_1. В противном случае реализуется второй этап, на котором выделяется любой красный цикл C_2. Это второй цикл, включаемый в состав конструируемого решения.

4) Если подграф $\Gamma(\Gamma(G(\Omega), C_1), C_2)$ пуст, решение состоит из двух циклов обмена C_1 и C_2. В противном случае реализуется третий этап, на котором выделяется произвольный красный цикл C_3. Это третий цикл, включаемый в состав конструируемого устойчивого решения и т.д. вплоть до естественного завершения процесса, когда после выполнения некоторого k-го этапа окажется, что граф $\Gamma(\Gamma(\ldots\Gamma(G(\Omega), C_1), C_2), C_k)$ пуст.

Результат алгоритма – решение $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$.