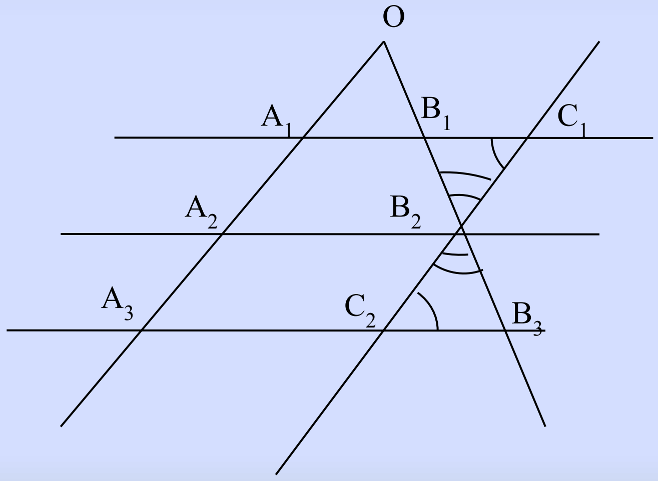
Теорема Фалеса

Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне

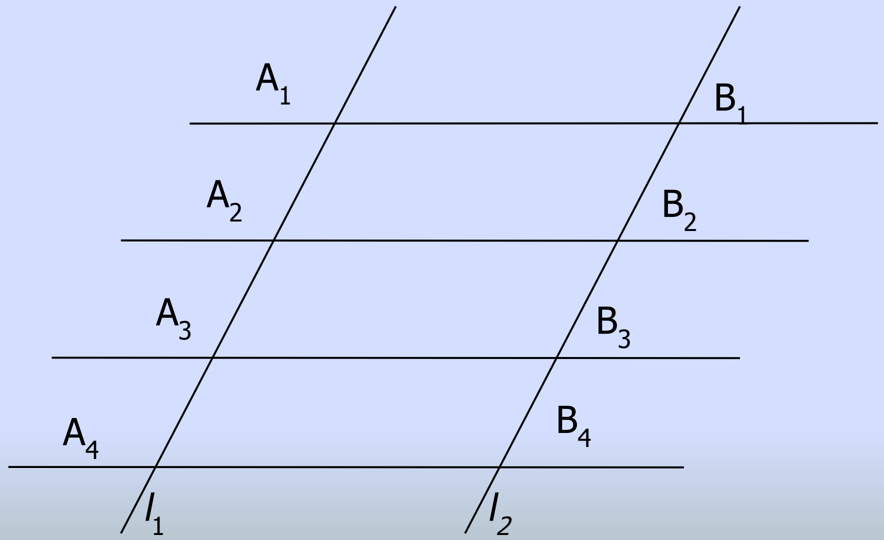


Доказательство:

Пусть A_3OB_3 – заданный угол, а A_1B_1, A_2B_2, и A_3B_3– попарно параллельные прямые и $A_1A_2=A_2A_3$. Докажем, что $B_1B_2=B_2B_3$. Проведем через точку B_2 прямую C_1C_2 параллельную прямой A_1A_3. По лемме $A_1A_2 = C_1B_2$, $A_2A_3 = B_2C_2$ и с учетом условия теоремы $C_1B_2 = B_2C_2$. Кроме того, $\angle B_1C_1B_2 = \angle B_2C_2B_3$– как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1, A_3B_3 и секущей C_1C_2 , а $\angle B_1B_2C_1 = \angle C_2B_2B_3$ как вертикальные. По второму признаку равенства треугольников $\Delta B_1C_1B_2 = \Delta B_3C_2B_2$. Отсюда $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



Доказательство:

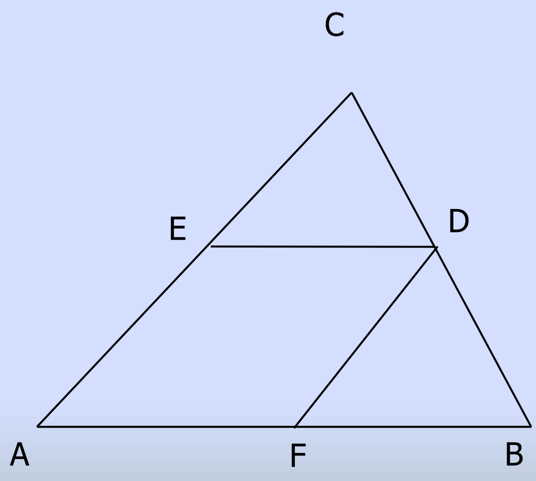
Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4 как на рисунке . Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 равны друг другу. Докажем, что $B_1B_2=B_2B_3$.

Рассмотрим случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны. Тогда $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2= A_2A_3$, то и $B_1B_2=B_2B_3$. Теорема доказана.

Применение теоремы Фалеса к решению задач

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.



Доказательство:

Пусть отрезок *DE* – средняя линия в треугольнике *ABC*, т. е. *AE* = *EC*, *CD* = *BD*. Проведем через точку *D* прямую *a*, параллельную стороне *AB*. По теореме Фалеса прямая *a* пересекает сторону *AC* в ее середине и, следовательно, содержит среднюю линию *DE*. Значит, средняя линия *DE* параллельна стороне *AB*. Проведем среднюю линию *DF*. Она параллельна стороне *AC*. Тогда по лемме отрезок *ED* равен отрезку *AF* и равен половине отрезка *AB*. Теорема доказана.