Лекция 15. Асимптоты графика функции

1. Вертикальные асимптоты

Пусть при $x \to x_0$ с одной стороны $f(x) \to \infty$ монотонно.

Слева и справа могут быть бесконечности разных знаков.

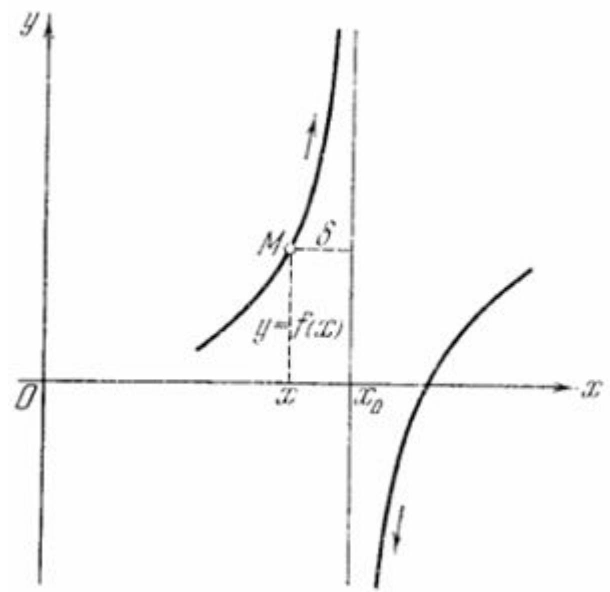
График бесконечно приближается к прямой $x = x_0$.

Примеры:

1) $x = 0$ для $y = \frac{1}{x}$

2) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ для $y = tgx$

3) $x = 0$ для $y = \log_a x$

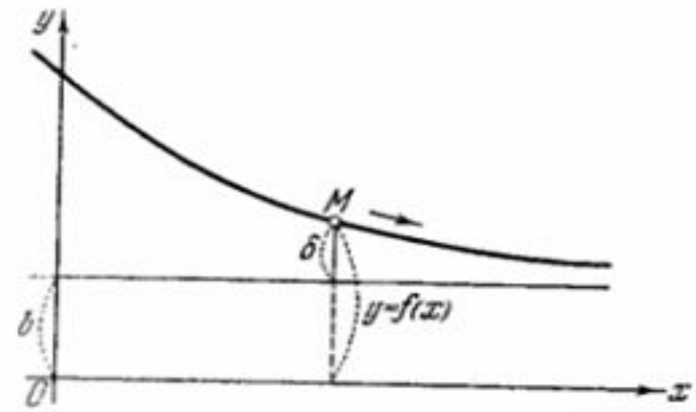


Если расстояние δ от точки кривой до некоторой прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется **асимптотой** кривой.

2. Горизонтальные асимптоты

Примеры.

1. $y = 0$ для $y = \dfrac{k}{x}$
2. $y = 0$ для $y = a^x$
3. $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ для $y = \operatorname{arctg} x$



Для того, чтобы при $x \to +\infty$ прямая $Y = b$ являлась асимптотой iff

$$\lim_{x\to+\infty} \delta = \lim_{x\to+\infty} |y - b| = 0 \text{ или } \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

Отдельно рассматривается случай $x \to -\infty$!

3. Наклонные асимптоты

Пример: $y = \pm \frac{b}{a} x$ для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

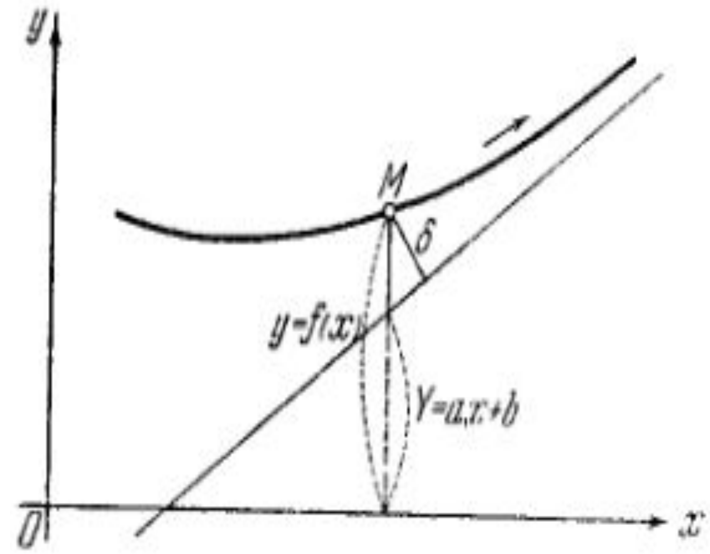
Пусть $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту

$Y = kx + b$ (1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} (y - kx - b) = 0$ (2)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = k$ (3)

$\lim\limits_{x \to +\infty} (y - kx) = b$ (4)



- **ТЕОРЕМА 38.** Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $Y=kx+b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx \right] = b.$$

Пример $$y = \frac{2x^2 + x}{x+1}$$

- **Для дробно рациональной функции:**
- Асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ одновременно существуют или не существуют и в первом случае совпадают.
- Если степень знаменателя выше степени числителя, то асимптота нулевая.
- Если степень знаменателя равна степени числителя, то асимптота горизонтальная.
- Если степень знаменателя на 1 ниже степени числителя, то существует наклонная асимптота.
- Если разность степеней больше 1, то наклонных асимптот не существует.

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

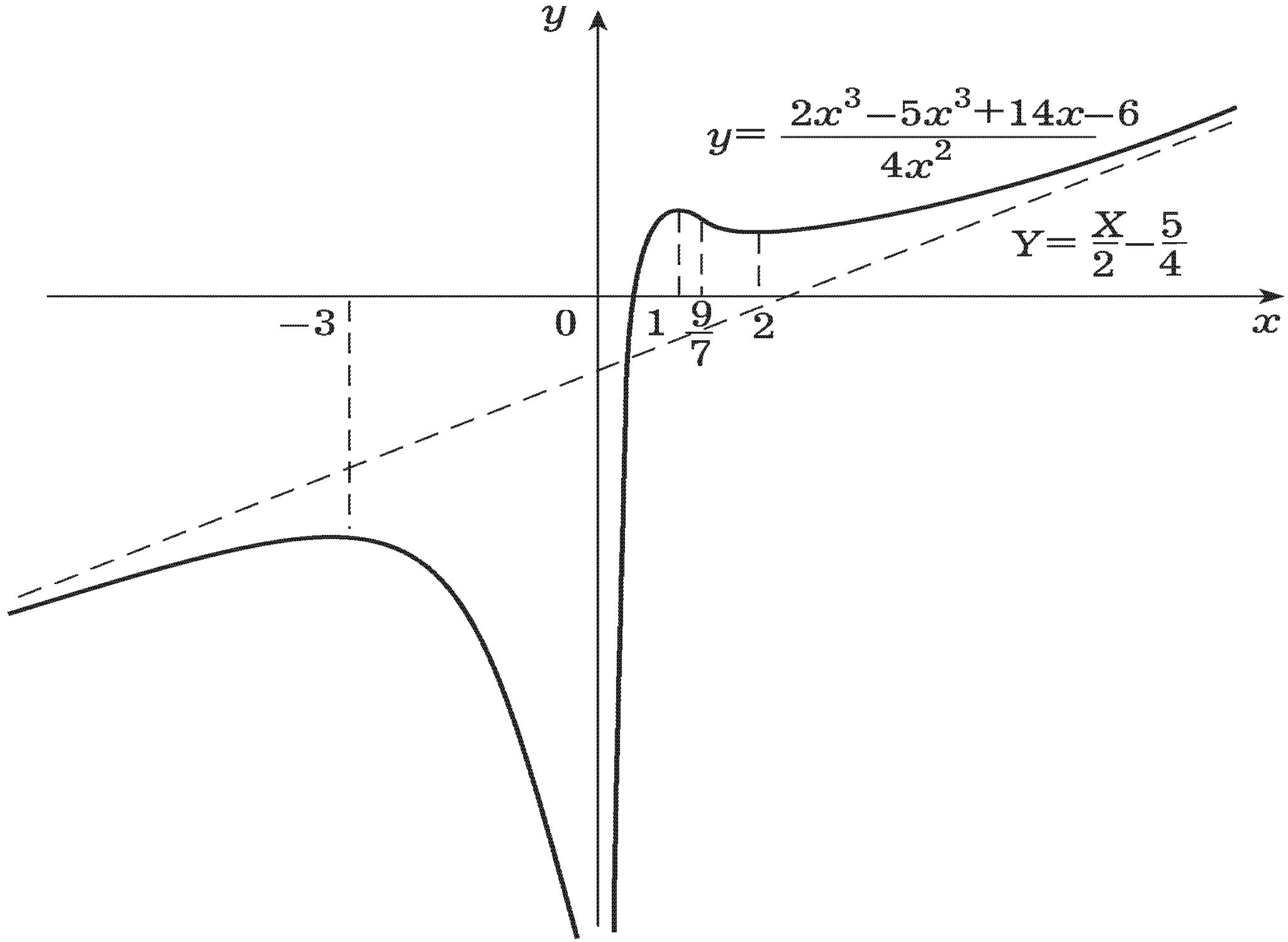
1. Элементарное исследование

- область определения, непрерывность, точки разрыва, их тип (вертикальные асимптоты);
- четность, периодичность
- точки пересечения с осями;
- наклонные асимптоты;
- точки пересечения с асимптотами

2. Промежутки возрастания, убывания, точки экстремума.

3. Промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

Пример. $$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$$



y
$y = \frac{2x^3 - 5x^3 + 14x - 6}{4x^2}$
$Y = \frac{X}{2} - \frac{5}{4}$
-3
0
1
$\frac{9}{7}$
2
x