Лекція №1.
Постановка задачі оптимізації і основні означення

В загальному вигляді задачу пошуку оптимального розв'язку можна сформулювати таким чином: *мінімізувати (максимізувати) цільову функцію з урахуванням обмежень на змінні.*

Задача оптимізації містить:

– *цільову функцію* $f(\mathrm{x})$, де $\mathrm{x} = (x_1; \ldots; x_n)^T$, визначену на n - вимірному евклідовому просторі R^n. Її значення характеризують ступень досягнення мети, в ім'я якої поставлена або розв'язується задача;

– *множину припустимих розв'язків* $X \subseteq R^n$, серед елементів якої здійснюється пошук.

Отже, потрібно знайти такий вектор x^* із множини припустимих розв'язків, якому відповідає мінімальне значення цільової функції на цій множині:

$$f(\mathrm{x}^*) = \min_{\mathrm{x} \in X} f(\mathrm{x}).$$

Зауваження 1.1. Задача пошуку максимуму функції $f(\mathrm{x})$ зводиться до еквівалентної задачі пошуку мінімуму (і навпаки) шляхом заміни знака перед функцією на протилежний:

$$f(\mathrm{x}^*) = \max_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x}) = -\min_{\mathrm{x}\in X}\left[-f(\mathrm{x})\right].$$

Задача пошуку мінімуму й максимуму цільової функції $f(\mathrm{x})$ називається задачею пошуку *екстремуму*:

$$f(\mathrm{x}^*) = \operatorname*{extr}_{\mathrm{x}\in X} f(\mathrm{x}).$$

Якщо множина припустимих розв'язків X задається обмеженнями (умовами), що накладають на вектор x, то розв'язується задача пошуку *умовного екстремуму.* Якщо $X = R^n$, тобто обмеження (умови) на вектор x відсутні, то розв'язується задача пошуку *безумовного екстремуму.*

Розв'язком задачі пошуку екстремуму є пара $(\mathrm{x}^*, f(\mathrm{x}^*))$, що включає точку x^* й значення цільової функції в цій точці.

Множина точок *мінімуму (максимуму)* цільової функції $f(\mathrm{x})$ на множині X позначається X^*. Вона може містити скінченне число точок (у тому числі одну), нескінченне число точок або бути порожнім.

Означення 1.1. Точка $\mathrm{x}^* \in X$ називається точкою *глобального (абсолютного) мінімуму* функції $f(\mathrm{x})$ на множині X, якщо функція досягає в цій точці свого найменшого значення, тобто

$$f(\mathrm{x}^*) \le f(\mathrm{x}) \quad \forall \mathrm{x} \in X .$$

Означення 1.2. Точка $\mathrm{x}^* \in X$ називається точкою *локального (відносного) мінімуму* функції $f(\mathrm{x})$ на множині X, якщо існує $\varepsilon > 0$, таке, що якщо $\mathrm{x} \in X$ й $\| \mathrm{x} - \mathrm{x}^* \| < \varepsilon$, то $f(\mathrm{x}^*) \le f(\mathrm{x})$. Тут $\| \mathrm{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ – евклідова норма вектора x.

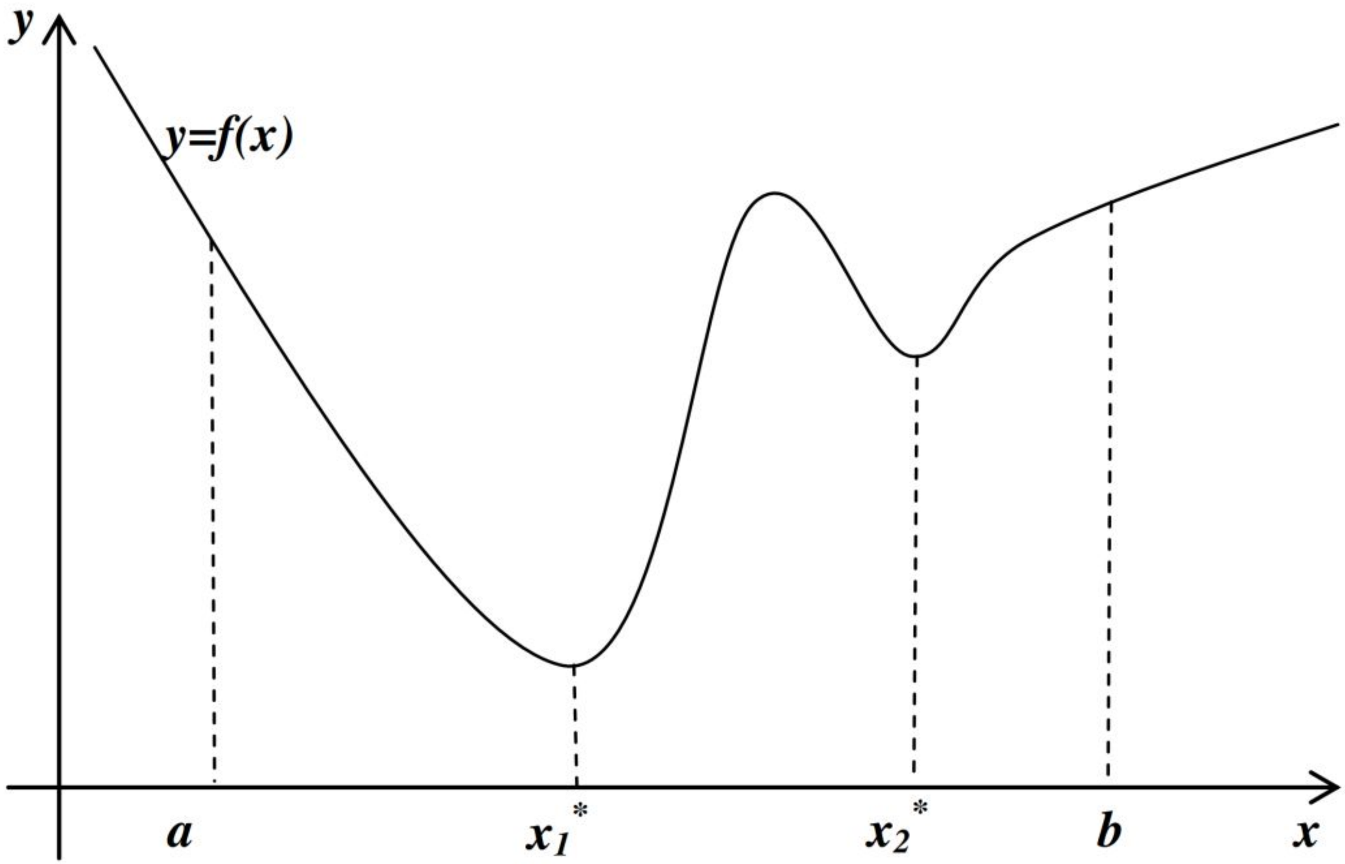
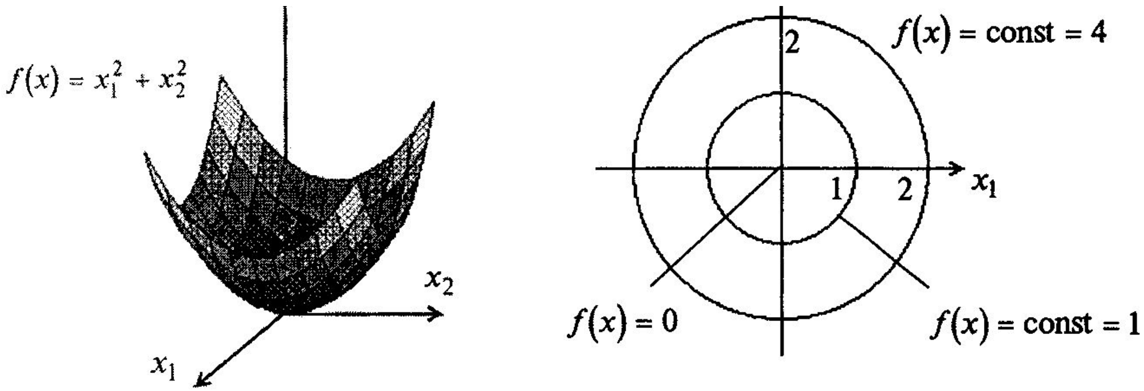
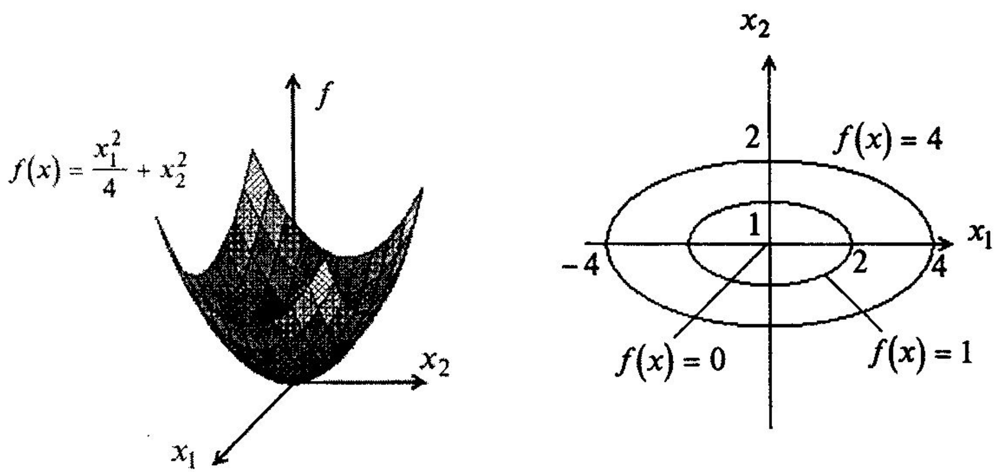


Рис. 1.2. Приклади точок локальних та глобального мінімумів

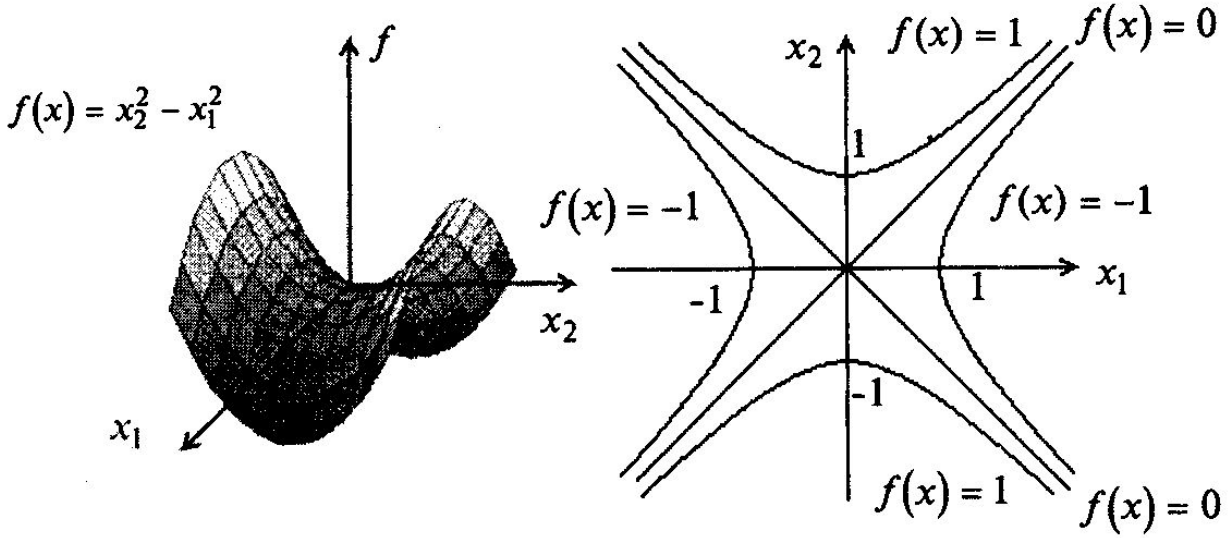
Означення 1.3. *Поверхнею рівня* функції $f(x)$ називається множина точок, в яких функція приймає постійне значення, тобто $f(x) = \text{const}$. Якщо $n = 2$, поверхня рівня зображується *лінією рівня* на площині R^2.



а

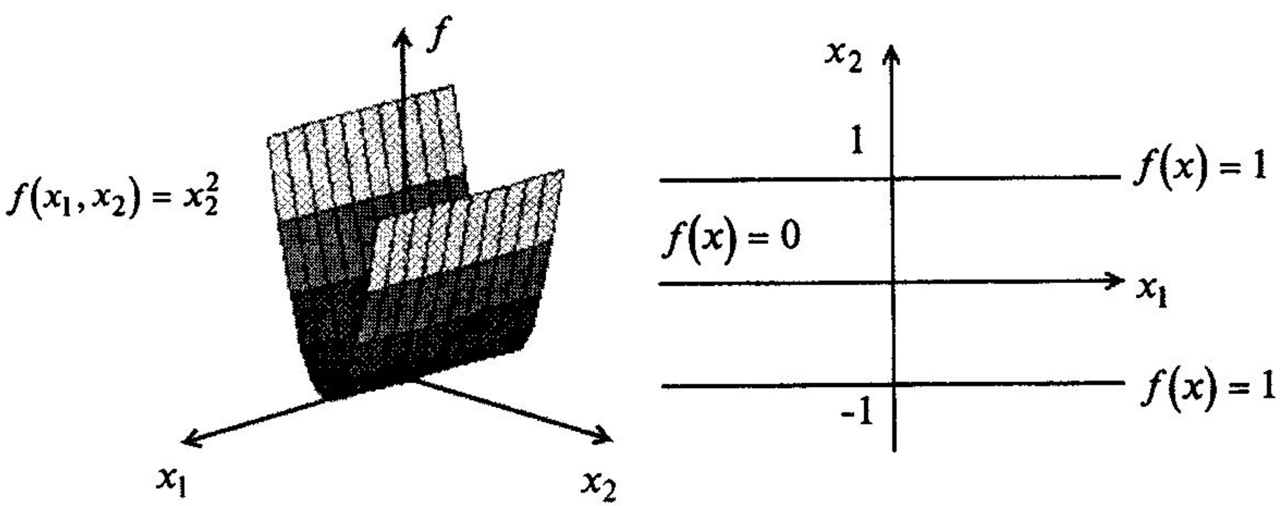


б



$f(x) = x_2^2 - x_1^2$
f
x_1
x_2
$f(x) = 1$
$f(x) = 0$
$f(x) = -1$
$f(x) = -1$
1
-1
1
-1
$f(x) = 1$
$f(x) = 0$

в



$f(x_1, x_2) = x_2^2$
f
x_1
x_2
1
$f(x) = 1$
$f(x) = 0$
$f(x) = 1$
-1

Приклад 1.1

На рис. 1.1 зображені лінії рівня деякої функції. Числа вказують значення функції $f(\mathrm{x})$ на відповідній лінії. Точкам A і B відповідають значення функції $f(A)=5$ й $f(B)=10$. Потрібно класифікувати ці точки.

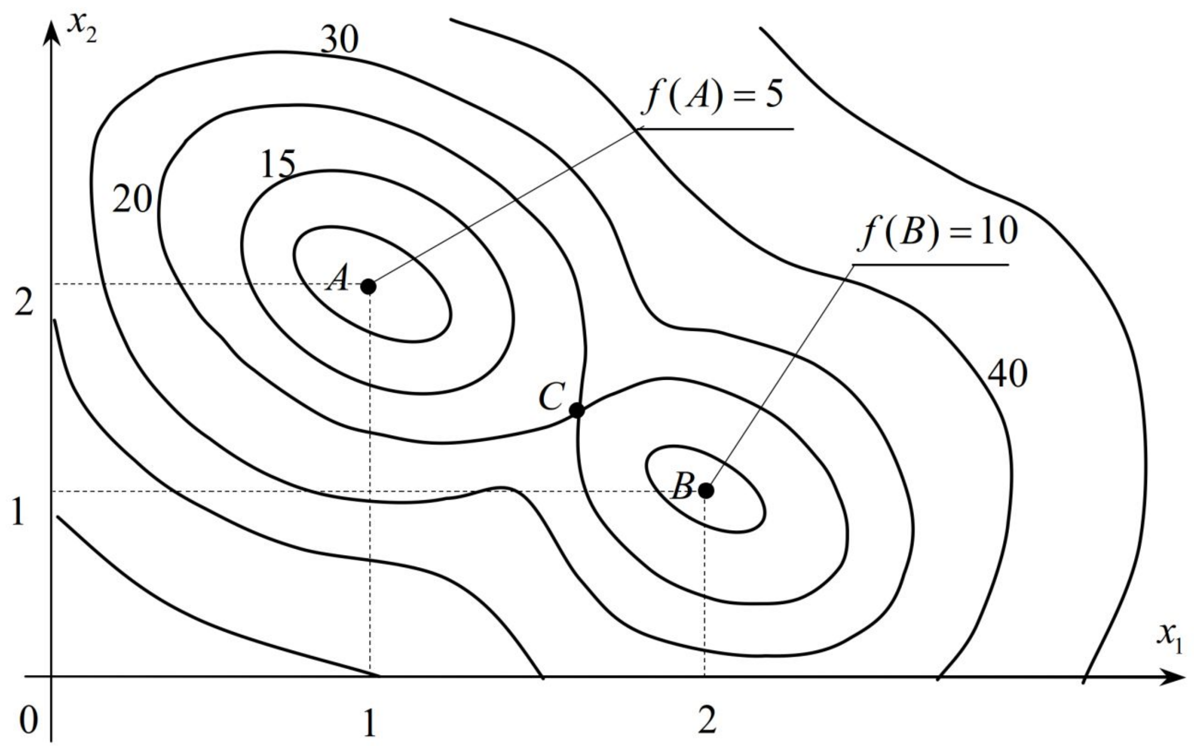
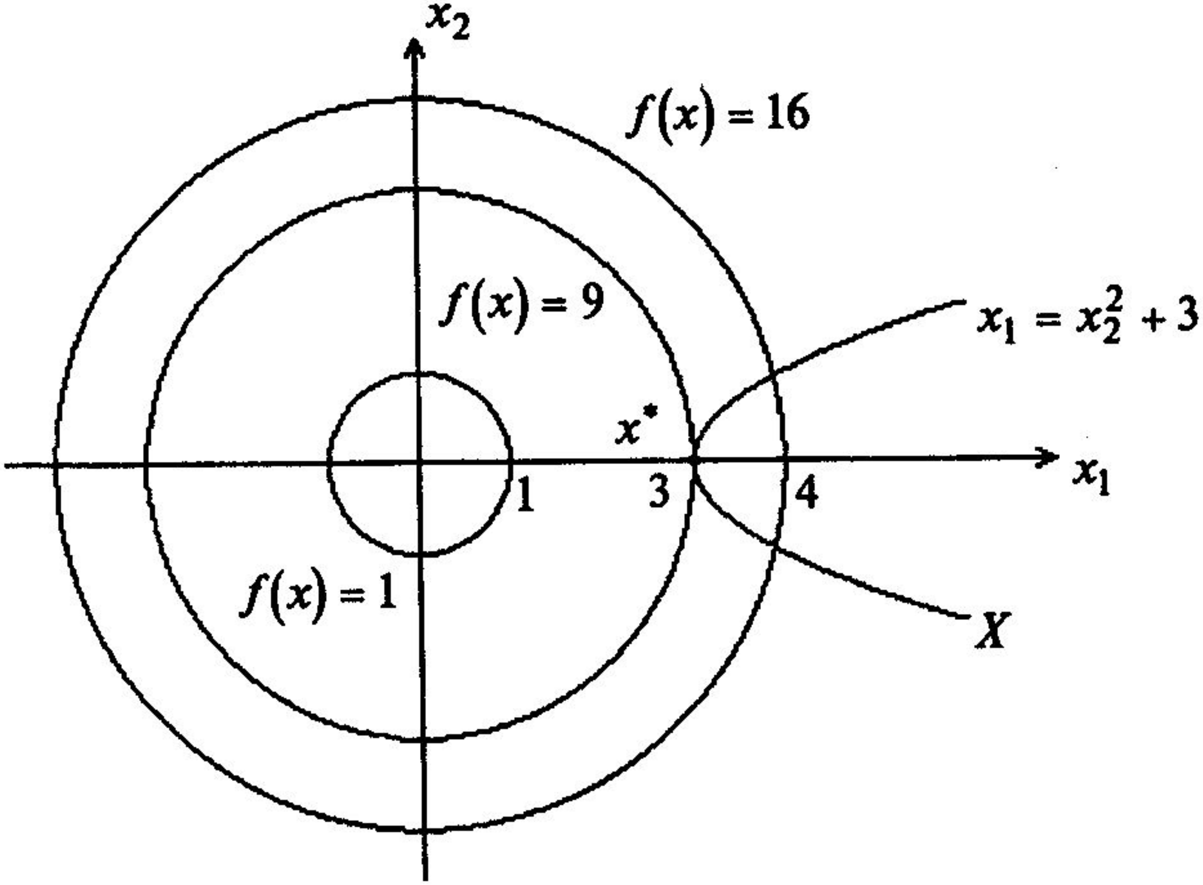


Рис.1.1

Пример 1.4. Найти точки экстремума функций $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ и $f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2$ на множестве R^2.



Означення 1.4. *Градієнтом* $\nabla f(\mathrm{x})$ неперервно диференційовної функції $f(\mathrm{x})$ в точці x називається вектор-стовпець, елементами якого є частинні похідні першого порядку, обчислені в заданій точці:

$$\nabla f(\mathrm{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_1}; \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_n} \right)^T .$$

Градієнт функції спрямований по нормалі до поверхні рівня (див. означення 1.3), тобто перпендикулярно до дотичної площини, проведеної в точці x, в напрямку найбільшого зростання функції в даній точці.

Разом із градієнтом можна визначити *антиградієнт,* який дорівнює за модулем градієнту, але протилежний за напрямком. Він вказує напрямок найбільшого спадання функції в даній точці.

Означення 1.5. *Матрицею Гессе* $H(\mathrm{x})$ двічі неперервно диференційовної в точці x функції $f(\mathrm{x})$ називається матриця частинних похідних другого порядку, обчислених в заданій точці:

$$H(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix},$$

де $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\mathrm{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1,\dots,n$.

Матриця Гессе є симетричною матрицею розміру $(n \times n)$.

Означення 1.6. Квадратична форма $\Delta x^T H(x)\Delta x$ (а також відповідна матриця Гессе $H(x)$) називається:

– *додатно визначеною* ($H(x) > 0$), якщо для будь-якого ненульового Δx виконується нерівність $\Delta x^T H(x)\Delta x > 0$;

– *від'ємно визначеною* ($H(x) < 0$), якщо для будь-якого ненульового Δx виконується нерівність $\Delta x^T H(x)\Delta x < 0$;

Перевірка знаковизначеності матриці може бути здійснена, наприклад, за допомогою критерію Сильвестра. Необхідною і достатньою умовою додатної визначеності симетричної матриці $\mathbf{A}$ є виконання n нерівностей:

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

а умовою від'ємної визначеності є:

$$a_{11} < 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

тобто чергування знаків головних мінорів матриці $\mathbf{A}$.

Задачі:

1. Знайти точки екстремуму функції на заданій множині

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \qquad X = \{x \mid x_1 + x_2 - 2 = 0\}.$$

2. Для функції $f(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^4$ обчислити градієнт і знайти матрицю Гессе в точках $\mathrm{x}^{(0)} = (0;\, 0)^T$, $\mathrm{x}^{(1)} = (1;\, 1)^T$.

3. Дослідити матриці на знакозмінність

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Приклади оптимізаційних задач та їх розв'язування

Приклад

Компанія Reddy Mikks виготовляє краску для внутрішніх і зовнішніх робіт з сировини двох типів: M1 і M2. Наступна таблиця представляє основні данні для задачі:

	Витрати сировини (в тоннах) на тону краски		Максимально можливі щоденні витрати сировини
	для зовнішніх робіт	для внутрішніх робіт	
Сировина M1	6	4	24
Сировина M2	1	2	6
Прибуток ($ на тонну краски)	5000	4000	

Відділ маркетингу компанії обмежив щоденне виготовлення краски для внутрішніх робіт до 2 т (через відсутність попиту), а також поставив умову, щоб щоденне виробництво краски для внутрішніх робіт не перевищувало більш ніж на тонну аналогічний показник виготовлення краски для зовнішніх робіт. Компанія хоче визначити оптимальний план випуску видів продукції, при якому прибуток буде максимальним.

Побудуємо математичну модель задачі.

Нехай x – кількість тонн краски для зовнішніх робіт, y – кількість тонн краски для внутрішніх робіт. Тоді максимальний прибуток від випуску краски дорівнює:

$$f(x, y) = 5000x + 4000y \to max .$$

Загальні витрати сировини М1 складатимуть:

$$6x + 4y \le 24 ,$$

а сировини М2:

$$x + 2y \le 6 .$$

При чому щоденне виготовлення краски для внутрішніх робіт повинно бути до 2 т:

$$y \le 2 ,$$

і не повинно перевищувати більш ніж на тонну аналогічний показник виготовлення краски для зовнішніх робіт:

$$y - x \le 1 ,$$

$$x \ge 0, y \ge 0 .$$

Розв'язання за допомогою Mathcad:

$$f(x,y) := 5000x + 4000y$$

$$x := 0 \qquad y := 0$$

Given

$$6x + 4y \le 24$$

$$x + 2y \le 6$$

$$y \le 2$$

$$y - x \le 1$$

$$x \ge 0 \qquad y \ge 0$$

$$z := \text{Maximize}(f, x, y)$$

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$f(z_0, z_1) = 2.1 \times 10^4$$

MathWorks® Products Solutions Academia Support Community Events Company

Documentation

CONTENTS Close

< All Products

< Optimization Toolbox

< Linear Programming and Mixed-Integer Linear Programming

linprog

ON THIS PAGE

- Syntax
- Description
- Examples
- Input Arguments
- Output Arguments
- Limitations
- More About
- References
- See Also

linprog

Solve linear programming problems

Linear programming solver

Finds the minimum of a problem specified by

$$\min_x f^T x \text{ such that } \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

f, *x*, *b*, *beq*, *lb*, and *ub* are vectors, and *A* and *Aeq* are matrices.

Syntax

```
x = linprog(f,A,b)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
x = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
x = linprog(problem)
[x,fval] = linprog(___)
[x,fval,exitflag,output] = linprog(___)
[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(___)
```

Examples

Find x that minimizes $f(x) = -5x_1 - 4x_2 - 6x_3$ subject to

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 45 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

First, enter the coefficients

$$f = [-5; -4; -6];$$

$$A = [1, -1, 1; 3, 2, 4; 3, 2, 0];$$

$$b = [20; 42; 30];$$

$$l_b = zeros(3, 1);$$

Next call a linear programming routine

$$[x, fval] = linprog(f, A, b, [], [], lb)$$

gives the solution

$x =$
0.0000
15.0000
3.0000

$fval =$
-78.0000

Розв’язок задачі у Matlab

$$f(x)=7x_1-4x_2\to\max$$
$$\begin{cases}3x_1-2x_2\le 12,\\ 3x_1+2x_2\ge 6,\\ -x_1+2x_2\le 5,\end{cases}$$
$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}$$

```
>> f=[7; -4]
>> A=[3, -2; -3, -2; -1, 2]
>> b=[12; -6; 5]
>> lb=[0; 0]
>> format short
>> linprog(-f,A,b,[],[],lb,[])

ans =

    8.5000
    6.7500
```

`fminbnd` - пошук функції однієї змінної для фіксованого інтервал
`mincon` - пошук мінімуму нелінійної задачі з обмеженнями
`minsearch` - пошук мінімуму функції декількох змінних без обмежень
`fminunc` - пошук мінімуму функції декількох змінних без обмежень
ної нелінійної функції

fminbnd

Find minimum of single-variable function on fixed interval

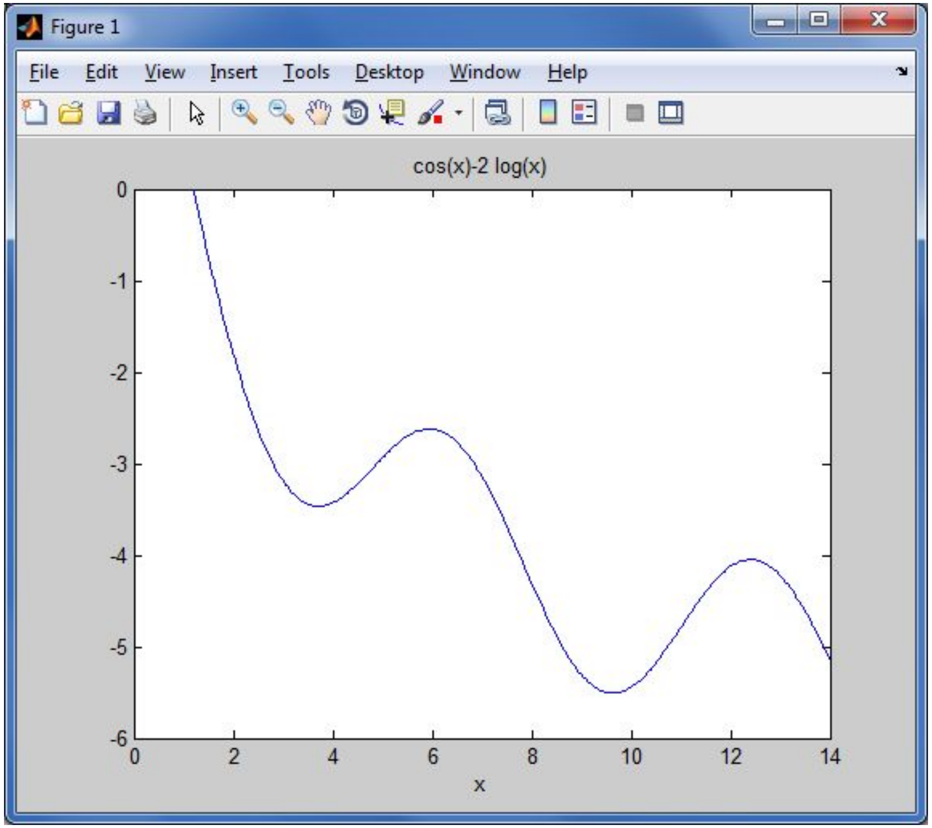
Syntax

```
x = fminbnd(fun,x1,x2)
x = fminbnd(fun,x1,x2,options)
x = fminbnd(problem)
[x,fval] = fminbnd(...)
[x,fval,exitflag] = fminbnd(...)
[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(...)
```

$$f(x) = \cos(x) - 2\ln(x)$$

MyFunc.m

```
function y=MyFunc(x)
y=cos(x)-2*log(x);
```




```
>>ezplot('cos(x)-2*log(x)',[0,14,-6,0])
```

```
>> [x,fx] = fminbnd(@MyFunc,8,12)

x =

    9.6339


fx =

   -5.5088
```

```
>> [x,fx] = fminsearch(@MyFunc,8)

x =

    9.6339


fx =

   -5.5088

>> [x,fx] = fminsearch(@MyFunc,4)

x =

    3.7108


fx =

   -3.4648
```